SCHAUM'S ouTlines

全美经典 学习指导系列

物理学基础

〔美〕F. J. 比克　E. 赫克特 著

轩植华 译

- 获取最好成绩的桥梁
- 覆盖各种基础教材
- 教授有效解题方法
- 984道完全解答之习题
- 适于自学者



科学出版社



麦格劳-希尔教育出版集团

(O-1410.0101)
责任编辑：张邦固

全球销量超越3000万的“全美经典学习指导系列”是您的最佳学习伴侣！

SCHAUM'S ouTlines

40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典学习指导系列

概率和统计
统计学
离散数学
Mathematica使用指南
数理金融引论
机械振动
微分方程
统计学原理（上）
统计学原理（下）
微积分
静力学与材料力学
有限元分析
传热学
近代物理学
2000工程力学习题精解
工程力学
3000物理习题精解
流体动力学
物理学基础
材料力学
2000离散数学习题精解
工程热力学
数值分析
量子力学
有机化学习题精解
3000化学习题精解
大学化学习题精解
电路
电气工程基础
工程电磁场基础
数字信号处理
数字系统导论
数字原理
电机与机电学
基本电路分析
信号与系统
微生物学
生物化学
生物学
分子和细胞生物学
人体解剖与生理学

ISBN 7-03-009542-1


McGraw Hill

ISBN 7-03-009542-1/O · 1410
定 价：32.00元

全美经典学习指导系列

物理学基础

（第九版）

〔美〕F. J. 比克　E. 赫克特　著

轩植华　译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书是专科学生用的物理辅导书，没有微积分数学知识。可与我国文科教材相配。

原(英文)书曾被超过50万学生购买使用过。其畅销的缘故是，它讲解清楚，并不断对知识加以巩固，从而使学生可以很快掌握这门较难的知识。全书共46章从矢量到热力学，以及应用核物理诸物理分支均有叙述，给读者提供了解决问题的有效方法。大量有价值的附录可以帮助读者很方便地找到常用的有关信息。

Frederick J. Bueche, Eugene Hecht: Schaum's Outlines of Theory and Problems of College Physics, Ninth Edition

ISBN: 0-07-008941-8

图字：图字 01－2001－1761 号

图书在版编目(CIP)数据

物理学基础〔美〕F. J. 比克(Bueche)，〔美〕E. 赫克特(Hecht)著；轩植华译. -北京：科学出版社，2002

(全美经典学习指导系列)

ISBN 7－03－009542－1

Ⅰ. 物… Ⅱ. ①比…②赫…③轩… Ⅲ. 物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 039779 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第 一 版 开本：A4(890×1240)

2002年1月第一次印刷 印张：21 3/4

印数：1—5 000 字数：613 000

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换(环伟))

译 者 序

Schaum's Outlines 丛书是涉及几十个学科的"理论与习题"式的系列教学资料，至今已售出 3000 万册。这本"College Physics"是其中的一本。作者之一，F. J. 比克，早年在美国康奈尔大学获物理学博士学位，现任美国 Dayton 大学高级教授。他在聚合物物理方面发表了一百多篇研究论文，出版过研究生用的高分子物理方面的教科书。然而，他最重要的贡献却在于物理教学方面。他的著作"物理学原理"于 1965 年出版，至今已出第五版，仍是世界各国广为使用的普通物理教材之一。他还写过许多物理学的入门书籍和学习资料。本书的另外一名作者，E. 赫克特，是美国 Adelphi 大学物理系最受学生欢迎的教授。在他的 8 本著作中，"光学"一书自 1976 年问世以来，至今仍被各国的物理学教授广泛称道，我国于 1979 年就出版了该书的中译本。赫克特教授也曾经为 Schaum's Outlines 丛书写过一本"光学"，中译本的书名为"光学——理论与习题"。赫克特对于物理和数学、物理和艺术之间的关系也造诣极深，著作颇丰，曾获得过 1989 年度的美国艺术图书奖。

本书的主要特点是广泛涉及物理学的各个领域，但又不需要微积分知识，比我国高中物理、甚至大学非物理专业的物理课涵盖面要宽，而深度又不及我国大学的普通物理内容。本书的另一特点是按知识点划分章节，在简要列出相关概念和原理后，辅之以大量例题（984 道）和习题（499 道）。学生可以通过解题加深对基本原理的认识，做到"既懂原理，又会解题"。这本书在美国已售出 50 多万册，可见其受欢迎的程度。本书也可帮助老师提纲挈领总结知识，选择复习题和考试题，成为案头必备的参考书。总之，本书既可作为大学、也可作为中学的老师和同学的良师益友。

译者在译文中更正了原书中的一些错误，并以译注的形式加以说明。由于译者水平有限，而且只有四个月的时限，虽然尽了最大努力，错误和疏漏之处在所难免，恳请得到读者的指正。本书翻译工作受到中国科技大学教务处和物理教材编审委员会的支持。在翻译过程中，译者得到中国科技大学程福臻教授和戚伯云教授的鼓励和支持，戚伯云教授还拨冗审校了部分译稿，译者一并表示衷心的感谢。

轩植华

2001 年 3 月

作 者 序

物理学的人门课，也称作“General Physics”或“College Physics”，通常上两个学期。它涵盖经典物理，也选择了一些近代物理的内容。“College Physics”实际上是导论性质的物理学的一种称谓，并不涉及微积分。作为薛奥姆大纲丛书之一的物理学人门书，这本“College Physics”正是为满足这种要求而写，其独特之处在于既可为中学、也可为大学所用。它所涉及到的数学知识仅限于初等代数、三角和一点矢量分析。本书的读者应有很好的代数基础。三角学的基本知识见附录B。必要时，书中会详细给出三角函数的运算以及初等矢量分析的内容。

在某种意义上，学习物理不同于学习其他课程。物理学有它自己的特殊语言词汇，这种语言以符号的形式，按照数学的逻辑，精确地进行分析和演绎。诸如能量、动量、电流、通量、干涉、电容等词汇，都有专门的科学含义。因为物理学的知识系统是按层次建立起来的，必须先掌握这些词汇的含义，才能进一步学习相关的内容。譬如，不确切理解速度，就不懂加速度和动量，而不懂加速度和动量，就不可能理解力。本书每一章都先简要汇总相关的重要概念、定义、关系式、定律、定理和方程，搭建起这一章的理论框架。我们不应当简单地背诵这些原理，而要花大气力着重掌握其物理实质。

每一位物理老师在讲授这门神奇的课程时，都会听到学生普遍的哀叹：我什么都懂，就是不会做题。多数同学从学习中体验到，做题才是判断是否真正理解物理原理的最高标准和最终证明，也只有随着解题的过程才能逐步深化对原理的理解。习题是现实世界的反映，因此掌握解题技巧具有重要的实际意义。解题不是简单容易的事，要认真分析、一丝不苟，彻底掌握每一道题，绝不能满足于一知半解地“知道怎么做”，即便是对不难的题也来不得半点马虎。学习和演奏乐器一样，必须先从基础学起，不断实践，持之以恒。奏鸣曲中若有一个音符出错，可能无伤大雅；但解题过程中的一个小错就可能导致完全荒谬的结果。本书的宗旨就是教你学会正确地做物理题。

本书出版已经多年，为了使其内容符合物理学的现代面貌，改善教学效果，第九版进行了修订。修订版增加了一些习题，简化了符号体系，一个物理量在全书中只用同一符号表示。譬如，$\boldsymbol{F}$ 只表示力，而 $\boldsymbol{F}_C$ 表示向心力，$\boldsymbol{F}_W$ 表示重力，$\boldsymbol{F}_T$ 表示张力，$\boldsymbol{F}_N$ 表示法向力，$\boldsymbol{F}_f$ 表示摩擦力，等等。这样功(W)将不再与重力($\boldsymbol{F}_W$)混淆，周期(T)也不会与张力($\boldsymbol{F}_T$)搞错。附录A给出有效数字的法则，所有的数字运算都要符合这一法则。原书中几乎所有的定义都重新加以修订，更加准确地符合现代规范。新版重画了所有的插图，使其更加精确美观、合乎实际。

作者诚挚欢迎您的宝贵意见和建议，或提供好的习题。来信请寄 E. Hecht，Adelphi University，Physics Department，Garden City，NY 11530。

E. 赫克特　(Hecht)

目　录

第一章　矢量导论

标量

标量与空间方向无关。许多物理量，诸如长度、时间、温度、质量、密度、电荷和体积等都属于标量，只有多少、大小之分，与方向无关。班级里学生人数，罐子里糖的多少、房屋的价值等都是我们熟悉的标量。

标量用普通数字来标明，其加减法符合通常的规则。盒子里有两块糖，再加七块糖，一共有九块糖。

矢量

要完全描述一个矢量，既要说明其多少或大小，又要说明其方向。位移、速度、加速度、力和动量等许多物理量都是矢量。譬如，某位移矢量指从初始某点沿 x 方向移动 2cm 到了第二个点的位置变化。又譬如，朝北拉系在柱子上的绳子，对柱子产生 20N 朝北的力。1 牛顿(N)＝0.225 磅力(lbf)。同样，以 40km/h 速度朝南行驶的汽车具有 40km/h 并朝南的速度矢量。

矢量用一个标明大小的箭头来表示。箭的长度正比于矢量的大小(如上述例中的 2cm、20N、40km/h 等)。箭头的方向表示矢量的方向。

印刷体矢量通常用粗体字母表示，如 $\boldsymbol{F}$，手写体矢量通常是在字母上方画箭头或在下方画波浪线表示，如 $\vec{F}$ 或 $\underset{\sim}{F}$。为了全面描述矢量，先必须建立某些规则。

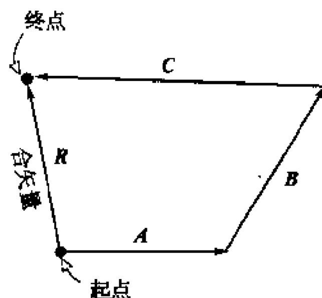


图 1-1

合矢量

几个同种矢量(比如力)相加得到一个合矢量，这个合矢量应具有与原来几个矢量相同的效果。

矢量相加的多边形作图法

确定几个矢量($\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$)的合矢量 $\boldsymbol{R}$ 的做法是，先从任何一个方便的点开始，依次画出各个矢量，每个矢量的箭尾接前一个矢量的箭尖。从起始点(即第一矢量的箭尾)画到最后一个矢量的箭尖，就得到了合矢量 $\boldsymbol{R}$。$R=|\boldsymbol{R}|$ 表示这个合矢量的大小。

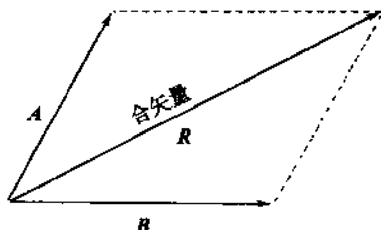


图 1-2

合矢量与画这些矢量的顺序无关：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{R}$。见图 1-1。

矢量相加的平行四边形法

两个成任意角度的矢量的合矢量可以表示成一个平行四边形的对角线：把两个相加矢量作为一个平行四边形的两个边，平行四边形的对角线就是这两个矢量的合矢量。合矢量的起点是原来那两个矢量的起点(箭尾)，如图 1-2。

矢量的减法

矢量 $\boldsymbol{A}$ 减矢量 $\boldsymbol{B}$，先把矢量 $\boldsymbol{B}$ 的方向倒转，再与矢量 $\boldsymbol{A}$ 相加，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$。

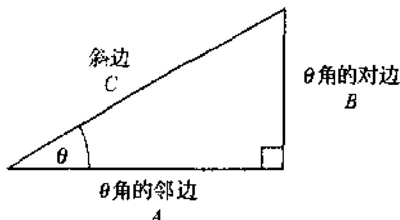


图 1-3

三角函数

三角函数的定义与直角有关。对于图 1-3 所示的直角三角形，定义

$$\sin\theta = \frac{对边}{斜边} = \frac{B}{C},\quad \cos\theta = \frac{邻边}{斜边} = \frac{A}{C},$$

$$\tan\theta = \frac{对边}{邻边} = \frac{B}{A}$$

或写成

$$B = C\sin\theta,\quad A = C\cos\theta,\quad B = A\tan\theta$$

矢量的分量

矢量的**分量**是该矢量沿某给定方向的有效值。如，某位移矢量平行于 x 方向的位移就叫该矢量的 x 分量。一个矢量可以看成是它沿任意相互垂直的三维方向的分量相加的合矢量。同样，在二维空间里，一个矢量可以沿任意两个相互垂直方向分解为两个分矢量。图 1-4 表明矢量 $\boldsymbol{R}$ 及其 x 分量和 y 分量 $\boldsymbol{R}_x$ 和 $\boldsymbol{R}_y$。它们的大小为

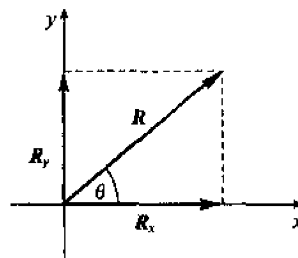


图 1-4

$$|\boldsymbol{R}_x| = |\boldsymbol{R}|\cos\theta \quad 和 \quad |\boldsymbol{R}_y| = |\boldsymbol{R}|\sin\theta$$

或等价写成

$$R_x = R\cos\theta \quad 和 \quad R_y = R\sin\theta$$

矢量相加的分量法

将每个矢量都沿 x、y、z 坐标分解为分量，若与坐标方向相反，则该分量为负值。合矢量 $\boldsymbol{R}$ 的 x 分量 R_x 的标量值等于所有矢量的 x 分量标量值之和。用同样的方法求出合矢量的 y 分量和 z 分量的标量值。而合矢量由下式给出：

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

对于二维情况，合矢量与 x 轴的夹角 θ 可由下式求得：

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

单位矢量

长度大小为一个单位的矢量叫单位矢量，用黑体字母上方加“ˆ”表示。对于 x、y 和 z 轴上的单位矢量，分别用 $\hat{\boldsymbol{i}}$、$\hat{\boldsymbol{j}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{k}}$ 表示。矢量 $3\hat{\boldsymbol{i}}$ 表示在 $+x$ 方向 3 个单位矢量，而 $-5\hat{\boldsymbol{k}}$ 表示在 $-z$ 方向上 5 个单位矢量。如果矢量在 x、y、z 方向的分量分别为 R_x、R_y 和 R_z，则 $\boldsymbol{R}$ 可写成 $\boldsymbol{R} = R_x\hat{\boldsymbol{i}} + R_y\hat{\boldsymbol{j}} + R_z\hat{\boldsymbol{k}}$。

位移

一个物体从空间某点运动到另外一点，则从初始位置指向最后位置的矢量叫做位移。位移与物体实际运动路径无关。

例　题

1.1　用作题法确定下列两个位移的合位移：2.0m 偏 40°和 4.0m 偏 127°，按惯例，这些角度都是相对于 $+x$ 轴的。答案要求两位有效数字（见附录 A：有效数字）。

解 ☞ 如图 1－5，选择 x 轴和 y 轴。从坐标原点开始，按比例依次（箭尖接箭尾）画出位移。注意，所有偏角都是从 $+x$ 方向开始度量的。合矢量 $\boldsymbol{R}$ 从起点指向终点，如图示。按作图的比例测量其长度即得到合矢量的标量值，4.6m。用量角器测得其偏角为 101°。合位移为 4.6m 偏 101°。

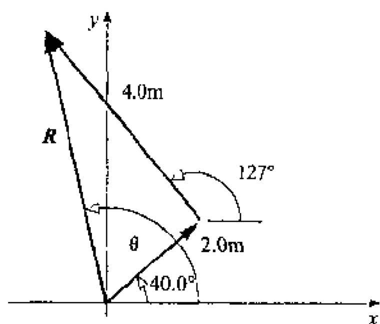


图 1－5

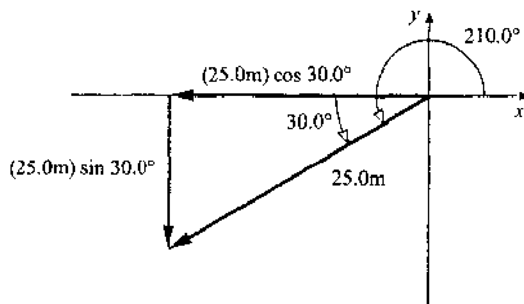


图 1－6

1.2 求出长度为 25.0m、偏角为 210.0°的位移矢量的 x、y 分量。

解 ☞ 位移矢量及其分量如图 1－6 所示。其分量的标量值分别为

x 分量 $=-(25.0\text{m})\cos 30.0° = -21.7\text{m}$

y 分量 $=-(25.0\text{m})\sin 30.0° = -12.5\text{m}$

特别要注意，每个分量都指向坐标轴的负方向，所以要加负号。

1.3 利用矢量分量相加法求解 1.1 题。

解 ☞ 将每个矢量都分解成正交分量，如图 1－7(a)和(b)所示。(我们在原来的矢量上画出两条细线，以说明它们已被分量所替代。)其合矢量的分量为

$$R_x = 1.53\text{m} - 2.41\text{m} = -0.88\text{m},\quad R_y = 1.29\text{m} + 3.19\text{m} = 4.48\text{m}$$

注意，指向坐标轴反方向的分量要取负值。

合矢量见图 1－7(c)，我们得到

$$R = \sqrt{(0.88\text{m})^2 + (4.48\text{m})^2} = 4.6\text{m},\quad \tan\phi = \frac{4.48\text{m}}{0.88\text{m}}$$

而 $\phi = 79°$，有 $\theta = 180° - \phi = 101°$。所以合矢量为

$$\boldsymbol{R} = 4.6\text{m 偏 } 101°\text{(与 } x \text{ 轴夹角)}。$$

记住，矢量必须标明其角度。

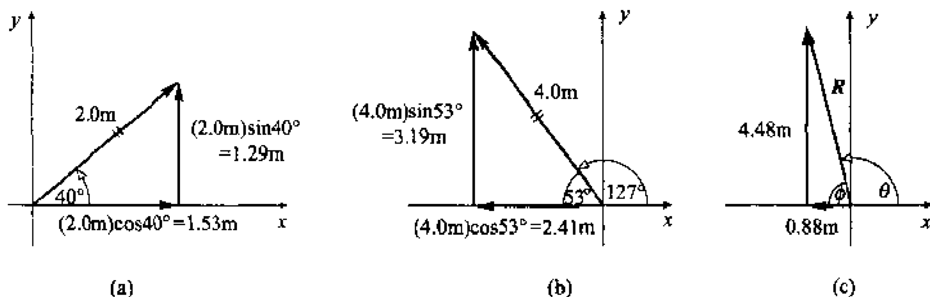


图 1－7

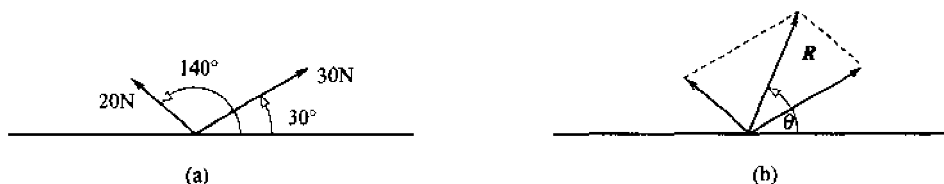


图 1－8

1.4 用平行四边形法求出下面两个力矢量的合矢量：30N 偏 30°，20N 偏 140°。注意题中力

的大小用两位有效数字表示。

解 这两个力矢量标在图 1 - 8(a)中。以它们为边，画出平行四边形如图 1 - 8(b)。其对角线即代表合力 $\boldsymbol{R}$。测量得 $\boldsymbol{R}$=30N 偏 72°。

1.5 同一平面上的四个力作用于 O 点的物体，如图 1 - 9(a)示。试用作图法确定其合力。

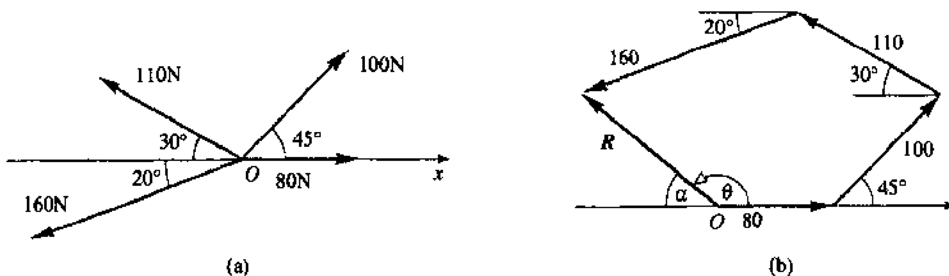


图 1 - 9

解 从 O 点开始，依次首尾相接地画出这 4 个力矢量，从 O 点连接到最后一个矢量的箭尖所形成的矢量即合力，如图 1 - 9(b)所示。

按画图的比例测量得 R 值为 119N；用量角器测得 α 角为 37°。因此合力与 x 轴的正方向夹角为 $\theta=180°-37°=143°$。合力为 119N 偏 143°。

1.6 图 1 - 10(a)表示 5 个共面力作用于同一物体。求出它们的合力。

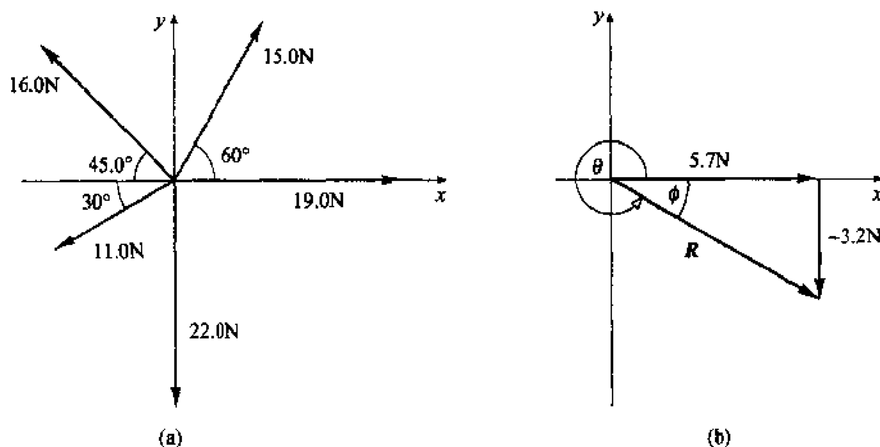


图 1 - 10

解 (1)先求出每个力的 x 分量和 y 分量，如下表：

力	x 分量	y 分量
19.0 N	19.0 N	0 N
15.0 N	(15.0 N)cos60.0°=7.50 N	(15.0 N)sin60.0°=13.0 N
16.0 N	−(16.0 N)cos45.0°=−11.3 N	(16.0 N)sin45.0°=11.3 N
11.0 N	−(11.0 N)cos30.0°=−9.53 N	−(11.0 N)sin30.0°=−5.50 N
22.0 N	0 N	−22.0 N

注意，正负号表示方向。

(2)合力 $\boldsymbol{R}$ 的分量为 $R_x=\sum F_x$ 和 $R_y=\sum F_y$，式中 $\sum F_x$ 表示所有力的 x 分量之和。

$R_x=19.0\text{N}+7.50\text{N}-11.3\text{N}-9.53\text{N}+0\text{N}=+5.7\text{N}$

$R_y=0\text{N}+13.0\text{N}+11.3\text{N}-5.50\text{N}-22.0\text{N}=-3.2\text{N}$

(3)合力大小为

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=6.5\text{N}$$

(4)最后画出合力，如图 1 - 10(b)所示，可得到

$$\tan\phi=\frac{3.2\text{N}}{5.7\text{N}}=0.56$$

所以 $\phi=29°$，$\theta=360°-29°=331°$，合力为 6.5N，偏角 331°(或 −29°)。或写成

$\boldsymbol{R}=6.5\text{N}$ 偏 331°(与 x 轴正向夹角)

1.7 用分量相加法解 1.5 题，答案要有两位有效数字。

解 各力及其分量如下表：

力	x 分量	y 分量
80 N	80 N	0
100 N	$(100\text{ N})\cos45°=71\text{ N}$	$(100\text{N})\sin45°=71\text{ N}$
110 N	$-(110\text{ N})\cos30°=-95\text{ N}$	$(110\text{N})\sin30°=55\text{ N}$
160 N	$-(160\text{ N})\cos20°=-150\text{ N}$	$-(160\text{N})\sin20°=-55\text{ N}$

注意各量的正负号。分量求和有

$$R_x=\sum F_x=80\text{N}+71\text{N}-95\text{N}-150\text{N}=-94\text{N}$$

$$R_y=\sum F_y=0+71\text{N}+55\text{N}-55\text{N}=71\text{N}$$

合力如图 1-11 所示，可得

$$R=\sqrt{(94\text{N})^2+(71\text{N})^2}=1.2\times10^2\text{N}$$

$\tan\alpha=(71\text{N})/(94\text{N})$，所以 $\alpha=37°$。合力为 118 N，偏角 $180°-37°=143°$，或记作

$\boldsymbol{R}=118\text{N}$ 偏 143°(与 x 正方向夹角)

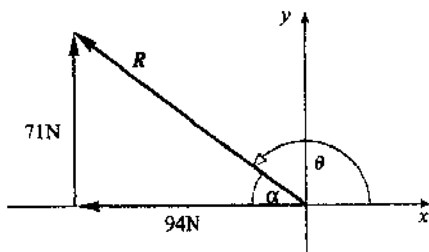


图 1-11

1.8 一个 100N 的力与 x 轴成 θ 角，且其 y 分量为 30N。试求该力的 x 分量以及角度 θ。注意 100N 的有效数字是 3，而 30N 有效数字是 2。

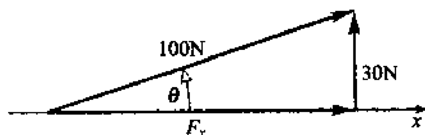


图 1-12

解 画草图如图 1-12。要求 F_x 和 θ。因为

$$\sin\theta=\frac{30\text{N}}{100\text{N}}=0.30$$

有 $\theta=17.46°$ 所以

$$F_x=(100\text{N})\cos17.46°=95\text{N}$$

按有效数字规则，$\theta=17°$。

1.9 一儿童以 60N 的力拉雪橇上的绳子，绳子与地面成 40°角。(a)试求有沿地面拉动雪橇趋向的力的有效值和(b)有竖直向上提升趋势的力。

解 如图 1-13 所示，两个分力分别为 39N 和 46N。(a)水平方向拉力为 46N；(b)竖直方向提升力为 39N。

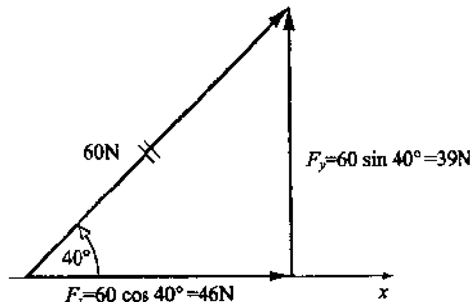


图 1-13

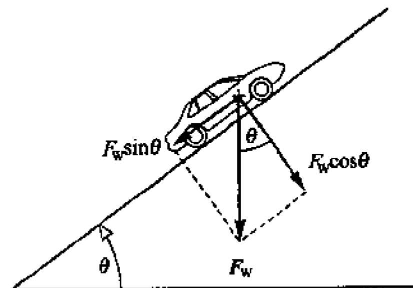


图 1-14

1.10 在与水平方向成 θ 角的坡道上有一辆重量为 F_W 的汽车，坡道必须能耐受多大的压力才不致被这车压坏？

解 如图 1-14 所示，重力 $\boldsymbol{F}_W$ 竖直向下。我们沿坡面和垂直坡面的方向分解 $\boldsymbol{F}_W$。可得坡面必须能耐受 $F_W\cos\theta$ 的力才不致被压坏。

1.11 用$\boldsymbol{R}=R_x\hat{\boldsymbol{i}}+R_y\hat{\boldsymbol{j}}+R_z\hat{\boldsymbol{k}}$ 的形式表示图 1-7(c)、图 1-10(b)、图 1-11 和图 1-13 中的力(略去单位)。注意用正负号表明力的方向。

解 对于图 1-7(c)，有 $\boldsymbol{R}=-0.88\hat{i}+4.48\hat{j}$

对于图 1-10(c)，有 $\boldsymbol{R}=5.7\hat{i}-3.2\hat{j}$

对于图 1-11，有 $\boldsymbol{R}=-94\hat{i}+71\hat{j}$

对于图 1-13，有 $\boldsymbol{R}=46\hat{i}+39\hat{j}$

1.12 作用于同一质点的三个力分别为 $\boldsymbol{F}_1=(20\hat{i}-36\hat{j}+73\hat{k})$N，$\boldsymbol{F}_2=(-17\hat{i}+21\hat{j}-46\hat{k})$N，$\boldsymbol{F}_3=(-12\hat{k})$N。求合力矢量(2 位有效数字)。

解 合力的各分量为

$$R_x=\sum F_x=20\text{N}-17\text{N}+0\text{N}=3\text{N}$$

$$R_y=\sum F_y=-36\text{N}+21\text{N}+0\text{N}=-15\text{N}$$

$$R_z=\sum F_z=73\text{N}-46\text{N}-12\text{N}=15\text{N}$$

由于 $\boldsymbol{R}=R_x\hat{i}+R_y\hat{j}+R_z\hat{k}$，我们得到

$$\boldsymbol{R}=3\hat{i}-15\hat{j}+15\hat{k}$$

由三维的毕达哥拉斯定理得到

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=\sqrt{459}=21\text{N}$$

1.13 矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如图 1-15 所示。用作图法完成下列运算：(a)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(b)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$；(c)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$；(d)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$。

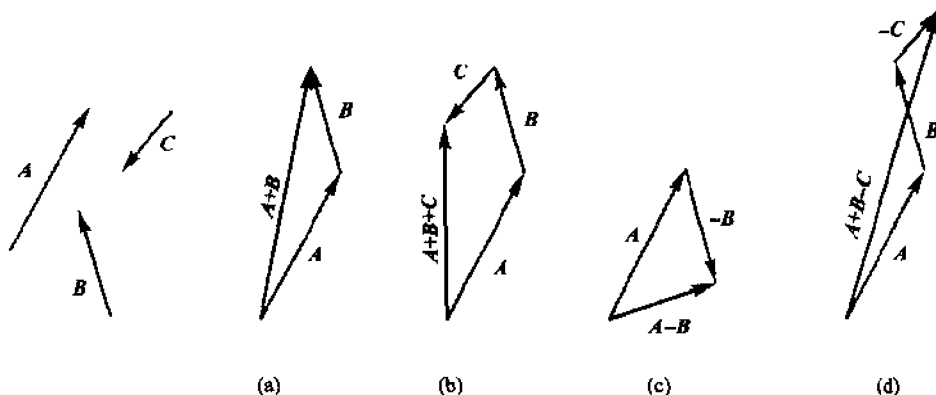


图 1-15

解 图解见图 1-15(a)到(d)。在(c)中，先将 $\boldsymbol{B}$ 反转方向再与 $\boldsymbol{A}$ 相加。同样，在(d)中 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+(-\boldsymbol{C})$，$(-\boldsymbol{C})$与 $\boldsymbol{C}$ 具有相同的大小，但方向相反。

1.14 已知矢量 $\boldsymbol{A}=-12\hat{i}+25\hat{j}+13\hat{k}$，$\boldsymbol{B}=-3\hat{j}+7\hat{k}$。求 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$。

解

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=(-3\hat{i}+7\hat{k})-(-12\hat{i}+25\hat{j}+13\hat{k})$$

$$=-3\hat{j}+7\hat{k}+12\hat{i}-25\hat{j}-13\hat{k}=12\hat{i}-28\hat{j}-6\hat{k}$$

注意到 $12\hat{i}-25\hat{j}-13\hat{k}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 反向，然后再与 $\boldsymbol{B}$ 相加。

1.15 一船在静水中行驶速度为 8km/h。在河流中它相对于水的速度也是 8km/h。试求船在(a)逆流和(b)顺流情况下，相对于河岸上一棵树的速度，水流速为 3km/h。

解 (a)由题意，逆流时水流方向与船行方向相反。所以船对岸上树的速度为 8km/h−3km/h=5km/h。

(b)顺流时水流方向与船行方向相同。所以船相对树的速度为 8km/h+3km/h=11km/h。

1.16 飞机以相对于空气的速率 500km/h 向东飞。若北风的速度为 30km/h，求飞机相对地面的速率和方向。

解 飞机的合速度为两个矢量之和：500km/h 东和 30km/h 南（如图 1-16）。合速度为

$$R=\sqrt{(500\text{km/h})^2+(30\text{km/h})^2}=508\text{km/h}$$

$$\tan\alpha=\frac{90\text{km/h}}{500\text{km/h}}=0.18$$

所以 $\alpha=10°$。飞机对于地面的速度为 508km/h，方向东偏南 10°。

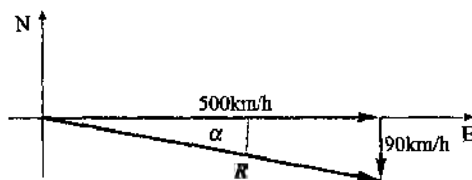


图 1-16

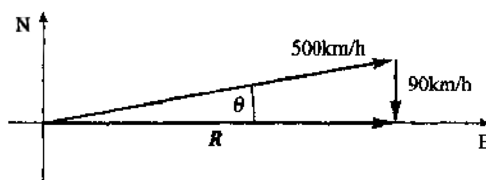


图 1-17

1.17 在上题中，如果要飞机相对地面总是朝东，它应朝什么方向飞？

解 飞机相对地面的速度是飞机相对于空气的速度和风速的合速度，如图 1-17 所示。按题意，合速度朝东。由 $\sin\theta=(90\text{km/h})/(500\text{km/h})$，得 $\theta=10°$，这里只保留两位有效数字。所以，若要飞机向对地面总是朝东飞，它应朝东偏北 10°飞行。

由图知，飞机朝东飞的速度为 $R=(500\text{km/h})\cos10°=4.9\times10^5\text{m/h}$。

习　题

1.18 汽车从市中心出发朝东行驶了 80.0km，然后又朝南行驶了 192km。求停车点到市中心的位移。

（答　208km 东偏南 67.4°）

1.19 一小乌龟放在大方格纸的中心。每格都是 1.0cm。它爬了一会儿停在了(24,10)位置，即沿 x 方向走了 24 格，y 方向走了 10 格。求它的位移。

（答　26cm x 方向偏上 23°）

1.20 一小虫从 A 点开始，朝东爬了 8.0cm，又朝南爬 5.0cm，朝西爬 3.0cm，最后朝北爬了 4.0cm 到达 B。(a)求 B 在 A 东侧和北侧各多远？(b)分别用作图法和代数法求出小虫从 A 点到 B 点的位移。

（答　(a)5.0cm-东，1.0cm-北；(b)5.10cm-东偏南 11.3°）

1.21 求在 xy 平面中的下列位移的 x 分量和 y 分量：(a)300cm，偏 127°和(b)500cm，偏 220°。

（答　(a)−180cm，240cm；(b)−383cm，−321cm）

1.22 两个力作用于同一点，求合力。这两个力分别是 100N，偏 170.0°和 100N，偏 50.0°。

（答　100N，偏 110°）

1.23 从 xy 平面的原点开始做下列位移：

60mm 沿 $+y$ 方向，30mm 沿 $-x$ 方向，40mm 偏 150°和 50mm 偏 240°。用作图法和代数法求合位移。

（答　97mm 偏 158°）

1.24 用代数法求下列共面力的合力：100N 偏 30°，141.4N 偏 45°以及 100N 偏 240°。

（答　0.15kN 偏 25°）

1.25 用代数法求下列平面位移的合位移：

20.0m 偏 30.0°，40.0m 偏 120.0°，25.0m 偏 180.0°，42.0m 偏 270.0°和 12.0m 偏 315.0°，并用作图法核对你的答案。

（答　20.1m 偏 197°）

1.26 大小为 80N 和 100N、夹角为 60°的两个力拉同一物体。(a)用一个什么样的力可以代替这两个力？(b)什么样的力可以与这两个力平衡（这个力称为平衡力）？请用代数法求解。

（答　(a)$\boldsymbol{R}$：0.16N，与 80N 的力夹角为 34°；(b)$-\boldsymbol{R}$：0.16N，与 80N 的力夹角 214°）

1.27 用代数法求下面三个共面力的(a)合力，(b)平衡力：300N 偏 0°，400N 偏 30°和 400N 偏 150°。

（答　(a)0.50kN 偏 53°；(b)0.50kN 偏 233°）

1.28 一个位移的 x 分量为 450m，偏角为 70°，试求它的大小及其 y 分量。

（答　1.3km，1.2km）

1.29 一个沿 x 正方向 50cm 的位移要加一个什么样的位移才能得到 80cm 偏 25°的合位移？

（答　45cm 偏 53°）

1.30 参见图 1-18，请用矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来表示(a)$\boldsymbol{P}$，(b)$\boldsymbol{R}$，(c)$\boldsymbol{S}$ 以及(d)$\boldsymbol{Q}$。

（答　(a)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$；(b)$\boldsymbol{B}$；(c)$-\boldsymbol{A}$；(d)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$）

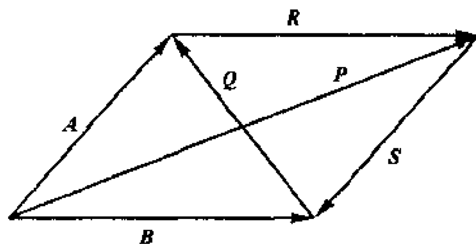


图 1-18

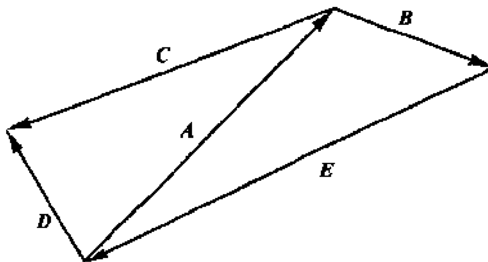


图 1-19

1.31 参见图 1-19，请用矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来表示(a)$\boldsymbol{E}$，(b)$\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}$，(c)$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}$。

（答　(a)$-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 或$-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$；(b)$\boldsymbol{A}$；(c)$-\boldsymbol{B}$）

1.32 一小孩拉着一小车的车把使其不致沿斜坡下滑。若斜面坡度为 20°，小车重量 150N，且车把与斜面平行。问小孩要施加多大的力？

（答　51N）

1.33 如果上题中小车的车把向上偏离斜面 30°，又如何？

（答　59N）

1.34 已知 $\boldsymbol{A}=7\hat{i}-6\hat{j}$，$\boldsymbol{B}=-3\hat{i}+12\hat{j}$，$\boldsymbol{C}=4\hat{i}-4\hat{j}$，求(a)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，(b)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，(c)$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$。

（答　(a)$8\hat{i}+2\hat{j}$；(b)$10\hat{i}-18\hat{j}$；(c)$3\hat{i}-2\hat{j}$）

1.35 已知 $\boldsymbol{R}=7.0\hat{i}-12\hat{j}$，求它的大小和偏角。

（答　14 偏 −60°）

1.36 在位移$(25\hat{i}-16\hat{j})$m 上要加一个什么样的位移才能得到 7.0m、指向$+x$ 方向的位移？

（答　$(-18\hat{i}+16\hat{j})$m）

1.37 力$(15\hat{i}-16\hat{j}+27\hat{k})$N 加上力$(23\hat{j}-40\hat{k})$N。求合力的大小。

（答　21N）

1.38 卡车以 70km/h 的速率朝北行驶。驾驶室上方的排气管排出的烟气飘向南偏东 20°。若风直朝东吹，求此时风速。

（答　25km/h）

1.39 甲船向东行驶，速率为 10km/h，乙船朝北偏东 30°方向行驶。若乙船始终在甲船的正北方，乙船速率多少？

（答　20km/h）

1.40 一条螺旋桨驱动的船在静水中速率为 50m/s，要横渡 60m 宽的河流，水流速为 0.30m/s。试求(a)船头与横渡方向成多大角度，(b)渡河需多长时间。

（答　(a)偏上游方向 37°；(b)1.5×10^2s）

1.41 飞机以 500km/h 速率朝东飞行。机上一醉汉摆弄枪支，不小心走火，子弹以 1000km/h 的速度垂直射向机舱顶部。从地面上看，子弹与竖直线成多大角度？

（答　26.6°）

第二章 匀加速运动

速率

速率是标量。如果物体在时间 t 内走过的距离为 l，则有

$$平均速率=\frac{走过的距离}{时间}$$

即

$$v_{av}=\frac{l}{t}$$

这里的距离是行进的全长，汽车的里程表就反映这种距离。

速度

速度是矢量。物体在时间 t 内位移矢量为 $\boldsymbol{s}$，则有

$$平均速度=\frac{位移矢量}{时间}$$

$$\boldsymbol{v}_{av}=\frac{\boldsymbol{s}}{t}$$

速度矢量的方向与位移矢量相同。速度和速率的单位为距离除以时间，如 m/s 或 km/h。

加速度

加速度是速度随时间的变化率的度量

$$平均加速度=\frac{速度矢量的变化}{发生这种变化所花的时间}$$

$$\boldsymbol{a}_{av}=\frac{\boldsymbol{v}_f-\boldsymbol{v}_i}{t}$$

这时 $\boldsymbol{v}_i$ 是初速度，$\boldsymbol{v}_f$ 是末速度。加速度的单位是速度除以时间，比较典型的单位如(m/s)/s(或 m/s^2)以及(km/h)/s(或 km/h・s)。注意，加速度是矢量，它的方向是速度变化的方向 $\boldsymbol{v}_f-\boldsymbol{v}_i$。然而在不产生歧见的情况下，人们常把加速度的大小也说成加速度。

匀加速直线运动

匀加速直线运动是一种重要的运动形式。这时，加速度是常矢量，其方向沿着位移矢量的方向。因此 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的方向可以用正负号表示。我们用 s 表示位移(沿正方向为正号，沿反方向则为负号)，通过以下 5 个方程式就可以描述匀加速直线运动。

$$s=v_{av}t$$

$$v_{av}=\frac{v_f+v_i}{2}$$

$$a=\frac{v_f-v_i}{t}$$

$$v_f^2=v_i^2+2as$$

$$s=v_it+\frac{1}{2}at^2$$

有时用 x 和 y 取代式中的 s，用 v 和 v_0 代替 v_f 和 v_i。

方向

在分析沿着一条线的运动时，必须选择一个正方向。选择是任意的，但一旦选定，则与此

方向相反的位移、速度、加速度就必须冠以负号。

瞬时速度

瞬时速度是时间间隔趋于零时平均速度的极限值。物体在时间 Δt 内位移为 $\Delta \boldsymbol{s}$，则它的瞬时速度为

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{s}}{\Delta t}$$

瞬时速度概念意味着时间间隔 Δt 趋于零时 $\Delta \boldsymbol{s}/\Delta t$ 的比值。

作图法

沿直线(x 轴)运动的作图法说明如下：

• 物体在某时刻的瞬时速度是位移-时间曲线在那一时刻的斜率值，它可能是正的、负的或者为零；

• 物体在某时刻的瞬时加速度是速度-时间曲线在那一时刻的斜率值；

• 匀速运动的 x-t 曲线是一条直线；匀加速运动的 v-t 曲线是一条直线；

• 一般而言，扩展到二维、三维情况，在某时刻的速度就等于位移-时间曲线在该时刻的斜率。

重力加速度(g)

如果物体只受重力作用，它的运动加速度叫做重力加速度，或自由落体加速度，其方向竖直向下，记作 g。在地球上，$g=9.81\text{m/s}^2$(或 32.2ft/s^2)，但不同地区，g 值略有不同。在月球表面，自由落体加速度为 1.6m/s^2。

速度分量

假设物体的运动速度$\boldsymbol{v}$与 x 轴成θ角(如向空中抛球的情况)，速度的 x 分矢量和 y 分矢量为$\boldsymbol{v}_x$ 和$\boldsymbol{v}_y$(见图 1－4)。速度的标量为

$$v_x=v\cos\theta \quad 和 \quad v_y=v\sin\theta$$

式中 v_x 和 v_y 的正负号取决于θ值。按规定，$\boldsymbol{v}$ 在第一象限，$v_x>0$，$v_y>0$；$\boldsymbol{v}$ 在第二象限，$v_x<0$，$v_y>0$；$\boldsymbol{v}$ 在第三象限，$v_x<0$，$v_y<0$；$\boldsymbol{v}$ 在第四象限，$v_x>0$，$v_y<0$。它们的正负号就确定了物体运动沿坐标轴的方向。所以也经常把它们叫做速度，很多教科书中都有这种说法。然而这容易导致概念的混淆，在本书中速度只表明矢量(书写时在黑体字上加箭头)且明确地标明它的方向。如，物体的运动速度 $\boldsymbol{v}=100\text{m/s}$(朝西)，则其沿 x 轴方向的分量标量为 $v_x=-100\text{m/s}$；而其速率(永远是正值)为 $v=100\text{m/s}$。

抛体运动

若忽略空气的摩擦力，抛体运动便很容易解。我们只需把抛体运动当成由两个独立运动组成的：即 $a=0$，$v_f=v_i=v_{av}$(即常速率)的水平运动和 $a=g=9.81\text{m/s}^2$ 的竖直向下的运动。

例　　题

2.1　将速率 0.200cm/s 改成以 km/y(即千米/年)为单位。

解答　$$0.200\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}=\left(0.200\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)\left(10^{-5}\,\frac{\text{km}}{\text{cm}}\right)\left(3600\,\frac{\text{s}}{\text{h}}\right)\left(24\,\frac{\text{h}}{\text{d}}\right)\left(365\,\frac{\text{d}}{\text{y}}\right)=63.1\,\frac{\text{km}}{\text{y}}$$

2.2　某人用 25s 跑完一圈 200m 长的跑道。求(a)他的平均速率和(b)平均速度。

解 (a)由定义

$$平均速率=\frac{走过的距离}{时间}=\frac{200\text{m}}{25\text{s}}=8.0\text{m/s}$$

(b)由于运动员跑了一圈，又回到了起点，所以位移为零，即 $s=0$，所以

$$|\boldsymbol{v}_{av}|=\frac{0\text{m}}{25\text{s}}=0\text{m/s}$$

2.3 一物体从静止开始沿一条直线做匀加速运动，$a=8.00\text{m/s}^2$。求(a)在5.00s末的瞬时速率，(b)在5s时间内的平均速率和(c)在5.00s内所走过的距离。

解 我们研究5.00s内的运动。把运动方向作为 x 轴的正方向(即 $s=x$)。因为 $v_i=0, t=5.00\text{s}$，$a=8.00\text{m/s}^2$。应用匀加速运动的5个方程式，有

(a) $$v_{fx}=v_{ix}+at=0+(8.00\text{m/s}^2)(5.00\text{s})=40.0\text{m/s}$$

(b) $$v_{av}=\frac{v_{ix}+v_{fx}}{2}=\frac{0+40.0}{2}\text{m/s}=20.0\text{m/s}$$

(c) $$x=v_{ix}t+\frac{1}{2}at^2=0+\frac{1}{2}(8.00\text{m/s}^2)(5.00\text{s})^2=100\text{m}$$

$$x=v_{av}t=(20.0\text{m/s})(5.00\text{s})=100\text{m}$$

2.4 一卡车在20s时间内匀均地把速率从15km/h提高到60km/h。试求(a)平均速率(b)加速度和(c)走过的距离。都要以米和秒作单位。

解 令运动方向为 x 正向，先进行单位换算，然后根据公式求出各量如下：

$$v_{ix}=\left(15\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(1000\ \frac{\text{m}}{\text{km}}\right)\left(\frac{1}{3600}\ \frac{\text{h}}{\text{s}}\right)=4.17\text{m/s}$$

$$v_{fx}=60\text{km/h}=16.7\text{m/s}$$

(a) $$v_{av}=\frac{1}{2}(v_{ix}+v_{fx})=\frac{1}{2}(4.17+16.7)\text{m/s}=10\text{m/s}$$

(b) $$a=\frac{v_{fx}-v_{ix}}{t}=\frac{(16.7-4.17)\text{m/s}}{20\text{s}}=0.63\text{m/s}^2$$

(c) $$x=v_{av}t=(10.4\text{m/s})(20\text{s})=208\text{m}=0.21\text{km}$$

2.5 汽车沿直线行驶，其里程表读数对时间的关系如图2-1所示。求汽车在 A 点和 B 点的瞬时速率。它的平均速率和加速度各是多少？

解 由于速率是切线的斜率 $\Delta x/\Delta t$，所以我们在 A 点作曲线的切线。而图中的直线本身就是这一切线。从 A 点处的斜率得到

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{4.0\text{m}}{8.0\text{s}}=0.50\text{m/s}$$

这也是 B 点以及线上任何点的速率，因此得出 $a=0$，平均速率也即

$$v_x=0.50\text{m/s}=v_{av}。$$

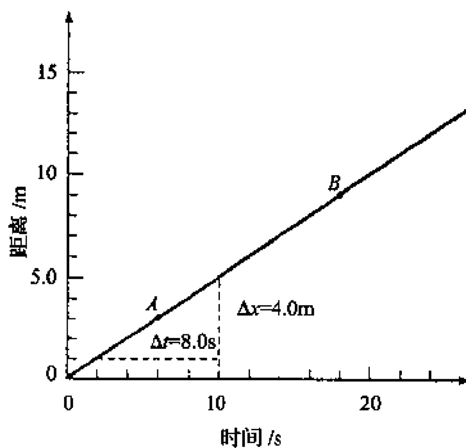


图2-1

2.6 物体沿 x 轴的一维运动如图2-2所示。试描述其运动情况。

解 物体在任一时刻的速度都等于其位移-时间曲线在那一刻的斜率。由于这物体从 $t=0$ 到 $t=2.0\text{s}$ 这段时间内曲线斜率为零，所以说它在这段时间内是静止不动的。在 $t=2.0\text{s}$ 时刻，物体开始运动，曲线的斜率是正值且为常数，说明物体沿 x 正方向作匀速率运动。从 $t=2.0\text{s}$ 到 $t=4.0\text{s}$，有

$$v_{av}=\frac{x_f-x_i}{t_f-t_i}=\frac{3.0\text{m}-0\text{m}}{4.0\text{s}-2.0\text{s}}=\frac{3.0\text{m}}{2.0\text{s}}=1.5\text{m/s}$$

其平均速度 $\boldsymbol{v}_{av}=1.5\text{m/s}$ 朝 x 正向。

从 $t=4.0\text{s}$ 到 $t=6.0\text{s}$，物体静止，曲线斜率为零，坐标 x 值保持不变。

从 $t=6.0\text{s}$ 到 $t=10\text{s}$ 以及以后，物体朝 $-x$ 的方向运动，曲线斜率为负值。由

$$v_{av}=\frac{x_f-x_i}{t_f-t_i}=\frac{-2.0\text{m}-3.0\text{m}}{10.0\text{s}-6.0\text{s}}=\frac{-5.0\text{m}}{4.0\text{s}}=-1.3\text{m/s}$$

得平均速度为　　$\boldsymbol{v}_{av}=103\text{m/s}$　朝 $-x$ 方向

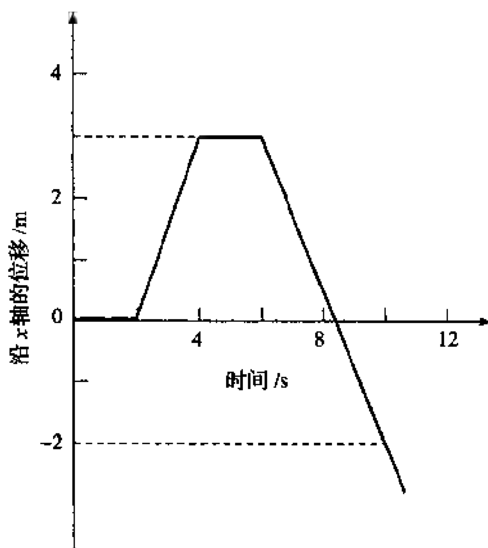


图 2-2

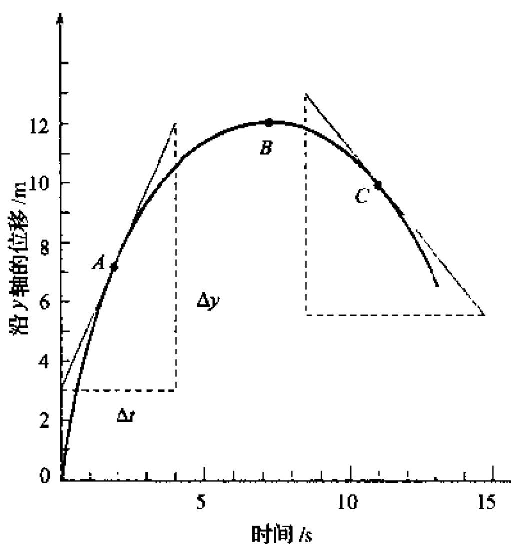


图 2-3

2.7 物体竖直运动如图 2-3 所示。试定性描述其运动状况，并求出物体在 A 点、B 点和 C 点时的瞬时速度。

解 记住，物体的瞬时速度由这曲线的斜率给出。我们可以看出在 $t=0$ 时刻，物体的运动速率最快。随着物体上升，运动减慢，在 B 点，物体停止了（斜率为零）。然后它开始下降，且运动速率越来越快。在 A 点有

$$v_A=\text{斜率}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{12.0\text{m}-3.0\text{m}}{4.0\text{s}-0\text{s}}=\frac{9.0\text{m}}{4.0\text{s}}=2.3\text{m/s}$$

在 A 点速度是正的，即运动朝 y 正向：$\boldsymbol{v}_A=2.3\text{m/s}$ 朝上。在 B 点和 C 点有

$$\boldsymbol{v}_B=\text{斜率}=0\text{m/s}$$

$$\boldsymbol{v}_C=\text{斜率}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{5.5\text{m}-13.0\text{m}}{15.0\text{s}-8.5\text{s}}=\frac{-7.5\text{m}}{6.5\text{s}}=-1.2\text{m/s}$$

在 C 点速度为负，是朝 $-y$ 方向运动：$\boldsymbol{v}_C=1.2\text{m/s}$ 朝下。注意，速度是矢量，必须标明其方向。

2.8 一球从 50m 高处落下，初速度为零。(a)在它到达地面瞬间速率为多少？(b)花多长时间到达地面？

解 如果忽略空气阻力，球下落是匀加速运动，重力加速度向下，取值 9.81 m/s²。以向下为正方向，有

$$y=50.0\text{m}\qquad a=9.81\text{m/s}^2\qquad v_i=0$$

(a)　$v_{fy}^2=v_{iy}^2+2ay=0+2(9.81\text{m/s}^2)(50.0\text{m})=981\text{m}^2/\text{s}^2$

因此 $v_f=31.3\text{m/s}$

(b)由 $a=(v_{fy}-v_{iy})/t$，

$$t=\frac{v_{fy}-v_{iy}}{a}=\frac{(31.3-0)\text{m/s}}{9.81\text{m/s}^2}=3.19\text{s}$$

（如果以向上为正方向，计算有什么不同？）

2.9 一滑雪者从静止出发，在 3.0s 内沿坡下滑了 9.0m。假设加速度是常数，需多长时间，滑雪速度可达到 24m/s？

解 我们必须从他 3.0s 内的运动数据中求出其加速度。取运动方向为 x 正向，有 $t=3.0\text{s}$，$v_{ix}=0$，$x=9.0\text{m}$。由 $x=v_{ix}t+\frac{1}{2}at^2$，有

$$a=\frac{2x}{t^2}=\frac{18\text{m}}{(3.0\text{s})^2}=2.0\text{m/s}^2$$

将 a 值应用于更长的滑行，即从静止到速率等于 24m/s 的这段路程。$v_{ix}=0, v_{fx}=24\text{m/s}, a=2.0\text{m/s}^2$，由 $v_f=v_i+at$，

$$t=\frac{v_{fx}-v_{ix}}{a}=\frac{24\text{m/s}}{2.0\ \text{m/s}^2}=12\text{s}$$

2.10 一辆速率为 20m/s 的汽车开始以 3m/s 的常量减速。试求从开始减速到停止，它能走多远。

解答　取运动方向为 x 正向。对本题，$v_i=20\text{m/s}, v_f=0, a=3\text{m/s}^2$。注意，汽车在正方向作减速运动，因此其加速度为负值。

由
$$v_{fx}^2=v_{ix}^2+2ax$$
得到
$$x=\frac{-(20\text{m/s})^2}{2(-3.0\text{m/s}^2)}=67\text{m}$$

2.11 以 30m/s 速率运动的汽车均匀减速，在 5.0s 内减速到 10m/s。试求(a)加速度和(b)汽车在第 3 秒钟内走过的距离。

解答　取运动的方向为 x 的正向。

(a)在 5.0s 间隔内，我们有 $t=5.0\text{m/s}$，

$v_{ix}=30\text{m/s}, v_f=10\text{m/s}$。按

$v_{fx}=v_{ix}+at$ 有

$$a=\frac{(10-30)\text{m/s}}{5.0\text{s}}=-4.0\text{m/s}^2$$

(b)x=(3 秒钟内走过的距离)−(2 秒钟走过的距离)

$$x=(v_{ix}t_3+\frac{1}{2}at_3^2)-(v_{ix}t_2+\frac{1}{2}at_2^2)$$

$$x=v_{ix}(t_3-t_2)+\frac{1}{2}a(t_3^2-t_2^2)$$

代入 $v_{ix}=30\text{m/s}, a=-4.0\text{m/s}^2, t_2=2.0\text{s}, t_3=3.0\text{s}$ 得到

$$x=(30\text{m/s})(1.0\text{s})-(2.0\text{m/s}^2)(5.0\text{s}^2)=2.0\text{m}$$

2.12 列车均匀减速，在 90m 过程中速率从 15m/s 减小到 7.0m/s。(a)求加速度值，(b)假设是匀减速运动，它还将行驶多长距离才会停止？

解答　取列车前进方向为 x 正向。

(a)由题意，$v_{ix}=15\text{m/s}, v_{fx}=7.0\text{m/s}, x=90\text{m}$。由 $v_{fx}^2=v_{ix}^2+2ax$ 有

$$a=-0.98\text{m/s}^2$$

(b)对于这种情况，$v_{ix}=7.0\text{m/s}, v_{fx}=0$。有

$$v_{fx}^2=v_{ix}^2+2ax$$

$$x=\frac{0-(7.0\text{m/s})^2}{-1.96\text{m/s}^2}=25\text{m}$$

2.13 竖直上抛一石块。问若能达到 20m 高，上抛的速率应是多少？

解答　取向上方向为 y 正向。石块在最高处速率为零，即 $v_{fy}=0, y=20\text{m}, a=-9.81\text{m/s}^2$(负号表示方向向下，与我们选取的 y 轴反向)。由 $v_{fy}^2=v_{iy}^2+2ay$ 有

$$v_{iy}=\sqrt{-2(-9.81\text{m/s}^2)(20\text{m})}=20\text{m/s}$$

2.14 以初速率 20m/s 竖直上抛一石块。在它下落到距抛出点 5.0m 处被接住。(a)求石块被接住时的速率和(b)到此刻石块在空中经历了多长时间？

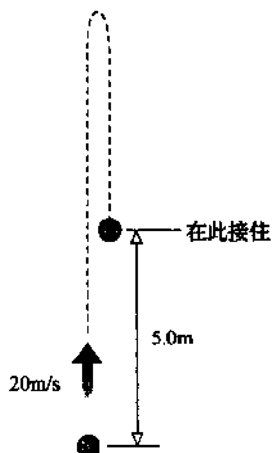


图 2-4

解答　取向上为正方向，石块运动示意如图 2-4。由题意，$v_{iy}=20\text{m/s}, y=+5.0\text{m}$(注意 y 为向上的位移)，$a=-9.81\text{m/s}^2$。

(a)由 $v_{fy}^2=v_{iy}^2+2ay$　有

$$v_{fy}^2=(20\text{m/s})^2+2(-9.81\text{m/s}^2)(5.0\text{m})=302\text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_{fy}=\pm\sqrt{302\text{m}^2/\text{s}^2}=-17\text{m/s}$$

我们取负号是因为石块下落，与 y 轴反向。

(b)因 $a=(v_{fy}-v_{iy})/t$　有

$$t=\frac{(-17.4-20)\text{m/s}}{-9.81\text{m/s}^2}=3.8\text{s}$$

注意，v_{fy} 仍取负号。

2.15 在月球表面竖直上抛一小球，4.0s 后又落到抛出点。月球重力加速度为 1.60m/s^2。求上抛速率。

解☞ 取向上为正向。由于石块最终落到原地，位移 $y=0$。应用 $y=v_{iy}t+\frac{1}{2}at^2$，注意 $a=-1.60\text{m/s}^2$，代入 $t=4.0\text{s}$ 有

$$0=v_{iy}(4.0\text{s})+\frac{1}{2}(-1.60\text{m/s}^2)(4.0\text{s})^2$$

计算得 $v_{iy}=3.2\text{m/s}$。

2.16 在月球表面竖直上抛一棒球，初速率为 35m/s。求(a)球上升的最大高度，(b)达最高处花多长时间，(c)抛出 30s 时刻的速度和(d)球达到 100m 时所花的时间。

解☞ 取向上为正向。在达到最高点时，球速为零。

(a)由 $v_{fy}^2=v_{iy}^2+2ay$，且 $a=-1.60\text{m/s}^2$。所以

$$0=(35\text{m/s})^2+2(-1.60\text{m/s}^2)y \text{ 得 } y=0.38\text{km}$$

(b)由 $v_{fy}=v_{iy}+at$，得到

$$0=35\text{m/s}+(-1.60\text{m/s}^2)t\text{，有 } t=22\text{s}。$$

(c)同样由上式得到 $v_{fy}=35\text{m/s}+(-1.60\text{m/s}^2)(30\text{s})$，得 $v_{fy}=-13\text{m/s}$ 由于 v_f 是负值，其方向与我们假定的正向相反，所以方向向下。在 $t=30\text{s}$ 时刻，球正在下降。

(d)由于 $y=v_{iy}t+\frac{1}{2}at^2$，有

$$100\text{m}=(35\text{m/s})t+\frac{1}{2}(-1.60\text{m/s}^2)t^2 \quad \text{或} \quad 0.80t^2-35t+100=0$$

由二次方程公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

得到 $t=3.1\text{s}$ 和 $t=41\text{s}$。在 $t=3.1\text{s}$ 时刻，球在 100m 高处正在上升；而在 $t=41\text{s}$ 时刻，高度相同，球在下降。

2.17 气球升至距地面 300m 处时的上升速率为 13m/s。这时抛下沙袋。求(a)沙袋能上升到多高，(b)沙袋抛出 5.0s 时的位置和速度，(c)沙袋落地的时间。

解☞ 沙袋刚离开气球时的初速度与气球相同，为向上 13m/s。取向上为 y 轴正向，并令抛出时坐标为零：$y=0$。

(a)沙袋到最高点时速率为零，$v_f=0$。由

$v_{fy}^2=v_{iy}^2+2ay$，有

$$0=(13\text{m/s})^2+2(-9.81\text{m/s}^2)y \quad \text{或} \quad y=8.6\text{m}$$

最高处距地面高度为 300+8.6=308.6(m)或 0.31km。

(b)要计算在 $t=5.0\text{s}$ 时刻的位置，由 $y=v_{iy}t+\frac{1}{2}at^2$　得

$$y=(13\text{m/s})(5.0\text{s})+\frac{1}{2}(-9.81\text{m/s}^2)(5.0\text{s})^2$$

$$=-57.5\text{m 或 }-58\text{m}$$

所以它距地面的高度为 300−58=242(m)。

由 $v_{fy}=v_{iy}+at$，有

$$v_{fy}=13\text{m/s}+(-9.81\text{m/s}^2)(5.0\text{s})=-36\text{m/s}$$

沙袋下降过程中，速度为 35m/s，向下。

(c)沙袋到达地面时，位移为−300m。所以 $y=v_{iy}t+\frac{1}{2}at^2$ 代入数据成为

$$-300\text{m}=(13\text{m/s})t+\frac{1}{2}(-9.81\text{m/s}^2)t^2$$

或 $4.90t^2-13t-300=0$

方程的解分别为 $t=9.3$s 和 −6.6s。取正值才有物理意义：9.3s 合乎要求。

我们可以先计算 v_f 以避免解二次方程：

由 $v_{fy}^2=v_{iy}^2+2as$　或

$$v_{fy}^2=(13\text{m/s})^2+2(-9.81\text{m/s}^2)(-300\text{m})$$

所以 $v_{fy}=\pm 77.8$m/s。取其负值(为什么?)代入 $v_{fy}=v_{iy}+at$　得到 $t=9.3$s。和上述解相同。

2.18　如图 2-5，在 80m 高的山崖顶平抛物体，初速率为 30m/s。求(a)经过多长时间物体到达崖底？(b)落地点距崖底水平距离多少？(c)落地时速度如何？

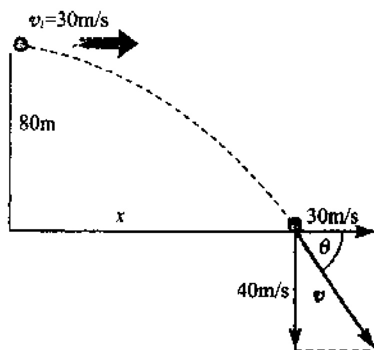


图 2-5

解　(a)物体的竖直运动和水平运动是相互独立的，先考察竖直运动。取向上为 y 正方向，在崖顶处 $y=0$，由

$$y=v_{iy}t+\frac{1}{2}a_yt^2$$

$$-80\text{m}=0+\frac{1}{2}(-9.81\text{m/s}^2)t^2$$

解得 $t=4.04\text{s}=4.0\text{s}$。注意，式中竖直方向初速度为零 $v_i=0$。

(b)再考察水平运动。$a=0, v_x=v_{ix}=v_{fx}=30$m/s。利用(a)中 t 值，得到

$$x=v_xt=(30\text{m/s})(4.0\text{s})=121\text{m} \text{ 或 } 0.12\text{km}$$

(c)末速度的水平分量为 30m/s。在 $t=4.04$s 时刻，其垂直分量由 $v_{fy}=v_{iy}+a_yt$ 得到

$$v_{fy}=0+(-9.8\text{m/s}^2)(4.04\text{s})=-40\text{m/s}$$

两个分量合成得到图中 $\boldsymbol{v}$ 所表示的末速度

$$v=\sqrt{(40\text{m/s})^2+(30\text{m/s})^2}=50\text{m/s}$$

角度 θ 由 $\tan\theta=40/30$ 求得 $\theta=53°$。所以末速度 $\boldsymbol{v}=50$m/s x 轴偏下 53°。

2.19　飞机以 15m/s 的速度沿地面飞行，高度为 100m，如图 2-6。为向水平距离为 x 的目标投下物体，必须提前多少距离？

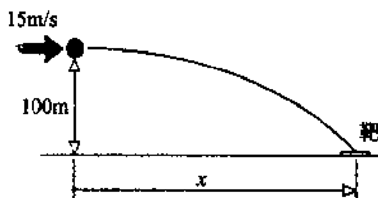


图 2-6

解　解题方法同 2.18 题。由 $y=v_{iy}t+\frac{1}{2}at^2$，有

$$-100\text{m}=0+\frac{1}{2}(-9.81\text{m/s}^2)t^2 \quad \text{或} \quad t=4.52\text{s}$$

所以　$x=v_xt=(15\text{m/s})(4.52\text{s})=67.8\text{m}$ 或 68m。

2.20　一棒球以 100m/s 的初速度抛出，与地面夹角 30.0°，如图 2-7 所示。它能抛多远？

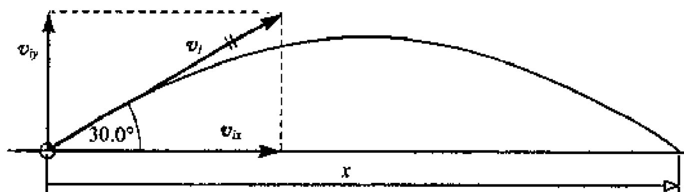


图 2-7

解 取向上为 y 轴正向，把运动分解成水平和竖直两个分量。有

$v_{ix}=v_i\cos30.0°=86.6\text{m/s}$ 和 $v_{iy}=v_i\sin30.0°=50.0\text{m/s}$

在竖直方向，当球落地时 $y=0$，则

$y=v_{iy}t+\frac{1}{2}a_yt^2$ 或 $0=(50.0\text{m/s})+\frac{1}{2}(-9.81)t$

得 $t=10.2\text{s}$。

在水平方向有 $v_{ix}=v_{fx}=v=86.6\text{m/s}$。所以

$$x=v_xt=(86.6\text{m/s})(10.2\text{s})=884\text{m}。$$

2.21 如图 2-8，从一个房顶向斜上方投球，斜角为 40°，初速为 20m/s。50m 以外有一座高大建筑物。球击到对面墙时，落点比投掷点高(或低)多少？

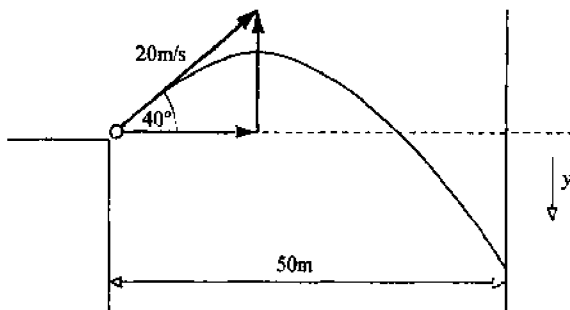


图 2-8

解

$$v_{ix}=(20\text{m/s})\cos40°=15.3\text{m/s}$$
$$v_{iy}=(20\text{m/s})\sin40°=12.9\text{m/s}$$

先考察水平运动。

$$v_{ix}=v_{fx}=v_x=15.3\text{m/s}$$

由 $x=v_xt$ 得

$$50\text{m}=(15.3\text{m/s})t \quad 或 \quad t=3.27\text{s}$$

对于竖直运动，取向下为 y 正向，有

$$y=v_{iy}t+\frac{1}{2}a_yt^2$$
$$=(-12.9\text{m/s})(3.27\text{s})+\frac{1}{2}(9.81\text{m/s}^2)(3.27\text{s})^2$$
$$=105\text{m}=0.11\text{km}$$

由于 y 为正值，即向下为正。球将击中投掷点以下 0.11km 处的墙壁。

2.22 (a)炮弹的出口速度为 $\boldsymbol{v}$、仰角为 θ，求水平射程 x。

(b)若炮弹出口速率为 120m/s，射中水平距离 1300m 远处的目标，求仰角值(见图 2-9)。

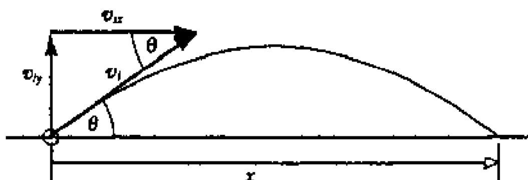


图 2-9

解 (a)设炮弹击中目标所花时间为 t。则有

$x=v_xt$ 或 $t=x/v_{ix}$。

考察竖直方向的运动。取向上为正向。炮弹击中目标时位移的竖直分量为 0

$$0=v_{iy}t+\frac{1}{2}(-g)t^2$$

解之得 $t=2v_{iy}/g$，但 $t=x/v_{ix}$，所以有

$$\frac{x}{v_{ix}}=\frac{2v_{iy}}{g} \quad 或 \quad x=\frac{2v_{ix}v_{iy}}{g}=\frac{2(v_i\cos\theta)(v_i\sin\theta)}{g}$$

由公式 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，上式可简化为

$$x=\frac{v_i^2\sin2\theta}{g}$$

当 $\theta=45^\circ$ 时，$\sin2\theta=1$，得到最大水平射程。

(b)从射程方程得到

$$\sin2\theta=\frac{gx}{v_i^2}=\frac{(9.81\text{m/s}^2)(1300\text{m})}{(120\text{m/s})^2}=0.885$$

所以 $2\theta=\arcsin0.885=62^\circ$ 或 $\theta=31^\circ$。

习　题

2.23 三个孩子在停车场发射一枚小火箭。火箭腾空并在 40s 内划过一条 380m 的弧线。求其平均速率。

(答　9.5m/s)

2.24 机器人按计算机的指令，离开舱室行走了 1200m。其平均速率为 20.0m/s。它花了多长时间？

(答　60.0s)

2.25 汽车里程表开始时计数为 22687km，经过 4h 行驶，计数为 22791km。求平均速率，分别用 km/h 和m/s 单位表示。

(答　26km/h；7.2m/s)

2.26 汽车先以 25km/h 的速率行驶了 4.0min，接着以 50km/s 速率行驶了 8.0min，最后又以 20km/s 的速率行驶了 2.0min。(a)行驶的全长是多少公里，(b)全程的平均速率是多少？(以 m/s 为单位)

(答　(a)9.0km；(b)10.7m/s 或 11m/s)

2.27 某人花 50s 跑完了一圈半，已知跑道直径为 40m(一圈 126m)。求(a)跑步的平均速率和(b)平均速度的数值。注意，速率取决于跑的路程，而速度取决于终点的位移。

(答　(a)3.8m/s，(b)0.80m/s)

2.28 赛车在椭圆形赛道上以 200km/h 的平均速率行驶了 45min。(a)此期间车行驶了多长距离？(b)求在第三圈结束时车的平均速度。

(答　(a)150km；(b)0)

2.29 下列数据描述了物体位置(沿 x 轴)随时间的关系。请画出关系图并求出物体在下列时刻的瞬时速度：(a)t=5.0s，(b)16s，(c)23s。

t/s	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
x/m	0	4.0	7.8	11.3	14.3	16.8	18.6	19.7	20.0	19.5	18.2	16.2	13.5	10.3	6.7

(答　(a)0.018m/s，x 正向；(b)0m/s；(c)0.013m/s，x 反向)

2.30 求上题中物体在下列时刻的运动速度：(a)3.0s，(b)10s，(c)24s。

(答　(a)1.9cm/s，x 正向；(b)1.1cm/s，x 正向；(c)1.5cm/s，x 反向)

2.31 求出图 2-3 所描述的物体在下列时刻的瞬时速度：(a)1.0s，(b)4.0s，(c)10s。

(答　(a)3.3m/s，y 正向；(b)1.0m/s，y 正向；(c)0.83m/s，y 反向)

2.32 物体作匀加速直线运动，40s 走了 640m。已知其初速为 8.0m/s。试求(a)平均速度，(b)末速度，(c)加速度。

(答　(a)16m/s；(b)24m/s；(c)0.40m/s^2)

2.33 卡车从静止出发作匀加速运动，加速度为 5.0m/s^2。求 4.0s后的车速以及走过的距离。

(答　20m/s，40m)

2.34 一箱子从静止开始沿斜面下滑作匀加速运动，已知 3.0s 钟后速率达到 2.7m/s。求(a)加速度和(b)在第一个 6.0s 钟内下滑的距离。

(答　(a)0.90m/s^2；(b)16m)

2.35 汽车匀加速地驶过相距 30m 的两个检测点，花了 4.0s。已知到达第一个检测点时车速为 5.0m/s。求

加速度以及车到第二个检测点时的速率。

(答　$1.3m/s^2$,10m/s)

2.36 汽车在30m的直线距离内,速率从6.0m/s均匀提升到20m/s。求加速度大小以及行驶这段距离所花的时间。

(答　$2.6m/s^2$,5.4s)

2.37 飞机从静止开始沿直线跑道加速。已知12s内行驶了600m。试求(a)加速度,(b)在12s后的速率和(c)在第12s内走过的距离。

(答　(a)$8.3m/s^2$;(b)0.10km/s;96m)

2.38 速率为44m/s的火车在直线轨道上均匀减速,在44s内停止。求加速度和减速期间走过的距离。

(答　$-0.68m/s^2$,0.66km)

2.39 以13m/s速率运动的物体均匀减速,每秒减速2.0m/s。求减速6.0s后物体的(a)末速率,(b)在此6.0s内的平均速率和(c)走过的距离。

(答　(a)1.0m/s;(b)7.0m/s;(c)42m)

2.40 物体从静止自由下落。试求(a)重力加速度,(b)在3.0s内下落距离,(c)下落70m时的速率,(d)速率达到25m/s时花多长时间以及(e)下落300m所花的时间。

(答　(a)$9.81m/s^2$;(b)44m;(c)37m/s;(d)2.6s;(e)7.8s)

2.41 一圆球从桥上落入水中花了5.0s。试计算(a)球落水时的速率和(b)这桥的高度。

(答　(a)49m/s;(b)0.12km或1.2×10^2m)

2.42 以初速度8.0m/s在25m高处竖直下抛一石块。求(a)石块落地的时间和(b)落地时的速率。

(答　(a)1.6s;(b)24m/s)

2.43 以初速率30m/s上抛一棒球。试求(a)球能上升多长时间,(b)上升到多高,(c)球从离手到落到原地共花多长时间,(d)在什么时刻球速为16m/s。

(答　(a)3.1s;(b)46m;(c)6.1s;(d)1.4s和4.7s)

2.44 从气球中抛出一瓶子,瓶在20s内落地。求气球高度。如果:(a)假设气球静止;(b)气球以50m/s的速率上升。

(答　(a)20km;(b)0.96km)

2.45 两个球在不同高度自由落下,下落时间相差1.5s,但在抛出第一个球5.0s后同时落地。试求(a)两球初始点间的高度差和(b)第一球是从多高处下落的。

(答　(a)63m;(b)0.12km)

2.46 升降机在竖井内以3.00m/s的速率上升,这时底板上有一枚螺帽松脱并在2.00s后落入井底。(a)螺帽松脱时升降机离井底多远?(b)螺帽下落0.25s时距离井底多远?

(答　(a)13.6m,(b)14m)

2.47 一圆球在桌上以20cm/s的速度滚动,从80cm高的桌边滚落。(a)求圆球落地要多长时间,(b)落地时水平方向走了多远?

(答　(a)0.40s;(b)8.1cm)

2.48 在地面以与水平方向成50°角的方向射出一物体,初速为40m/s。(a)过多久物体落地?(b)落地点到起始点有多远?(c)落地时与地面成什么角度?

(答　(a)6.3s;(b)0.16km;(c)50°)

2.49 在170m高的建筑物顶向斜下方向抛一物体,初速度为40m/s,与水平面成30°角。(a)过多久该物体落地?(b)落地点距建筑物水平距离多少?(c)落地时与水平面夹角是多少?

(答　(a)4.2s;(b)0.15km;(c)60°)

2.50 地面上的水管以40°的仰角向8.0m远的墙射出水柱,喷水初速率为20m/s。问水能射到墙的什么高度。

(答　5.4m)

2.51 一个棒球击球手击出一个全垒打好球,球初速达40m/s,仰角26°,击球点高120cm。对方接球员站在110m远的看台边缘跳起3m高,还是没能接到球。问球在接球员手套上方多高处飞了过去?

(答　6.0m)

2.52 试证明以60°的仰角射击,子弹能达到的高度是30°情况的3倍,但水平射程相同。

2.53 在地面以30°的仰角投出一球,球刚好落到20m以远的建筑物顶部。如屋顶高出投掷点5.0m,求球的

初始速率。

（答　20m/s）

2.54　在距地面高度为 h(m)处竖直上抛一球，初速为 v。试证球落地的时间为

$(v/g)[1+\sqrt{1+(2hg/v^2)}]$

第三章 牛顿定律

质量

质量是物体惯性的度量。惯性是物体保持其原有运动状态的趋势:原来静止的物体继续保持静止;原来运动的物体继续保持其速度不变。几百年来,物理学家认为把质量当作物体中物质多少的度量也是实际可行的。

标准千克

定义某物体的质量为一千克(1kg)。其他物体的质量通过与标准质量相比较而得到。一克精确地等于千分之一千克。

力

广义地说,力是改变运动的因素。在力学中,力改变物体的速度。力是矢量,有大小和方向。所谓外力是指力的作用源在所考虑的系统的外部。作用在物体上的外力使该物体沿力的方向作加速运动,其加速度正比于力的大小、反比于物体的质量。按照狭义相对论,在速率比光速 c 小很多的情况,这一论述是非常好的近似。

牛顿

牛顿是国际单位制中力的单位。一牛[顿](1N)的力使质量为 1kg 的物体产生 1m/s^2 的加速度。英制中 1lbf 等于4.45N。

牛顿第一定律

物体若不受外力作用,原来静止的物体将保持静止,原来运动的物体将以不变的速度继续运动。力使物体的运动状态发生改变。

牛顿第二定律

牛顿当年是借助于动量这一概念来阐述第二定律的,我们将在第八章给出严格的论述。这里,我们着眼于一种虽不是基础性的、然而却很实用的说法。质量为 $m(m\neq0)$ 的物体受到合力 $\boldsymbol{F}$ 的作用,物体将沿力的方向作加速运动,加速度 $\boldsymbol{a}$ 正比于 $\boldsymbol{F}$,反比于物体的质量 m。若力以牛顿为单位,质量以千克为单位,加速度以 m/s^2 为单位,可以写成

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{F}}{m}\quad \text{或}\quad \boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$$

加速度 $\boldsymbol{a}$ 的方向同力 $\boldsymbol{F}$ 的方向。

矢量方程 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$ 也可写成分量的形式

$$\sum F_x=ma_x\qquad \sum F_y=ma_y\qquad \sum F_z=ma_z$$

式中的力为作用在物体上合力的各个分量。

牛顿第三定律

物体与物体相互作用——力是成对的:甲物体施给乙物体一个力,则必有一个大小相等、方向相反的力施给甲物体。因此牛顿第三定律又称为作用与反作用定律。注意,作用力和反作用力是作用于两个不同物体上的。

万有引力定律

质量为m和m'的两个物体之间以大小相等的力相互吸引。对于质点(或球对称物体)，引力作用F_G为

$$F_G = G\frac{mm'}{r^2}$$

式中r是两个物体质心之间的距离，F_G以N为单位，m和m'以kg为单位，r以m为单位，这时有$G=6.67\times10^{-11}N\cdot m^2/kg^2$。

重量(或重力)

物体的重力(F_W)是作用于该物体、方向朝下的引力。在地球上，即地球对该物体的引力。重力的单位在国际单位制中为牛顿，在英制中为磅。由于地球不是完全均匀的球体，它本身还在不停地自转，实际称量的物体重量与上述定义会略有差别。

质量和重量之间的关系

质量为m的物体朝地面自由下落，它受到惟一的力——引力——的向下拉的作用，我们称这个力为物体的重力F_W。受F_W作用的物体的加速度即自由落体加速度g。因此，$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$就给出了质量$m$与$F=F_W$、$a=g$之间的关系。在地球表面重力加速度的平均值为$g=9.81m/s^2$，所以质量为1.00kg的物体的重量等于9.81N。

张力($\boldsymbol{F}_T$)

作用于一条线(链或肌腱)使其伸长的力叫做张力，其大小记为F_T。

摩擦力($\boldsymbol{F}_f$)

两个相互接触的物体，沿着接触面切线方向、阻止它们发生相互滑动的力叫摩擦力，摩擦力与接触表面平行，与运动方向或运动趋势的方向相反。只有当作用力大于最大静摩擦力时，物体才开始滑动。

法向力($\boldsymbol{F}_N$)

一个物体受到其支撑面的作用，这个作用力垂直于支撑面的分量叫做法向力。

滑动摩擦因数(μ_k)

一个物体在另一个物体表面以常速率滑动时，我们定义滑动摩擦因数为

$$\mu_k = \frac{\text{摩擦力}}{\text{法向力}} = \frac{F_f}{F_N}$$

静摩擦因数(μ_s)

两个相互接触的物体即将发生(但尚未发生)滑动时，摩擦力达到极大值。用下式定义静摩擦因数

$$\mu_s = \frac{\text{最大摩擦力}}{\text{法向力}} = \frac{F_f(\max)}{F_N}$$

量纲分析

所有的力学量，比如加速度和力，都可以通过如下三个基本量纲来描述，即长度L、质量M和时间T。例如，加速度是长度(一段距离)被时间的平方除，它的量纲为L/T²，或写成

$[LT^{-2}]$。体积的量纲为$[L^3]$，速度的量纲为$[LT^{-1}]$。由于力是质量乘以加速度，所以其量纲为$[MLT^{-2}]$。用量纲可以检查方程是否合理，因为方程的每一项都应具有相同的量纲。比如下面的方程

$$s = v_i t + \frac{1}{2}at^2$$

其量纲为

$$[L] = [LT^{-1}][T] + [LT^{-2}][T^2]$$

每一项都具有长度的量纲。记住，方程中所有项都应具有相同的量纲。方程中不应出现体积$[L^3]$加面积$[L^2]$、或速度$[LT^{-1}]$减去力$[MLT^{-2}]$，它们的量纲不同。

数学运算中的单位

在每次数学运算中，在数字计算的同时，还必须进行单位运算。

只有单位(也包括量纲)相同的量才能加减运算。例如，要代数相加5m(长度)和8cm(长度)，就先要把它们的单位都换算成m或cm。然而，在乘法或除法中，不同性质的量可以在一起运算，单位和数字一样遵从诸如平方、相消等代数规则。举例如下：

(1) $6m^2 + 2m^2 = 8m^2$　　$(m^2 + m^2 \rightarrow m^2)$

(2) $5cm \times 2cm^2 = 10cm^3$　　$(cm \times cm^2 \rightarrow cm^3)$

(3) $2m^3 \times 1500\,\frac{kg}{m^3} = 3000kg$　　$\left(m^3 \times \frac{kg}{m^3} \rightarrow kg\right)$

(4) $2s \times 3\,\frac{km}{s^2} = 6\,\frac{km}{s}$　　$\left(s \times \frac{km}{s^2} \rightarrow \frac{km}{s}\right)$

(5) $\frac{15g}{3g/cm^3} = 5cm^3$　　$\left(\frac{g}{g/cm^3} \rightarrow g \times \frac{cm^3}{g} \rightarrow cm^3\right)$

例　　题

3.1 求出质量为(a)3.00kg，(b)200g的物体在地球上的重量。

解答 质量m与重力F_W(重量)的普遍关系为$F_W = mg$。式中质量须以千克、力以牛顿、加速度以每秒每秒米为单位。在地球上$g = 9.81m/s^2$，在不同的星球上重力加速度是不同的。

(a) $$F_W = (3.00kg)(9.81m/s^2) = 29.4kg \cdot m/s^2 = 29.4N$$

(b) $$F_W = (0.200kg)(9.81m/s^2) = 1.96N$$

3.2 一个20.0kg的物体受到$-x$方向45.0N力的作用而自由移动，求其加速度。

解答 利用分量形式的牛顿第二定律$\sum F_x = ma_x$，式中$\sum F_x = -45.0N$，$m = 20.0kg$。所以

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{-45.0N}{20.0kg} = -2.25N/kg = -2.25m/s^2$$

计算中我们应用了$1N = 1kg \cdot m/s^2$，由于力沿$-x$方向，所以加速度也沿同一方向。

3.3 如图3-1所示，一根绳系着一个重量为50N的物体。求绳受的张力。

解答 我们假想把这个物体隔离起来讨论。作用在物体上有两个力：绳向上的拉力和向下的重力。拉力即绳的张力，用F_T表示，重力为$F_W = 50N$，见图3-1(b)。

我们取向上和向右为坐标正向，物体平衡条件的分量形式为

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F_x = 0 \qquad 得到\ 0 = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad 得到\ F_T - 50N = 0$$

从而得出$F_T = 50N$。即一根竖直的绳子吊着一个物体处于平衡状态，绳的张力就等于物的重力。

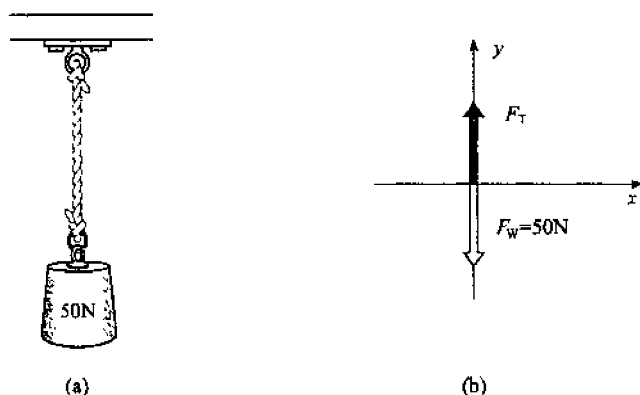


图 3 - 1

3.4 一根绳子竖直向上拉一个质量为 5.0kg 的物体，使之加速度为 0.30m/s²。绳子的张力为多少?

解 物体的受力如图 3 - 2。绳的张力为 F_T，物体的重量 $F_W = mg = (5.0\text{kg})(9.81\text{m/s}^2) = 49.1\text{N}$。用 $\sum F_y = ma_y$，令向上为正方向，有

$$F_T - mg = ma_y \quad 或 \quad F_T - 49.1\text{N} = (5.0\text{kg})(0.30\text{m/s}^2)$$

从而得到 $F_T = 50.6\text{N} = 51\text{N}$。注意 F_T 大于 F_W，因为物体向上作加速运动。

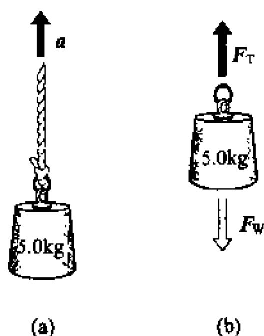


图 3 - 2

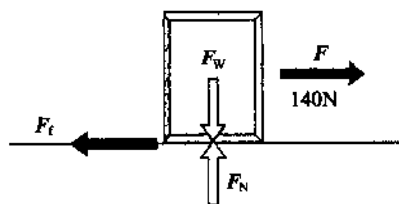


图 3 - 3

3.5 在水平地面上匀速拉动一个质量 60.0kg 的箱子须要一个 140N 的水平力。求箱子与地面之间的摩擦因数，要求三位有效数字。

解 箱子的受力情况见图 3 - 3。箱子是水平运动，所以 $a_y = 0$。$\sum F_y = ma_y$

给出 $F_N - mg = (m)(0\ \text{m/s}^2)$

从而得出 $F_N = mg = (60.0\text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 588.6\text{N}$。又由于箱子沿水平地面匀速运动，$a_x = 0$，所以

$$\sum F_x = ma_x \quad 给出 \quad 140\text{N} - F_f = 0$$

即摩擦力 $F_f = 140\text{N}$，从而有

$$\mu_k = \frac{F_f}{F_N} = \frac{140\text{N}}{588.6\text{N}} = 0.238$$

3.6 作用在质量 5.0kg 的物体上惟一的力，其分量为 $F_x = 20\text{N}$ 和 $F_y = 30\text{N}$。求物体加速度。

解 应用 $\sum F_x = ma_x$ 和 $\sum F_y = ma_y$，得到

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{20\text{N}}{5.0\text{kg}} = 4.0\text{m/s}^2$$

$$a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{30\text{N}}{5.0\text{kg}} = 6.0\text{m/s}^2$$

加速度的分量见图 3 - 4。从图可得

$$a = \sqrt{(4.0)^2 + (6.0)^2}\text{m/s}^2 = 7.2\text{m/s}^2$$

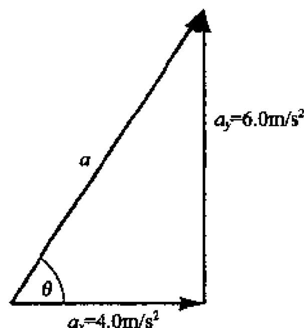


图 3 - 4

而 $\theta=\arctan(6.0/4.0)=56°$。

3.7 要使重量600N的物体产生0.70m/s² 的加速度，需多大的作用力？

解 注意题中给出物体的重量而非质量，假设是地球上的重量，应用 $F_W=mg$ 得到

$$m=\frac{F_W}{g}=\frac{600\ \text{N}}{9.81\ \text{m/s}^2}=61\ \text{kg}$$

知道了质量和要产生的加速度，可得到力

$$F=ma=(61\text{kg})(0.70\text{m/s}^2)=43\text{N}$$

3.8 一个恒力作用于质量为5.0kg的物体，使其速率在3.0s内由7.0m/s减至3.0m/s。求力的大小。

解 我们必须先求出物体的加速度。由于恒力作用，所以加速度是常数。选取物体运动方向为正向，从第二章可知

$$a=\frac{v_f-v_i}{t}=\frac{-4.0\text{m/s}}{3.0\text{s}}=-1.33\text{m/s}^2$$

现在可应用 $F=ma$，$m=5.0\text{kg}$

$$F=(5.0\text{kg})(-1.33\text{m/s}^2)=-6.7\text{N}$$

负号表示力是阻力，与运动方向相反。

3.9 一个400g的木块初速率为80cm/s，在水平桌面上滑动，摩擦力为0.70N。(a)木块能滑多远？(b)求木块与桌面之间的摩擦因数。

解 (a)取运动方向为正向。作用于木块的惟一的不平衡力是摩擦力，−0.70N，所以

$$\sum F=ma \qquad \text{成为} -0.70\text{N}=(0.400\text{kg})(a)$$

得知 $a=-1.75\text{m/s}^2$。注意质量总是以kg为单位。要求木块滑动距离，已知 $v_{ix}=0.80\text{m/s}$，$v_{fx}=0$ 和 $a=-1.75\text{m/s}^2$，按 $v_{fx}^2-v_{ix}^2=2ax$ 有

$$x=\frac{v_{fx}^2-v_{ix}^2}{2a}=\frac{(0-0.64)\text{m}^2/\text{s}^2}{(2)(-1.75\text{m/s}^2)}=0.18\text{m}$$

(b)因为在竖直方向木块受力相抵消，桌子向上的支承力等于木块的重力。所以

$$\mu_k=\frac{\text{摩擦力}}{F_N}=\frac{0.70\text{N}}{(0.40\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)}=0.18$$

3.10 一辆质量600kg的汽车在水平路面上以30m/s速率行驶。(a)若要在70m以内停车，阻力(假设是恒定不变的)应多大？(b)轮胎与路面之间的摩擦因数至少应多大？假设没踩刹车，车轮与路面无相对滑动，这里只涉及静摩擦。

解 (a)先要根据运动方程求车的加速度。已知 $v_{ix}=30\text{m/s}$，$v_{fx}=0$，$x=70\text{m}$。由 $v_{fx}^2=v_{ix}^2+2ax$ 得

$$a=\frac{v_{fx}^2-v_{ix}^2}{2x}=\frac{0-900\text{m}^2/\text{s}^2}{140\text{m}}=-6.43\text{m/s}^2$$

进一步有

$$F=ma=(600\text{kg})(-6.43\text{m/s}^2)=-3860\text{N}=-3.9\text{kN}$$

(b)上面求出的力即车轮和路面之间的摩擦力，即作用在轮胎上的摩擦力为 $F_f=3860\text{N}$。摩擦因数 $\mu_s=F_f/F_N$，F_N 为法向力。本题中，路面对汽车的支承力等于汽车的重力。所以

$$F_N=F_W=mg=(600\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)=5886\text{N}$$

得到 $\mu_s=\frac{F_f}{F_N}=\frac{3860}{5886}=0.66$

要使汽车在70m以内停下来，轮胎与路面的摩擦因数至少应为0.66。

3.11 质量为8000kg的机车牵引一辆40 000kg的火车在水平轨道上行驶，加速度可达 $a_1=1.20\text{m/s}^2$。若用它牵引一辆16 000kg的火车，能产生多大的加速度 a_2？

解 对于一定的牵引力，加速度反比于总质量。所以有

$$a_2=\frac{m_1}{m_2}a_1=\frac{8000\text{kg}+40\ 000\text{kg}}{8000\text{kg}+16\ 000\text{kg}}(1.20\text{m/s}^2)=2.40\text{m/s}^2$$

3.12 如图3-5(a)所示，质量为 m 的物体吊在一根绳上。如果物体(a)静止，(b)匀速运动，

(c)以加速度 $a=3g/2$ 向上运动和(d)以加速度 $a=0.75g$,向下运动,求绳的张力。

解 物体的受力分析图见图 3-5(b),两个力作用该物体:向上的张力 F_T 和向下的重力 mg。取向上为正方向,并分别就每种情况列出 $\sum F_y = ma_y$:

(a)$a_y=0$: $F_T-mg=ma_y=0$ 或 $F_T=mg$

(b)$a_y=0$: $F_T-mg=ma_y=0$ 或 $F_T=mg$

(c)$a_y=3g/2$: $F_T-mg=m(3g/2)$ 或 $F_T=2.5mg$

(d)$a_y=-3/4$: $F_T-mg=m(-3g/4)$ 或 $F_T=0.25mg$

注意,在(d)中,绳的张力小于物体的重力,这样物体才能有向下的加速度。而若 $a=-g$,则 $F_T=0$,你能做出解释吗?

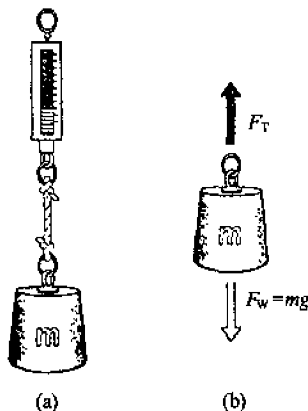


图 3-5

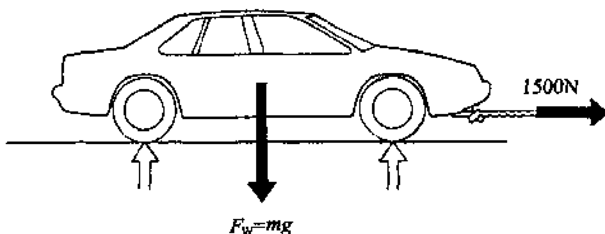


图 3-6

3.13 有一条拖缆,如果张力超过 1500N 将断裂。用它在水平路面上牵引一辆 700kg 的汽车,它能承受多大的加速度?(注意张力有 4 位有效数字,见附录 A)

解 作用在汽车上的力见图 3-6。因为 y 方向的受力平衡,只需考虑 x 方向。x 方向的力如箭头所示,并标以正号。因此有

$$\underset{\rightarrow}{+}\sum F_x = ma_x, \qquad 1500\text{N} = (700\text{kg})(a)$$

解之得 $a=2.14\text{m/s}^2$。

3.14 一根能承受 300N 张力的绳子吊着一个质量 45kg 的人向下方作加速运动。加速度至少应为多少?

解 人的重力为 $mg=(45\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)=441\text{N}$。而绳子只能承受 300N 的张力。向下的净力至少为 441N−300N=141N。所以该人向下的重力加速度至少为

$$a=\frac{F}{m}=\frac{141\text{N}}{45\text{kg}}=3.1\text{m/s}^2$$

3.15 一个 70kg 的箱子受到一个 400N 力的牵引在水平地面上滑动,见图 3-7。已知箱与地面的摩擦因数为 0.50。求箱子的加速度。

解 由于 y 方向力是平衡的,所以

$$F_N=mg=(70\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)=687\text{N}$$

摩擦力为

$$F_f=\mu_k F_N=(0.50)(687\text{N})=344\text{N}$$

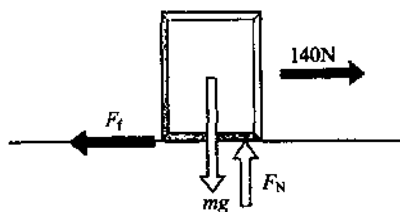


图 3-7

取箱子运动方向为正向,应用 $\sum F_x = ma_x$ 有

$$400\text{N}-344\text{N}=(70\text{kg})(a) \quad 即 \quad a=0.80\text{m/s}^2$$

3.16 如图 3-8 所示,一个 70kg 的箱子受到一个 400N 的力的牵引而滑动,力与水平方向成 30°角。已知滑动摩擦因数为 0.50。求箱子的加速度。

解 由于箱子没有竖直方向的运动,所以

$$\sum F_y = ma_y = 0$$

从图 3-8 可知，

$$F_N + 200N - mg = 0$$

$mg = (70kg)(9.81m/s^2) = 687N$，从而 $F_N = 486N$。作用于箱子的摩擦力为

$$F_f = \mu_k F_N = (0.50)(486N) = 243N$$

对于箱子可以列出 $\sum F_x = ma_x$，即

$$(346 - 243)N = (70kg)(a_x)$$

求得 $a_x = 1.5m/s^2$。

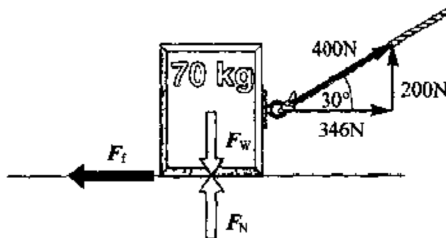


图 3-8

3.17 一辆 20m/s 速率的汽车沿水平路面行驶。如果轮胎与路面的摩擦因数为 0.90，汽车急刹车后还至少能滑行多远(即停车距离)？假定四只轮子刹车情况相同。如果不刹车，则汽车靠静摩擦力面停止。

解 作用在第一个轮子的摩擦力为

$$F_{f1} = \mu_s F_{N1} = \mu F_{W1}$$

这里 F_{W1} 第一个轮子分担的重量，对四个轮子求和即得到总摩擦力：

$$F_f = \mu_s F_{W1} + \mu_s F_{W2} + \mu_s F_{W3} + \mu_s F_{W4}$$
$$= \mu_s (F_{W1} + F_{W2} + F_{W3} + F_{W4}) = \mu_s F_W$$

这里的 F_W 为汽车总的重量(我们假设四个轮子的刹车情况相同)。应用 $F=ma$，用 $-\mu_s F_W$ 取代 F 得到 $-\mu_s F_W = ma$。m 为汽车质量，我们取汽车运动方向为正。由于 $F_W = mg$，所以汽车的加速度为

$$a = -\frac{\mu_s F_W}{m} = -\frac{\mu_s mg}{m} = -\mu_s g = (-0.90)(9.81m/s^2) = -8.8m/s^2$$

通过解运动方程可以求出汽车滑行距离：$v_i = 20m/s, v_f = 0, a = -8.8m/s^2$，应用 $v_f^2 - v_i^2 = 2ax$ 有

$$x = \frac{(0-400)m^2/s^2}{-17.6m/s^2} = 23m$$

如果四只轮子的刹车不一样灵，停车距离会长些。

3.18 如图 3-9 所示，一个 400N 的力推一个 25kg 的箱子。在 4.0s 内箱子从静止到具有 2.0m/s 的速率。求箱与地板之间的滑动摩擦因数。

解 我们要根据 $F=ma$ 求出摩擦力 F_f。但先要求出加速度 a。已知 $v_i = 0, v_f = 2.0$ m/s 和 $t = 4.0$s。应用 $v_f = v_i + at$ 有

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{2.0\ m/s}{4.0s} = 0.50m/s^2$$

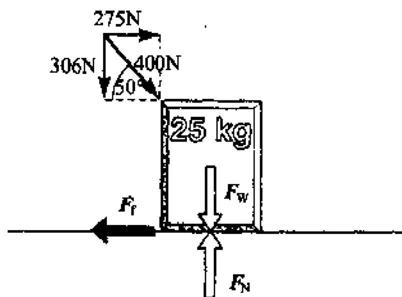


图 3-9

现在应用 $\sum F_x = ma_x$，此处 $a_x = a = 0.50m/s^2$。

从图 3-9 可知，方程形式为

$$257N - F_f = (25kg)(0.50m/s^2), \quad F_f = 245N$$

要求出 $\mu = F_f/F_N$：先应用 $\sum F_y = ma_y = 0$ 求出 F_N，(因为竖直方向无运动)所以

$$F_N - 306N - (25)(9.81)N = 0, \quad F_N = 551N$$

于是

$$\mu_k = \frac{F_f}{F_N} = \frac{245}{551} = 0.44$$

3.19 要使一个 200N 的小车沿 30°的斜面以常速率上行，若忽略摩擦力，需要多大的力(方向与斜面平行)？

解 小车受力情况如图 3-10(a)。车以常速率沿直线运动，所以其速度为常矢量，小车处于动态平衡，它所受的力应平衡。

把小车抽象成一个质点，有三个力作用于它：(1)朝下的重力 F_W；(2)沿斜面向上的拉力 F；(3)斜面的支撑力 F_N。见受力分析图 3-10(b)。

涉及斜面的情况，取沿斜面方向为 x 轴，垂直于斜面为 y 轴是比较方便的。将各力沿坐标轴分解后，平衡的首要条件为

$$\overset{+}{\nearrow}\sum F_x = 0,\qquad F - 0.50F_W = 0$$

$$\underset{+}{\nwarrow}\sum F_y = 0,\qquad F_N - 0.87F_W = 0$$

解第一个方程，并注意到 $F_W=200\text{N}$，得出 $F=0.50F_W$，所需拉力为 0.10kN(二位有效数字)。

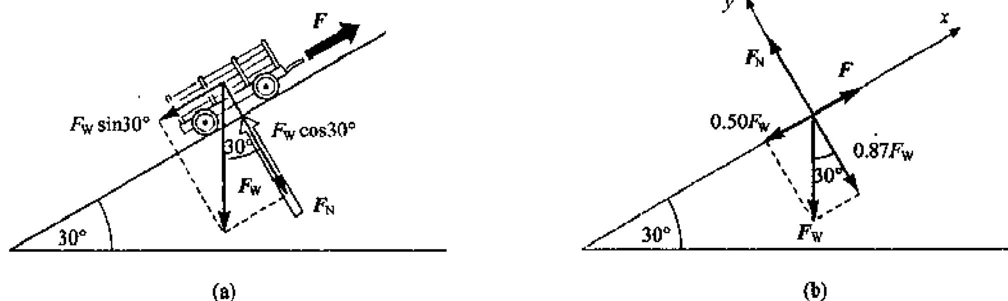


图 3-10

3.20 一个 20kg 的箱子放在斜面上(如图 3-11)：已知滑动摩擦因数为 0.30。求箱子沿斜面下滑的加速度。

解答 在求解斜面问题时，取平行、垂直于斜面方向为 x 轴和 y 轴。利用 $\sum F_x = ma_x$ 来求加速度。

先求摩擦力 F_f。由于 $\cos30°=0.866$，由 $F_y=ma_y=0$

即 $F_N-0.87mg=0$

得到 $F_N=(0.87)(20\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)=171\text{N}$。

所以摩擦力 F_f 为

$$F_f = \mu_k F_N = (0.30)(171\text{N}) = 51\text{N}。$$

应用 $\sum F_x = ma_x$，

$$F_f - 0.50mg = ma_x \quad 或$$

$$51\text{N} - (0.50)(20)(9.81)\text{N} = (20\text{kg})a_x$$

所以 $a_x = -2.35\text{m/s}^2 = -2.4\text{m/s}^2$。

即箱子沿斜面下滑的加速度为 2.4m/s^2。

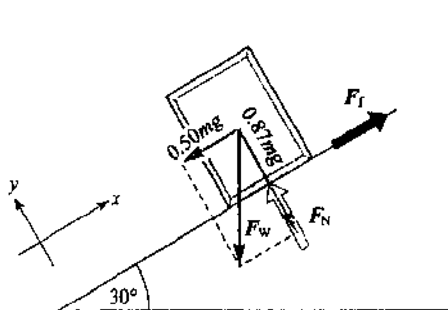


图 3-11

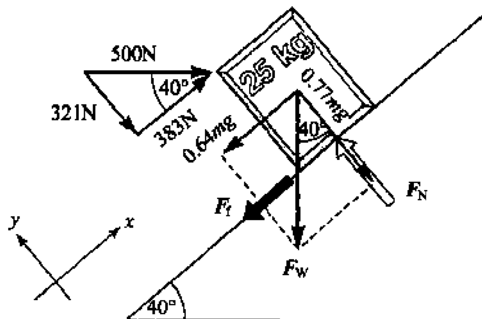


图 3-12

3.21 500N 的力作用于 25kg 的箱子(见图 3-12)。已知箱子沿斜面向上的加速度为 0.75m/s^2。求箱与斜面间的滑动摩擦因数。

解答 各作用力及其分量见图 3-12，注意坐标轴的选取。由于箱子沿斜面向上运动，所以摩擦力是沿斜面向下的(总是与运动方向相反)。

先应用 $\sum F_x = ma_x$ 来求 F_f。由图，斜面倾角 40°，$\sin40°=0.643$。

$$383\text{N} - F_f - (0.64)(25)(9.81)\text{N} = (25\text{kg})(0.75\text{m/s}^2)$$

从而得出　$F_f=207\text{N}$。

为求 F_N，写出 $\sum F_y=ma_y=0$，且 $\cos40°=0.766$，得到

$$F_N-321\text{N}-(0.77)(25)(9.81)\text{N}=0$$

$$F_N=510\text{N}$$

所以　$$\mu_k=\frac{F_f}{F_N}=\frac{207}{510}=0.41$$

3.22　如图 3-13，两个木块 m_1 和 m_2 被一个水平力推动。两木块与桌面间的摩擦因数均为 0.40。(a)若木块的加速度为 200cm/s^2，力 F 应多大？(b)m_1 作用于 m_2 的力为多大？取 $m_1=300\text{g}$，$m_2=500\text{g}$，注意应用国际单位制。

解　作用于两木块的摩擦力分别为 $F_{f1}=0.4m_1g$ 和 $F_{f2}=0.4m_2g$。将两木块当成一个整体考虑。作用在它上面的水平外力为 F、F_{f1} 和 F_{f2}。木块之间也相互作用，但它们是内力，对该两物体系统都不是非平衡的外力。对这个整体而言 $\sum F_x=ma$ 具体写成

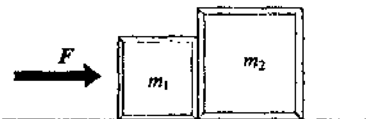


图 3-13

$$F-F_{f1}-F_{f2}=(m_1+m_2)a_x$$

(a)代入已知各量求出 F

$$F=0.40g(m_1+m_2)+(m_1+m_2)a_x=3.14\text{N}+1.60\text{N}=4.7\text{N}$$

(b)现在只考虑 m_2。在 x 方向它受到 m_1 对它的推力(用 F_b 表示)和摩擦阻力 $F_{f2}=0.4m_2g$。$\sum F_x=ma_x$　写成

$$F_b-F_{f2}=m_2a_x$$

已知 $a_x=2.0\text{m/s}^2$，所以

$$F_b=F_{f2}+m_2a_x=1.96\text{N}+1.00\text{N}=3.0\text{N}$$

3.23　如图 3-14，质量分别为 7.0kg 和 9.0kg 的两个物体通过一条绳挂在轻质、无摩擦的滑轮上(这一装置叫阿特伍德机)。求物体的加速度和绳的张力。

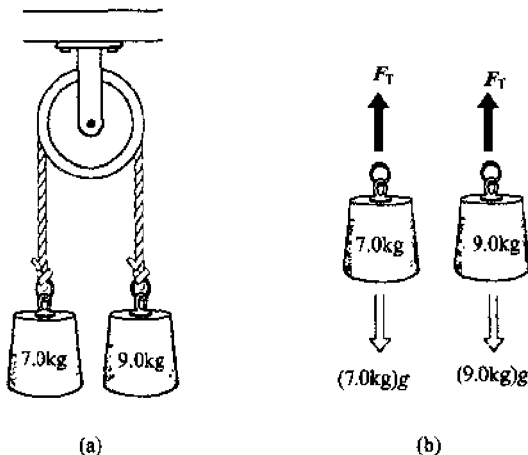


图 3-14

解　由于滑轮性质，滑轮两侧绳的张力相等。作用在两个物体上的力见图，注意物体的重力为 mg。在讨论绳于连接的物体运动时，通常取运动的方向为坐标的正向。对本题，对左边物体，向上为正向；而对右边物体以向下为正向。这样，两物体的加速度都为正值，因为绳子无伸缩所以两物体加速度大小相对两个物体分别写出 $\sum F_y=ma_y$ 得到

$$F_T-(7.0)(9.81)\text{N}=(7.0\text{kg})(a),\quad (9.0)(9.81)\text{N}-F_T=(9.0\text{kg})(a)$$

两式相加，消去 F_T 得到

$$(9.0-7.0)(9.81)\text{N}=(16\text{kg})a$$

所以 $a=1.23\text{m/s}^2$。

将 a 值代入上述任一方程，均可得到

$$F_T=77\text{N}$$

3.24 装置如图 3-15，滑块 A 与桌面的滑动摩擦因数为 0.20，$m_A=25\text{kg}$，$m_B=15\text{kg}$。开始时系统静止。起动后 3.0s 内 B 下降多少？

解答 滑块 A 没有竖直方向的运动，其法向力为

$$F_N=m_Ag=(25\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)=245\text{N}$$

而摩擦力为

$$F_f=\mu_kF_N=(0.20)(245\text{N})=49\text{N}$$

我们必须先求出系统的加速度才可描述其运动。对 A 和 B 依次应用牛顿第二定律，取运动方向为正，则有

$$F_T-F_f=m_Aa,\quad F_T-49\text{N}=(25\text{kg})(a)$$

$$m_Bg-F_T=m_Ba,\quad -F_T+(15)(9.81)\text{N}=(15\text{kg})(a)$$

将两式相加消去 F_T，求出 $a=2.45\text{m/s}^2$。

由于 $v_i=0$，$t=3.0\text{s}$，应用 $y=v_{iy}t+\frac{1}{2}at^2$ 得到

$$y=0+\frac{1}{2}(2.45\text{m/s}^2)(3.0\text{s})^2=11\text{m}$$

即在 3.0s 内 B 下降了 11m。

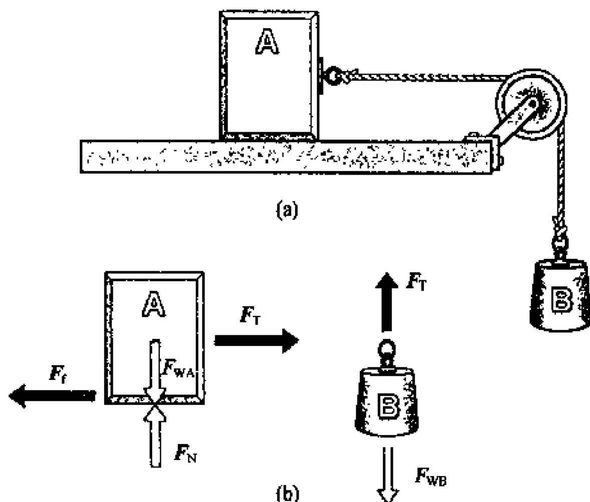


图 3-15

3.25 在上题中，欲使滑块 A 向左产生 0.75m/s^2 的加速度，要对它施加多大的水平方向的力？

解答 如果重新画出 A 的受力图的话，就应该有一个向左的拉力 F。另外，摩擦力 F_f 的方向也应该相反。在上题中已求出 $F_f=49\text{N}$。

对两物体分别应用牛顿第二定律，取运动方向为正。得到

$$F-F_T-49\text{N}=(25\text{kg})(0.75\text{m/s}^2)$$

$$F_T-(15)(9.81)\text{N}=(15\text{kg})(0.75\text{m/s}^2)$$

由第二个方程求出 F_T 并代入第一个方程得到 $F=226\text{N}$ 或 0.23kN。

3.26 一个箱子放在卡车的车斗内，箱子与车斗之间的静摩擦因数为 0.60。若不让箱子在车斗内滑动，卡车沿水平道路行驶加速度的最大极限是多少？

解答 箱子受到 x 方向的力仅为摩擦力。当箱子即将滑动时有 $F_f=\mu_sF_W$，F_W 为箱子重力。

当卡车加速时，摩擦力必须使箱子也产生同样大的加速度，否则箱子就会滑动。由于 $F_f=\mu_sF_W$，所以 $\mu_sF_W=ma_x$。又由于 $F_W=mg$。所以

$$a_x=\frac{\mu_smg}{m}=\mu_sg=(0.60)(9.81\text{m/s}^2)=5.9\text{m/s}^2$$

这就是卡车加速度的极限值，大于它，箱子就会在车斗内滑动。

3.27 图 3-16 为两个质量都为 40kg 的箱子的实验装置。它们与支承面的滑动摩擦因数均为 $\mu_k=0.15$。求箱子的加速度以及连线所受的张力。

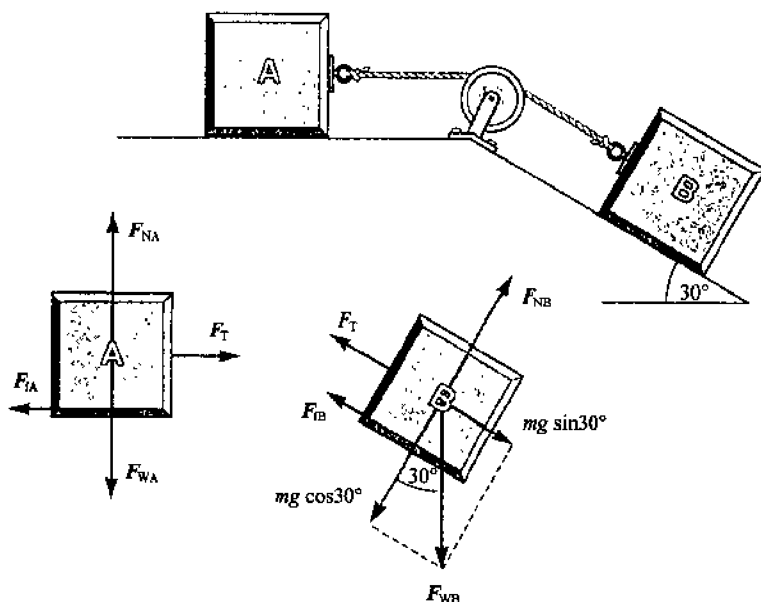


图 3-16

解 由 $F_f=\mu F_N$ 可求出两箱的摩擦力分别为

$$F_{fA}=(0.15)(mg)$$
$$F_{fB}=(0.15)(0.87mg)$$

已知 $m=40\text{kg}$　所以 $F_{fA}=59\text{N}, F_{fB}=51\text{N}$

对 A 和 B 分别应用牛顿第二定律，并取运动方向为正，得到

$$F_T-59\text{N}=(40\text{kg})(a)$$
$$0.5mg-F_T-51\text{N}=(40\text{kg})(a)$$

解之得到

$$a=1.1\text{m/s}^2$$
$$F_T=0.10\text{kN}$$

3.28 在图 3-17 所示的系统中，接触面的摩擦因数均为 μ_k，力 F 对木块 m_1 作用，求 m_1 的加速度(用 F 和 μ_k 表示)。

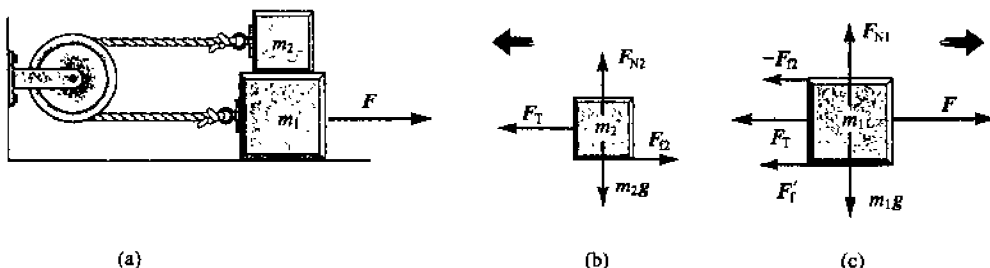


图 3-17

解 两木块受力分析见图 3-17(b)和(c)。m_2 的重力 m_2g 作用于 m_1 为压力，是法向力，所以 $F_{f2}=\mu_k m_2 g$，而在 m_1 的底部，法向力为 $(m_1+m_2)g$，所以 $F'_f=\mu_k(m_1+m_2)g$。对 m_1 和 m_2 应用牛顿第二定律，取运动方向为正，则有

$$F_T=\mu_k m_2 g=m_2 a$$
$$F-F_T-\mu_k m_2 g-\mu_k(m_1+m_2)g=m_1 a$$

两式相加消去 F_T 得到

$$F-2\mu_k m_2 g-\mu_k(m_1+m_2)(g)=(m_1+m_2)(a)$$

所以
$$a=\frac{F-2\mu_k m_2 g}{m_1+m_2}-\mu_k g$$

3.29 在图 3-18 所示的系统中，滑轮的质量和摩擦力都可以忽略。如果 $m_1=300\text{g}$，$m_2=500\text{g}$，$F=1.50\text{N}$，求 m_2 的加速度。

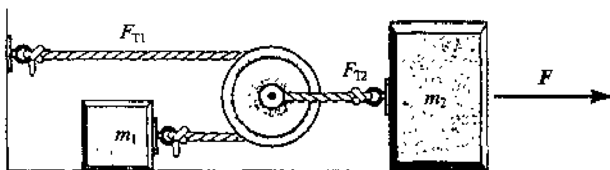


图 3-18

解析 注意，滑轮移动距离 d，m_1 就移动 $2d$。所以 m_1 的加速度为 m_2 的 2 倍。同时由于作用于滑轮的合力为零(在公式 $F=ma$ 中，$m=0$，所以 $F=0$)，连接 m_1 的绳子的张力 F_{T1} 等于拉滑轮的张力 F_{T2} 的一半。对 m_1 和 m_2 写出牛顿第二定律方程

$$F_{T1}=(m_1)(2a)$$
$$F-F_{T2}=m_2 a$$

如上分析，$F_{T1}=\frac{1}{2}F_{T2}$，所以第一个式子给出 $F_{T2}=4m_1 a$，代入第二式得到

$$F=(4m_1+m_2)(a)$$

或

$$a=\frac{F}{4m_1+m_2}=\frac{1.50\text{N}}{1.20\text{kg}+0.50\text{kg}}=0.882\text{m/s}^2$$

3.30 图 3-19 中的两个物体重量分别为 200N 和 300N。定滑轮 P_1 和动滑轮 P_2 均是无摩擦的轻质轮。求张力 F_{T1} 和 F_{T2} 以及每个物体的加速度。

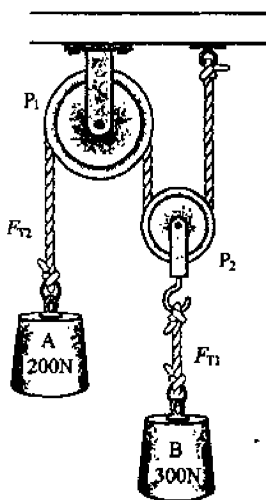


图 3-19

解析 由以下分析可知物 B 将上升，而物 A 则下降：由动滑轮性质知，作用于 P_2 的力 $2F_{T2}$ 向上，F_{T1} 向下；由于 P_2 无质量(也不可能有加速度)，所以 $F_{T1}=2F_{T2}$，作用于 B 向上拉的力为作用于 A 的力的 2 倍。

令 A 向下的加速度为 a，则 B 向上的加速度为 $a/2$。(为什么?)对 A 和 B 应用牛顿第二定律，都取运动方向为正，我们得到

$$F_{T1}-300\text{N}=(m_B)(\frac{1}{2}a)$$
$$200\text{N}-F_{T2}=m_A a$$

由于 $m=F_W/g$，所以 $m_A=(200/9.81)\text{kg}$，而 $m_B=(300/9.81)\text{kg}$，代入两方程，并注意到 $F_{T1}=2F_{T2}$。计算得到

$$F_{T1}=327\text{N},\quad F_{T2}=164\text{N},\quad a=1.78\text{m/s}^2。$$

3.31 假设地球是半径为 6370km 的球体，求其质量，要求结果三位有效数字。

解析 令地球质量为 M，地球表面一物体的质量为 m。该物体的重力为 mg，它即等于地球对它的作用力 $G(Mm)/r^2$，r 为地球半径，所以

$$mg=G\frac{Mm}{r^2}$$

从而有

$$M=\frac{gr^2}{G}=\frac{(9.81\text{m/s}^2)(6.37\times10^6\text{m})^2}{6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2}=5.97\times10^{24}\text{kg}$$

习　题

3.32 小助推火箭点火以后对飞船产生了不变的作用力 10N，在 7.80s 时间内使质量 100kg 的飞船均匀加速。求加速度。

（答　$0.10m/s^2$）

3.33 标准的 45 口径的手枪枪管长 5.0in(英寸)。子弹质量 16.2g。子弹出膛的速率为 262m/s。若子弹在 1ms 内通过枪管，求它在枪管内的平均加速度以及受力的平均值。

（答　$3\times10^5 m/s^2$；$0.4\times10^2 N$）

3.34 某个力作用于 2kg 的物体，使之产生 $3m/s^2$ 的加速度。那么它作用于(a)1kg 和(b)4kg 的物体，分别能产生多大的加速度？(c)这个力有多大？

（答　(a)$6m/s^2$；(b)$2m/s^2$；(c)6N）

3.35 物体的质量为 300g。(a)它在地球上的重量是多少？(b)在月球上它的质量是多少？(c)若在月球上它受到 0.500N 的力的作用，能产生多大的加速度？

（答　(a)2.94N；(b)0.300kg；(c)$1.67m/s^2$）

3.36 缆绳沿水平轨道拉一辆 200kg 的车。缆绳的张力为 500N，若从静止时开始，(a)要过多久缆车可达 $8.0m/s^2$ 的速率？(b)那时车走了多远？

（答　(a)3.2s；(b)13m）

3.37 一辆 900kg 的汽车以 20m/s 的速率水平行驶。欲使其在 30m 内停止，需要多大的恒定阻力？(提示：先求出其加速度。)

（答　6.0kN）

3.38 一个 12.0g 的子弹在一个长度为 20.0cm 的枪管内从静止加速到 700m/s 的速率。设为匀加速过程。求子弹受力大小。(注意物理量的单位)

（答　14.7kN）

3.39 一个 20kg 的箱子挂在绳子末端。求绳子张力分别为(a)250N，(b)150N，(c)0，(d)196N 时，箱子加速度的大小和方向。

（答　(a)$2.7m/s^2$，向上；(b)$2.3m/s^2$，向下；(c)$9.8m/s^2$，向下；(d)0）

3.40 一个 5.0kg 的物体挂在绳子末端。当物体的加速度为(a)$1.5m/s^2$，向上，(b)$1.5m/s^2$，向下，(c)$9.8m/s^2$，向下时，绳子的张力。

（答　(a)57N；(b)42N；(c)0）

3.41 一个重量为 700N 的人站在电梯内的秤盘上。秤可以读出秤盘所受到的力。求电梯加速度为(a)$1.8m/s^2$ 向上，(b)$1.8m/s^2$ 向下，(c)$9.8m/s^2$ 向下时，秤的读数。

（答　(a)0.83kN；(b)0.57kN；(c)0）

3.42 如果用上题中的秤在月球上称一个 65.0kg 的宇航员的重量，秤的示数是多少？月球上的重力加速度为 $1.60m/s^2$。

（答　104N）

3.43 绳子跨过一个轻质且没有摩擦的定滑轮。绳子一端挂着 4.0kg 的物体，另一端挂着 12kg 的物体。求物体的加速度以及绳子的张力。

（答　$4.9m/s^2$，59N）

3.44 电梯从静止状态作匀加速上升，在 0.60s 内上升了 2.0m。一个乘客手中用绳子悬挂着一个 3.0kg 的物体。求电梯加速过程中绳子的张力。

（答　63N）

3.45 一个 60kg 的跳伞员下落速率达 50m/s 时打开降落伞。在 0.80s 后伞完全张开，这时下降速率减至 12.0m/s。设此期间是匀减速运动，求伞所受到的平均阻力。

（答　2850N+588N=3438N=3.4kN）

3.46 一条细线吊起一个 300g 的物体。这物体底部又有一条细线吊着一个 900g 的物体。(a)若物体均以 $0.700m/s^2$ 的加速度上升，每根线的张力为多少？(b)若物体以 $0.700m/s^2$ 的加速度下降，情况又如何？

（答　(a)12.6N 和 9.45N；(b)10.9N 和 8.19N）

3.47 一根绳子牵引一个 20kg 的小车在水平道路上行走。绳子与地面成 30°，小车受到 30N 的摩擦阻力。如果(a)车作匀速运动，(b)车的加速度为 $0.40m/s^2$，求拉力的大小。

(答 (a)35N；(b)44N)

3.48 质量为 12kg 的箱子自斜面顶部释放，斜面长 5.0m，与水平夹角为 40°。箱子受到 60N 的摩擦力。(a)求箱子的加速度；(b)箱子到达斜面底部要花多长时间？

(答 (a)$1.3m/s^2$；(b)2.8s)

3.49 求上题中箱子与斜面间的摩擦因数。

(答 0.67)

3.50 光滑斜面与水平面成 30°角，沿斜面方向的力作用于一个质量为 15kg 的箱子。若使箱子以(a)$1.2m/s^2$ 的加速度向上，(b)以 $1.2m/s^2$ 向下，求力的大小。

(答 (a)92N；(b)56N)

3.51 一个水平力作用于质量为 20kg 的箱子，使其沿 30°的斜面上升。已知摩擦力为 80N。若箱子的加速度为(a)0，(b)$0.75m/s^2$，力应该多大？

(答 (a)0.21kN；(b)0.22kN)

3.52 与水平成 25°角的斜面顶部有一定滑轮。滑轮通过绳索一端连接着斜面上 30kg 的物体，另一端悬挂 20kg 的物体。忽略摩擦，20kg 物体从静止开始，2.0s 内下降了多少距离？

(答 2.9m)

3.53 上题中若物体与斜面的摩擦因数为 0.20，情况如何？

(答 0.74m)

3.54 200N 的水平力可以使质量为 15kg 的物体沿 20°斜面以 $25cm/s^2$ 的加速度向上滑动，求(a)作用于物体的摩擦力和(b)摩擦因数。

(答 (a)0.13kN；(b)0.65)

3.55 求图 3-20 中两个物体的加速度以及连接两物体的绳子的张力，忽略摩擦力。

(答 $3.3m/s^2$，13N)

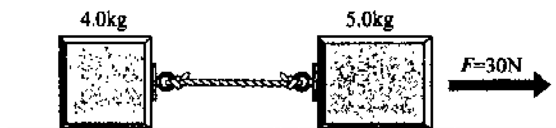


图 3-20

3.56 上题中若两物体与支承面之间的摩擦因数均为 0.30，情况如何？

(答 $0.39m/s^2$，13N)

3.57 如图 3-21 所示，若要使 6.0kg 的物体拉出并作 $1.50m/s^2$ 的加速运动，需要多大的力，假设接触面之间的摩擦因数均为 0.40？

(答 48N)

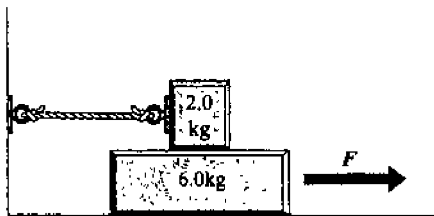


图 3-21

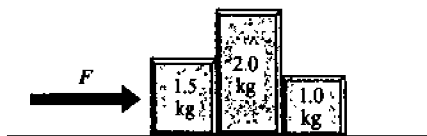


图 3-22

3.58 欲使图 3-22 中的物体作 $3.0m/s^2$ 的加速运动，力应该多大，假设物体与支承面之间的摩擦因数为 0.20？1.5kg 的物体施于 2.0kg 的物体的力为多大？

(答 22N，15N)

3.59 (a)37°的斜面上有一个 100N 的物体，斜面与物体之间的静、动摩擦因数均为 0.20。要使物体不下滑，至少要施加多大的沿斜面方向的力？(b)若要使物体沿斜面向上作匀速运动，沿斜面方向需施加多大的力？(c)如果这个沿斜面方向的推力为 94N，物体的加速度为多大？(d)如果(c)中的物体从静止开始，10s 内能滑行多远？

（答　(a)36N；(b)84N；(c)0.98m/s² 沿斜面向上；(d)49m）

3.60　一个质量为 5.0kg 的物体静止在 30°的斜面上，它们之间的静摩擦因数为 0.20。用一个水平力推这个物体，使它(a)即将向上滑动，(b)即将向下滑动。两种情况力的大小是多少？

（答　(a)43N；(b)16.6N）

3.61　系统如图 3-23 所示，求(a)系统的加速度和(b)两根绳子的张力。

（答　(a)0.39m/s²；(b)61N，85N）

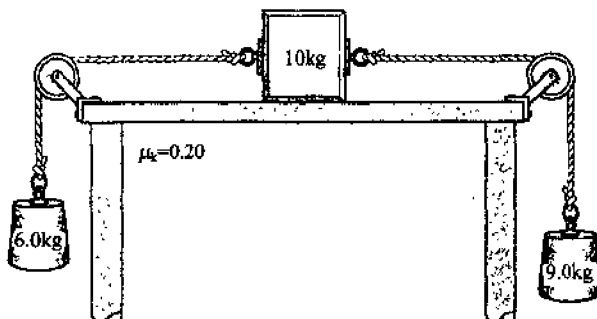


图 3-23

3.62　地球半径约为 6370km。质量为 20kg 的物体被带到地面以上 160km 处，求在这个高度上(a)物体的质量和(b)物体的重量(即它所受到的引力)。

（答　(a)20kg；(b)0.19kN）

3.63　火星半径为 3440km。求在地球上重量为 200N 的物体在火星上的重量以及火星上的重力加速度。已知火星质量为地球质量的 0.11 倍。

（答　75N，3.7m/s²）

第四章　在共点力作用下物体的平衡

共点力

若干个力，如果它们的作用线通过同一点，则这些力为共点力。作用在同一质点的力为共点力，它们都通过这个质点。

物体的平衡

受到共点力作用的物体，若其加速度为零，则称该物体处于平衡态。

平衡的第一条件

物体平衡的必要条件是作用于该物体的合外力为零

$$\sum \boldsymbol{F} = 0$$

或其分量形式

$$\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$$

若所有外力都是共点力，合力为零，这个条件也是充分的。若不是共点力，则物体平衡还须满足第二个条件，我们将在下一章讨论。

解题方法（共点力情况）

(1)隔离该物体；
(2)图示该物体所受到的力；
(3)找出每个力的直角坐标分量；
(4)以方程的形式列出平衡的第一条件；
(5)解方程求出各量。

物体的重量($\boldsymbol{F}_W$)

物体重量(即物体的重力)本质上是地球作用在物体上、指向地心的引力。

张力($\boldsymbol{F}_T$)

作用在弦线、缆绳、链索或任意结构部件并使其有拉伸趋势的力叫张力。

摩擦力($\boldsymbol{F}_f$)

作用在两个相互接触的物体并阻止它们发生相对滑动的切向力为摩擦力，摩擦力平行于接触面并与运动或运动趋势的方向相反。

法向力($\boldsymbol{F}_N$)

一个物体受到另一物体的支撑，这个垂直于接触面的支撑力就叫法向力。

例　题

4.1　在图4-1(a)中，水平绳索受的张力为30N，求物体的重力。

解答　绳1的张力等于它吊起物体的重力：$F_{T1} = F_W$。我们希望求出F_{T1}，即F_W。

注意：未知的 F_{T1} 和已知的 30N 的力都是作用于绳结 P 点的力。因此把绳结 P 抽象出来作为研究对象，并用隔离法分析其受力，如图 4－1(b)。

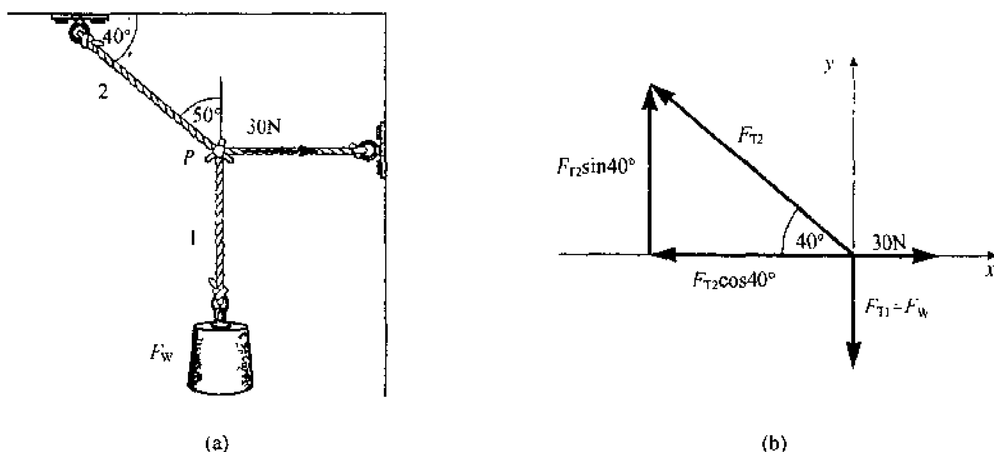


图 4－1

绳结平衡的第一条件 $\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 具体形式为

$$30\text{N} - F_{T2}\cos40° = 0$$

$$F_{T2}\sin40° - F_W = 0$$

解第一个方程得到 $F_{T2}=39.2$N，代入第二式得到 $F_W=25$N，即物体的重力。

4.2 两个立柱上悬一绳索，其间悬着一个 90N 的小孩，如图 4－2(a)所示。分别求两段绳索的张力。

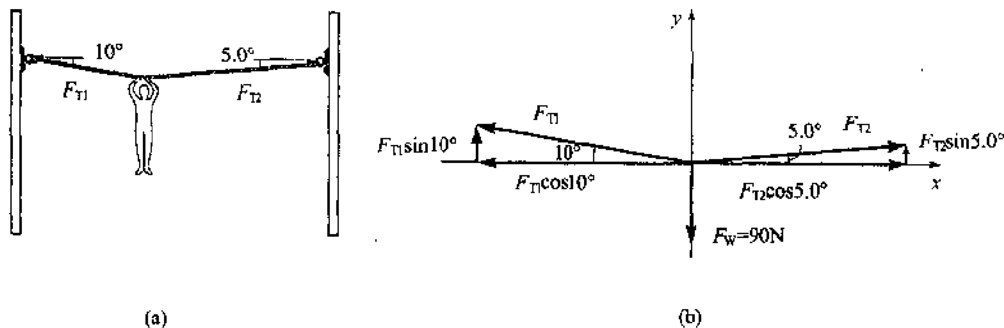


图 4－2

解 绳索左段和右段的张力分别记为 F_{T1} 和 F_{T2}。把绳索上悬挂小孩的部分抽象出来，并用隔离法画出力的分析图图 4－2(b)。

把力分解成水平和竖直两分量并列出平衡的第一条件：$\sum F_x = 0$ 和 $\sum F_y = 0$ 分别成为

$$F_{T2}\cos5.0° - F_{T1}\cos10° = 0$$

$$F_{T2}\sin5.0° - F_{T1}\sin10° - 90\text{N} = 0$$

从第一式可求得 $F_{T2}=0.990F_{T1}$，代入第二式得到

$$0.086F_{T1} + 0.174F_{T1} - 90 = 0$$

所以 $F_{T1}=0.35$kN，$F_{T2}=0.990$，$F_{T1}=0.34$kN。

4.3 一个 50N 的盒子受 25N 的拉力在水平地面上匀速移动，如图 4－3(a)所示。(a)盒子受到多大的摩擦力？(b)法向力多大？(c)盒与地面之间的摩擦因数为多少？

解 图中用 F_f 表示摩擦力，用 F_N 表示地面支撑盒子的法向力。力的分析图如图4－3(b)所示。由于盒子作匀速运动，它处于平衡状态。以向右为正，列出平衡的第一条件 $\sum F_x = 0$，即

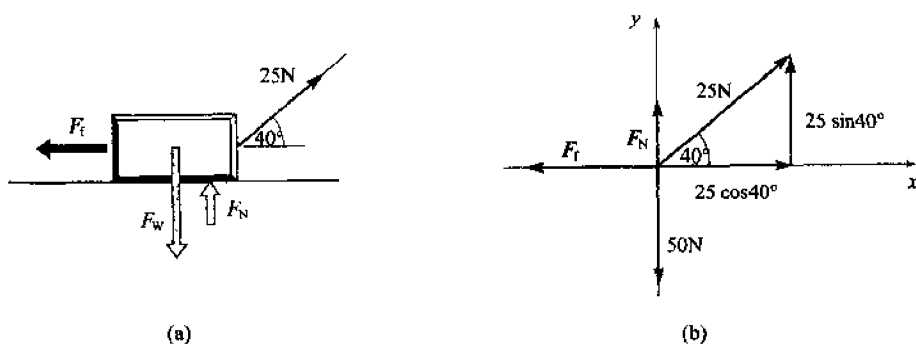


图 4－3

$$25\cos40° - F_f = 0$$

(a)解之得摩擦力 $F_f = 19.2N = 19N$(两位有效数字)

(b)应用 $\sum F_y = 0$,即

$$F_N + 25\sin40° - 50 = 0$$

解之得　$F_N = 33.9N = 34N$

(c)由 μ_k 的定义有

$$\mu_k = \frac{F_f}{F_N} = \frac{19.2N}{33.9N} = 0.57$$

4.4　求图 4－4(a)中各绳索的张力,已知物体的重力为 600N。

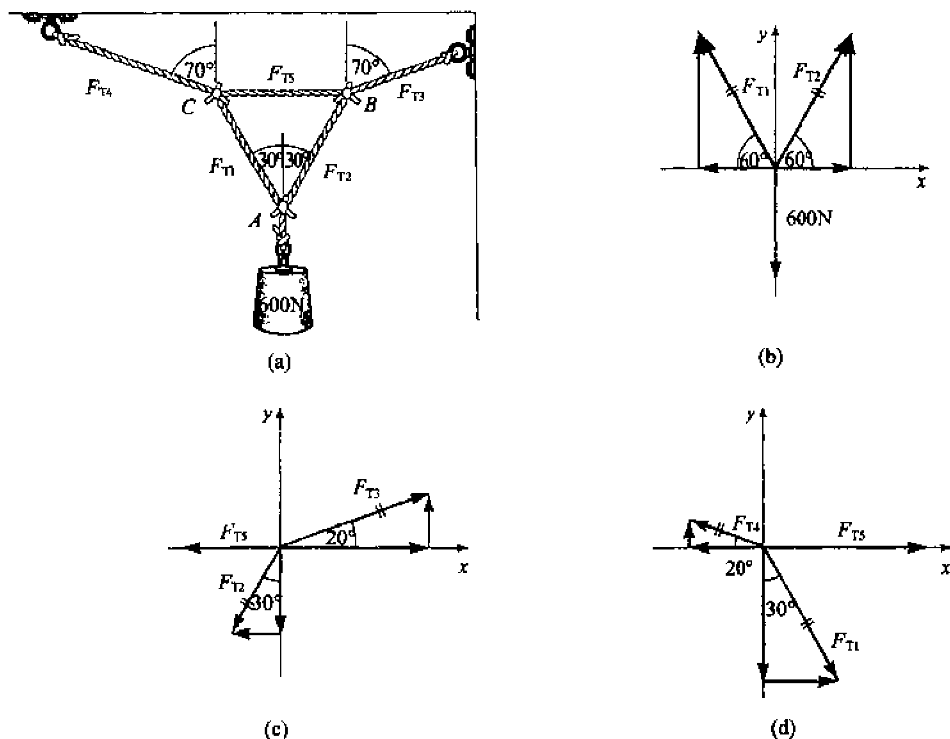


图 4－4

解 ☞　采用隔离法,把绳节 A 选作分析对象,600N 的重力作用于 A。受力分析图见图 4－4(b)。应用平衡的第一条件

$\underset{\to}{+}\sum F_x = 0$　　和　　$+\uparrow\sum F_y = 0$,　得到

$$F_{T2}\cos60° - F_{T1}\cos60° = 0$$

$$F_{T1}\sin60° + F_{T2}\sin60° - 600 = 0$$

从第一式得到 $F_{T1} = F_{T2}$(从对称性也可以推断出这个结论,同样得到 $F_{T3} = F_{T4}$)。代人第二式得到

$F_{T1}=F_{T2}=346\text{N}$。

再将绳节 B 选作分析对象，隔离法力的分析图见图 4-4(c)。已经求出 $F_{T2}=346\text{N}=0.35\text{kN}$。平衡方程为

$$F_{T3}\cos20°-F_{T5}-346\sin30°=0$$
$$F_{T3}\sin20°-346\cos30°=0$$

从第二式得出 $F_{T3}=877\text{N}=0.88\text{kN}$，代入第一式得到 $F_{T5}=651\text{N}=0.65\text{kN}$。由对称性可知 $F_{T4}=F_{T3}=877\text{N}=0.88\text{kN}$。

不借助对称性，你怎样求 F_{T4}？（提示：参见图 4-4(d)）

4.5 在图 4-5 中的各个物体均处在平衡状态。求它们各自受到的法向力。

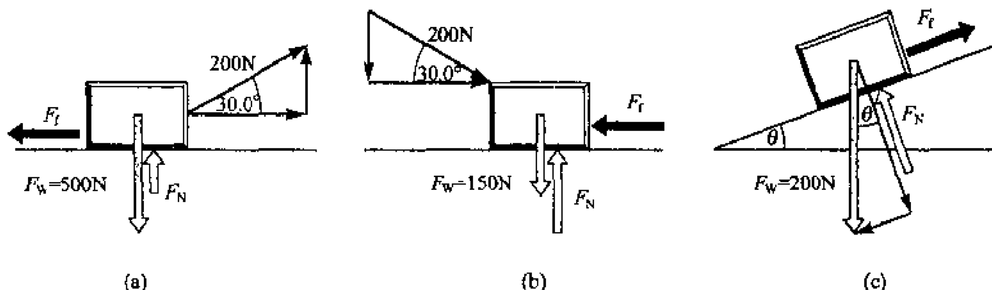


图 4-5

解☞ 对三种情况均应用平衡条件 $\sum F_y=0$ 得到

(a)$F_N+(200\text{N})\sin30.0°-500=0$，　所以 $F_N=400\text{N}$

(b)$F_N-(200\text{N})\sin30.0°-150=0$，　所以 $F_N=250\text{N}$

(c)$F_N-(200\text{N})\cos\theta=0$，　所以 $F_N=(200\cos\theta)\text{N}$

4.6 在上题中，若每个物体均作匀速运动，求出它们与接触面之间的滑动摩擦因数。精确到两位有效数字。

解☞ 在上题中已经求出三种情形下的 F_N，以下应用 $\sum F_x=0$ 来求滑动摩擦力，从而进一步求摩擦因数 μ_k。

(a)$200\cos30.0°-F_f=0$，所以 $F_f=173\text{N}$。

　$\mu_k=F_f/F_N=173/400=0.43$

(b)$200\cos30.0°-F_f=0$，所以 $F_f=173\text{N}$。

　$\mu_k=F_f/F_N=173/250=0.69$

(c)$-200\sin\theta+F_f=0$，所以 $F_f=(200\sin\theta)\text{N}$。

　$\mu_k=F_f/F_N=(200\sin\theta)/(200\cos\theta)=\tan\theta$

4.7 假设图 4-5(c)中的物体处于静止状态，然后逐渐增加斜面的倾角。在 $\theta=42°$时，物体开始下滑。求物体与斜面之间的静摩擦因数。

解☞ 当物体开始滑动时，摩擦力达到临界值。这时 $\mu_s=F_f/F_N$，应用上面解题的方法得到

$$F_N=F_W\cos\theta\qquad和\qquad F_f=F_W\sin\theta$$

在刚开始滑动时

$$\mu_s=\frac{F_f}{F_N}=\frac{F_W\sin\theta}{F_W\cos\theta}=\tan\theta$$

由题意，$\theta=42°$，所以 $\mu_s=\tan42°=0.90$

4.8 图 4-6(a)中，桌面上的物体向右作匀速运动，求物体与桌面之间的摩擦因数。假设定滑轮没有摩擦。

解☞ 20N 的物体作匀速运动，它处于平衡状态。又因滑轮无摩擦，滑轮两侧绳子的张力相等。$F_{T1}=F_{T2}=6.0\text{N}$。

　从力的分析图图 4-6(b)以及物体平衡条件可得到

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \quad 或 \quad F_f = F_{T2} = 8.0\text{N}$$

$$+\uparrow\sum F_y = 0 \quad 或 \quad F_N = 20\text{N}$$

所以

$$\mu_k = \frac{F_f}{F_N} = \frac{8.0\text{N}}{20\text{N}} = 0.40$$

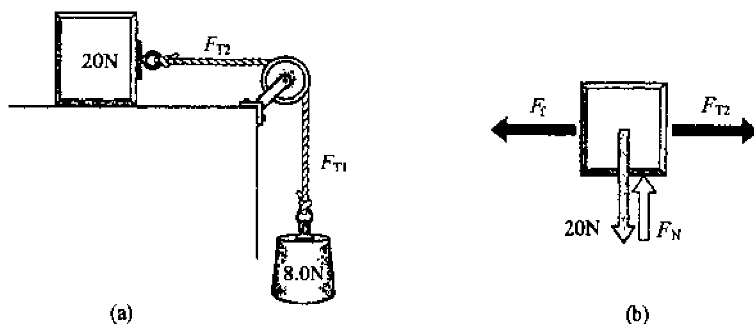


图 4－6

习　题

4.9　求图 4－7 中绳的张力 F_{T1} 和 F_{T2}。物体重量为 600N。
（答　503N,783N）

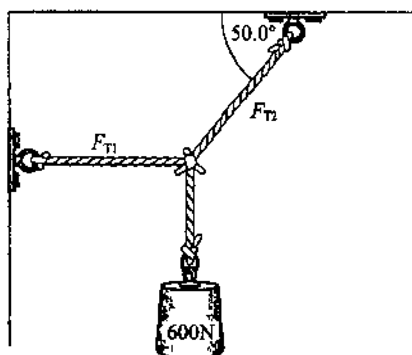


图 4－7

4.10　四个共面力拉一个圆环：200N 偏 30.0°，500N 偏 80.0°，300N 偏 240°，另一个力待求。假设环处于平衡态，求该未知力。
（答　350N 偏 252°）

4.11　在图 4－8 中的滑轮是没有摩擦的，图中系统处于平衡态。已知右边物体重力 F_{W3}＝200N，求 F_{W1} 和 F_{W2}。
（答　260N,150N）

4.12　假设图 4－8 中的 F_{W1}＝500N，系统仍处于平衡态，这时 F_{W2} 和 F_{W3} 为多少？
（答　288N,384N）

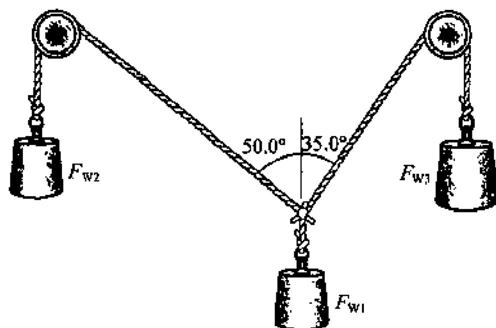


图 4－8

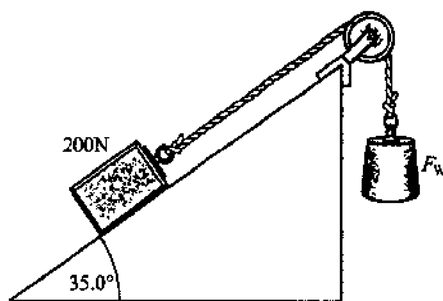


图 4－9

4.13　图 4－9 中的斜面光滑，斜面上 200N 的物体静止。求滑轮右侧物体的重量。
（答　115N）

4.14　上题中若 F_W＝220N，系统仍静止，求斜面与其上物体之间的摩擦力的大小和方向。
（答　105N，沿斜面向下）

4.15　图 4－10 中各物体均处于平衡态。求作用于各个物体的法向力。
（答　(a)34N；(b)46N；(c)91N）

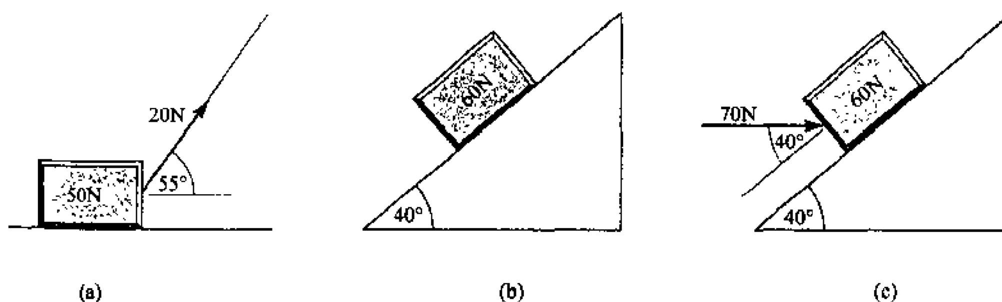


图 4－10

4.16 若图 4－10(a)中的物体在图示力的作用下匀速运动，(a)它受到多大的摩擦阻力？(b)物体与地面间的摩擦因数多大？

(答　(a)12N;(b)0.34)

4.17 若图 4－10(b)中的物体沿斜面匀速下滑，(a)它受到多大的摩擦阻力？(b)物体与平面间的滑动摩擦因数为多少？

(答　(a)39N;(b)0.84)

4.18 图 4－10(c)中的物体受到的推力增加到 70N 时，物体开始向上滑动。(a)它受到多大的临界静摩擦力？(b)求静摩擦因数。

(答　(a)15N;(b)0.17)

4.19 若图 4－11 中 $F_W=40N$，且处于平衡状态，求 F_{T1} 和 F_{T2}。

(答　58N,31N)

4.20 假设图 4－11 中的各条绳子可以承受的最大张力为 80N，系统处于平衡态，问绳子可承受 F_W 的最大值。

(答　55N)

4.21 图 4－12 中的物体处于平衡态，$F_W=80N$。求 F_{T1}、F_{T2}、F_{T3}和 F_{T4}，精确到两位有效数字。

(答　37N,88N,77N,0.14kN)

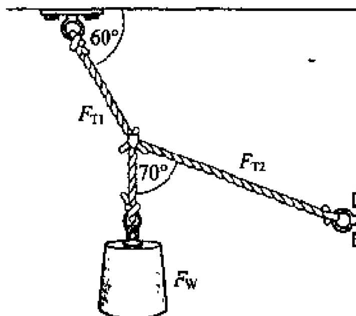


图 4－11

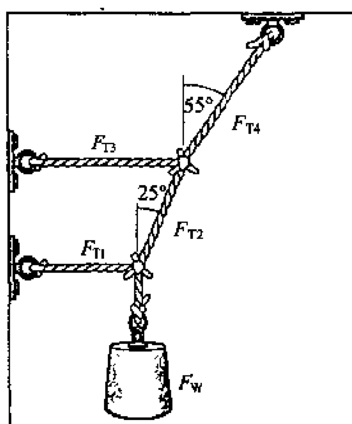


图 4－12

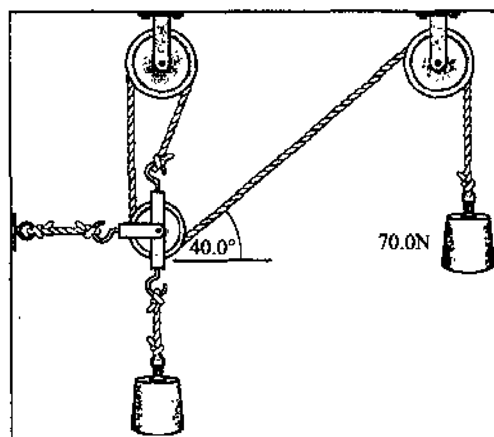


图 4－13

4.22 轻质无摩擦滑轮组如图 4－13。系统处于平衡态。求重力 F_W。

(答　185N)

4.23 图 4－14 的系统处于平衡态。(a)若作用于桌上物体的摩擦力不超过 12.0N，重物 F_W 的极大值为多少？(b)桌面与物体之间的静摩擦因数为多少？

(答　(a)6.9N;(b)0.30)

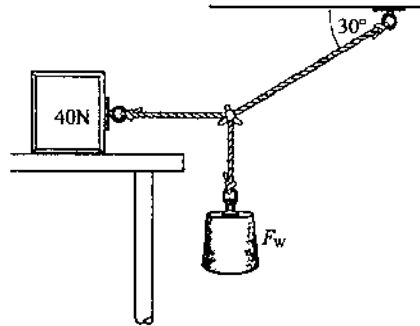


图 4 - 14

4.24 如上题中 $F_W=8.0\text{N}$ 时，桌上物体刚要开始滑动，它与桌面的静摩擦因数为多少？
（答　0.35）

第五章　共面力作用下的刚体平衡

转矩(力矩)

力相对于某转轴的转矩是该力使物体绕该轴转动的效力的度量，定义式如下：

$$转矩=\tau=rF\sin\theta$$

式中 r 为转轴到力的作用点之间的距离，而 θ 为矢量 $\boldsymbol{r}$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线之间的锐角，如图 5-1(a)所示。我们也可以用力臂来定义它，**力臂**即从轴到力的作用线（译注：包括反向延长线）的垂直距离，如图 5-1(b)所示：**力臂**$=r\sin\theta$，所以转矩可以写成

$$\tau=(F)(力臂)$$

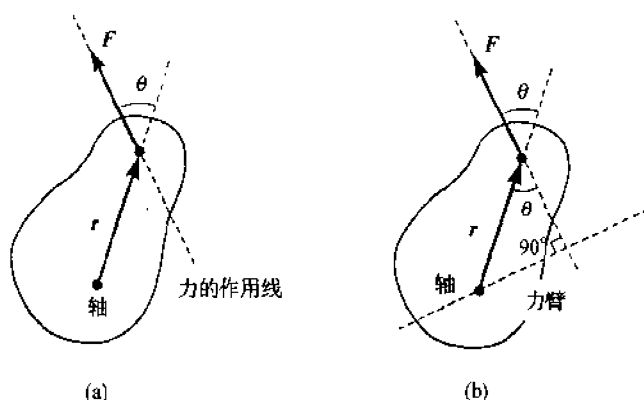


图 5-1

转矩的单位为牛顿·米(N·m)；**转矩的正负**规定如下：使物体绕轴作反时针旋转（或有旋转趋势），转矩为正，反之为负。

共面力作用下刚体平衡的两个条件

(1)第一条件（力的条件）：作用于该物体的力的矢量和为零：

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0$$

这里把共面力所处的平面定为 xy 平面。

(2)第二条件（转矩条件）：取转轴垂直于共面力所处的平面，并注意转矩正负的规定，刚体平衡的第二个条件为：作用在该物体的转矩和为零

$$\circlearrowleft \sum\tau=0$$

重心

物体重心是物体的重力作用线所通过的一个点，可以认为物体的重量都集中在这个点上。一个大小等于物体重力、方向竖直向上且通过物体重心的力可以使该物体保持平衡。

转轴位置的任意性

如果一个物体满足力的平衡条件，且作用在该物体上相对某转轴的转矩和等于零的话，则对于任何与此轴平行的轴，转矩和均为零。因此可以用下述方法选择转轴：选一个未知力的作用线与作用力平面的交点为转轴。这样 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的夹角 $\theta=0$，这个力的转矩就等于零，而不在转矩方程中出现。

例　题

5.1 求图 5－2 中各力相对于转轴 A 的转矩。

解 应用 $\tau=rF\sin\theta$，并记住顺时针转矩为负而逆时针转矩为正。这三个力的转矩分别为

对于 10N　$\tau=-(0.80\text{m})(10\text{N})(\sin 90^\circ)=-8.0\text{N}\cdot\text{m}$

对于 25N　$\tau=+(0.80\text{m})(25\text{N})(\sin 25^\circ)=+8.5\text{N}\cdot\text{m}$

对于 20N　$\tau=\pm(0.80\text{m})(20\text{N})(\sin 0^\circ)=0$

注意 20N 的力作用线通过转轴，$\theta=0^\circ$，或者从力臂角度分析，这时力臂为零。只要力的作用线通过转轴，以上两种分析都得到转矩为零的结论。

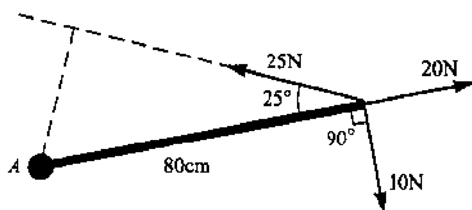


图 5－2

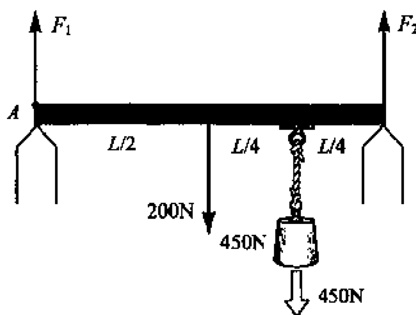


图 5－3

5.2 图 5－3 中重量为 200N 的匀质横梁上挂着一个重量为 450N 的物体。求梁两端支撑物对横梁作用力的大小。假设图中各长度都是精确的。

解 这时不必用隔离法画力的分析图，而在所讨论的物体(横梁)上画出各作用力，见图 5－3。由于横梁是匀质的，其重心即其几何中心。所以其重力 200N 作用于横梁中心。支点对梁的作用力为 F_1 和 F_2。由于没有 x 方向的作用力，平衡条件只是两个方程：$\sum F_y=0$ 和 $\sum\tau=0$。$\sum F_y=0$ 的形式为

$$F_1+F_2-200\text{N}-450\text{N}=0$$

先要选择转轴，才能写出转矩方程。选 A 为转轴，则未知力 F_1 通过该轴，它的转矩为零，转矩方程形式为

$$\circlearrowleft\sum\tau=-(L/2)(200\text{N})(\sin 90^\circ)-(3L/4)(450\text{N})(\sin 90^\circ)+LF_2\sin 90^\circ=0$$

除以 L，解得 $F_2=438\text{N}$，将 F_2 值代入第一式得到 $F_1=212\text{N}$。

5.3 图 5－4 所示为一个匀质、重量为 100N 的梁，一端挂 200N 的重物，另一端挂 500N 的重物。欲使其平衡，支点应在什么位置？支点对梁的反作用力有多大？

解 各作用力如图示，其中 F_R 为支点对梁的反作用力，假设支点距梁的左端距离为 x，并选该支点为转轴。转矩方程 $\circlearrowleft\sum\tau=0$ 形为

$$+(x)(200\text{N})(\sin 90^\circ)+(x-L/2)(100\text{N})(\sin 90^\circ)-(L-x)(500\text{N})(\sin 90^\circ)=0$$

简化得

$$(800\text{N})(x)=(550\text{N})L$$

所以 $x=0.69L$

应用 $+\uparrow\sum F_y=0$，即*

$$F_R-200\text{N}-100\text{N}-500\text{N}=0$$

得到 $F_R=800\text{N}$。

* 原书该式中没有 F_R——译注。

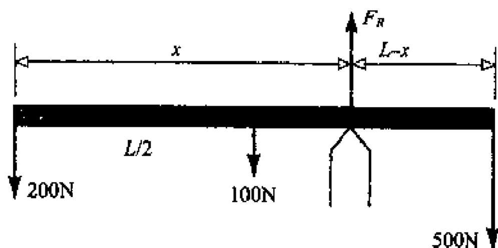


图 5-4

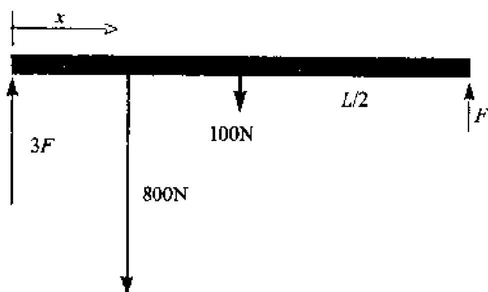


图 5-5

5.4 匀质、水平的刚性杆长度为 L、重量为 100N。一个小孩和一个大人分别向上推杆的两端。若小孩的力只有大人的三分之一，在杆的什么位置挂 0.80kN 的重物能使杆保持平衡？

解答 在图 5-5 中，用 F 表示小孩的力，用 $3F$ 表示大人的力，选杆的左端为转轴，则转矩方程为

$$-(x)(800\text{N})(\sin 90°)-(L/2)(100\text{N})(\sin 90°)+(L)(F)(\sin 90°)=0$$

第二个方程 $\sum F_y=0$，即

$$3F-800\text{N}-100\text{N}+F=0$$

解之得 $F=225\text{N}$，代入第一式得

$$(800\text{N})(x)=(225\text{N})(L)-(100\text{N})(L/2)$$

所以 $x=0.22L$。即在距左端 $0.22L$ 处悬挂重物可保持平衡。

5.5 在长度为 L、重量为 0.20kN 的匀质杆上 $L/3$ 处挂重物 300N，在 $3L/4$ 处挂 400N。为使杆保持平衡，需对杆施加一个多大的力？

解答 杆受力如图 5-6 所示，其中 F 即为所求。由平衡条件 $\sum F_y=0$ 有

$$F=400\text{N}+200\text{N}+300\text{N}=900\text{N}$$

由于杆处于平衡态，我们可以任选轴的位置，比如选在左端 A 处，由 $\sum\tau=0$ 有

$$+(x)(F)(\sin 90°)-(3L/4)(400\text{N})(\sin 90°)-(L/2)(200\text{N})(\sin 90°)-(L/3)(300\text{N})(\sin 90°)=0$$

代入 $F=900\text{N}$，得到 $x=0.56L$。即需要 0.90kN 的力作用于距左端 $0.56L$ 处。

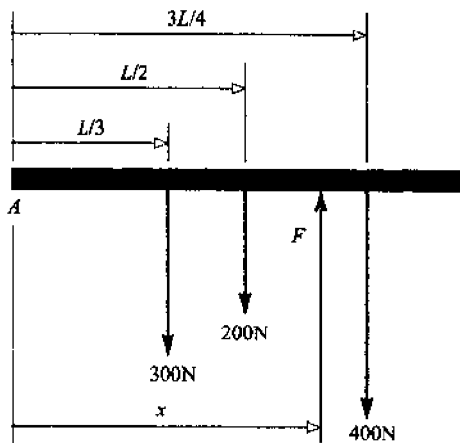


图 5-6

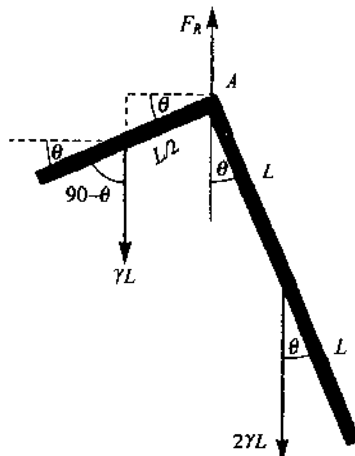


图 5-7

5.6 一个直角规静止地挂在钉上，如图 5-7 所示。规的两边长度分别为 L 和 $2L$，求其长边与铅垂线之间的夹角 θ（两位有效数字）。

解答 设 γ 为直角规单位长度的重量。规所受的力如图 5-7 所示，其中 F_R 为钉子向上的反作用力。

以 A 为轴，写出转矩方程。由于 $\tau=\gamma F\sin\theta$，F_R 关于轴的转矩为零，所以有

$$+(L/2)(\gamma L)[\sin(90^\circ-\theta)]-(L)(2\gamma L)(\sin\theta)=0$$

由于 $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$，代入并除以 $2\gamma L^2\cos\theta$ 得

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\frac{1}{4}$$

所以 $\theta=14^\circ$

5.7 如图 5-8(a)所示，重量为 0.60kN 的匀质梁左端为固定转轴。求绳的张力以及轴对梁的作用力，要求两位有效数字。

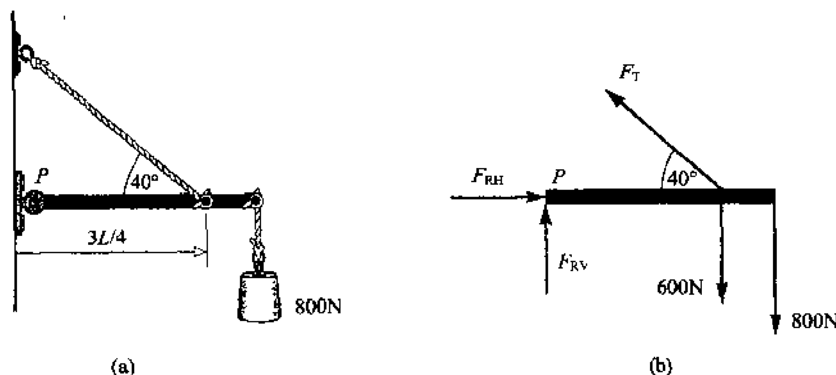


图 5-8

解 作用于梁的力见图 5-8(b)，固定转轴对梁的作用力分量为 F_{RH} 和 F_{RV}。以 P 为转轴写出转矩方程为

$$+(3L/4)(T)(\sin40^\circ)-(L)(800\text{N})(\sin90^\circ)\quad(L/2)(600\text{N})(\sin90^\circ)=0$$

注意以 P 为轴，则 F_{RH} 和 F_{RV} 的转矩均为零。解方程得到

$$F_T=2280\text{N}=2.3\text{kN}$$

为了求 F_{RH} 和 F_{RV}，由 $\sum F_x=0$ 和 $\sum F_y=0$ 得到

$$-F_T\cos40^\circ+F_{RH}=0$$

$$F_T\sin40^\circ+F_{RV}-600\text{N}-800\text{N}=0$$

所以 $R_{RH}=1750\text{N}=1.8\text{kN}$，$F_{RV}=65.6\text{N}=66\text{N}$

5.8 图 5-9(a)所示匀质吊杆重量为 0.40kN。求绳的张力以及轴钉 P 对吊杆的作用力。

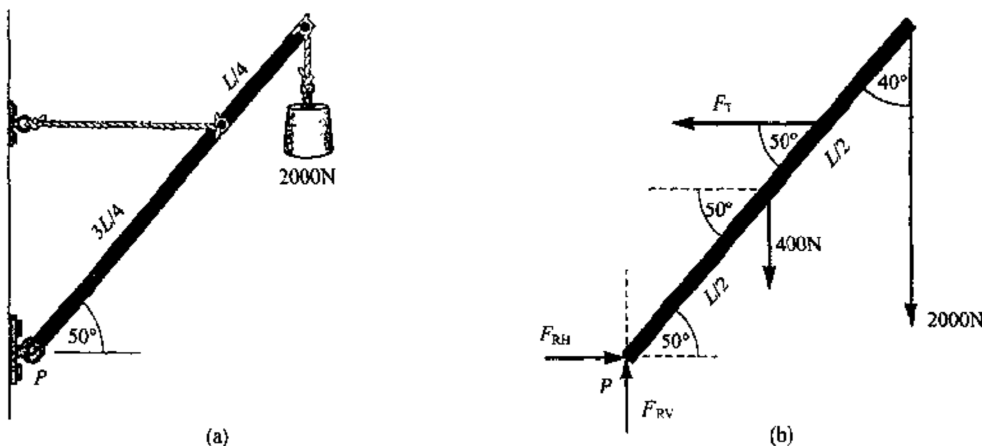


图 5-9

解 吊杆受力见图 5-9(b)。以轴钉为转轴写出转矩方程为

$$+(3L/4)(F_T)(\sin50^\circ)-(L/2)(400\text{N})(\sin40^\circ)-(L)(2000\text{N})(\sin40^\circ)=0$$

所以 $F_T=2460\text{N}=2.5\text{kN}$，又

$\underset{\rightarrow}{+}\sum F_x = 0$ 的具体形式为 $F_{RH} - F_T = 0$

所以 $F_{RH}=2.5\text{kN}$,同样写出

$$\sum F_y = 0 \quad 即\ F_{RV} - 2000\text{N} - 400\text{N} = 0$$

得到 $F_{RV}=2.4\text{kN}$。F_{RH} 和 F_{RV} 为轴钉作用力的分量,力的大小为

$$\sqrt{(2400)^2+(2460)^2} = 3.4(\text{kN})$$

吊杆与水平方向夹角为 θ,$\tan\theta=2400/2460$,所以 $\theta=44°$。

5.9 图 5-10 为折页 A 和 B 支持着一个重量为 400N 的匀质门板,两折页间距为 h,而门板宽为 $h/2$。若上折页正好承担了门的全部重量。两折页对门各施加多大的力?

解 门受力如图 5-10 所示,由题意,上折页承担了门的全部重量,B 处只有水平方向的力。写出关于 A 点的转矩方程:

$\circlearrowleft\sum\tau = 0$ 形式为

$$(h)(F)\sin(90.0°)-(h/4)(400\text{N})(\sin 90.0°)=0$$

得到 $F=100\text{N}$。

同样由 $\underset{\rightarrow}{+}\sum F_x = 0$ 和 $+\uparrow\sum F_y = 0$ 得到

$$F - F_{RH} = 0$$

$$F_{RV} - 400\text{N} = 0$$

所以 $F_{RH}=100\text{N}$,$F_{RV}=400\text{N}$

折页 A 处的合力为

$$F_R = \sqrt{(400)^2+(100)^2} = 412(\text{N})$$

F_R 与 x 轴的反方向夹角的正切为 F_{RV}/F_{RH},即 $\arctan 4.00=76.0°$

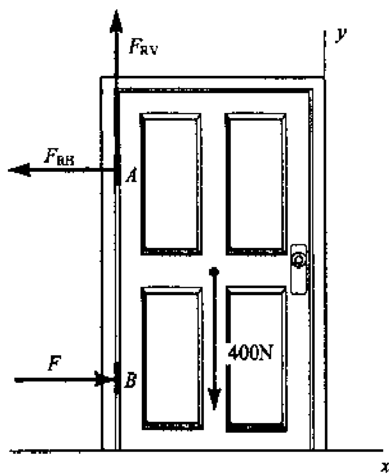


图 5-10

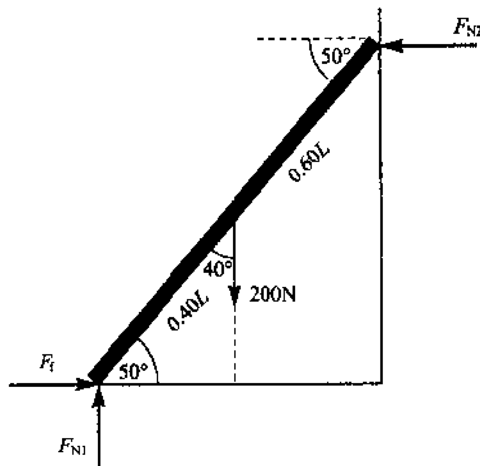


图 5-11

5.10 梯子靠在光滑墙体上(所谓光滑即没有摩擦力,墙对梯子只有垂直于墙方向的力)。梯子重量为 200N,而重心距梯子底部为 $0.4L$,L 为梯子总长度。(a)为使梯子不滑动,梯子底部必须受到多大的摩擦力?(b)静摩擦因数需等于多少?

解 (a)设所求的底部摩擦力为 F_f,而顶部无摩擦力,以 A 点为轴的转矩方程为

$$\circlearrowleft\sum\tau_A = -(0.40L)(200\text{N})(\sin 40°)+(L)(F_{N2})\sin 50°=0$$

解得 $F_{N2}=67.1\text{N}$,同样

$$\sum F_x = 0 \quad 为 \quad F_f - F_{N2} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 为 \quad F_{N1} - 200\text{N} = 0$$

解得 $F_f=67\text{N}$

$F_{N1}=0.20\text{kN}$

(b)
$$\mu_k=\frac{F_f}{F_{N1}}=\frac{67.1}{200}=0.34$$

5.11　如图 5－12(a)，匀质吊杆重量为 800N。求 F_{T1}、F_{T2} 和 F_{T3}。

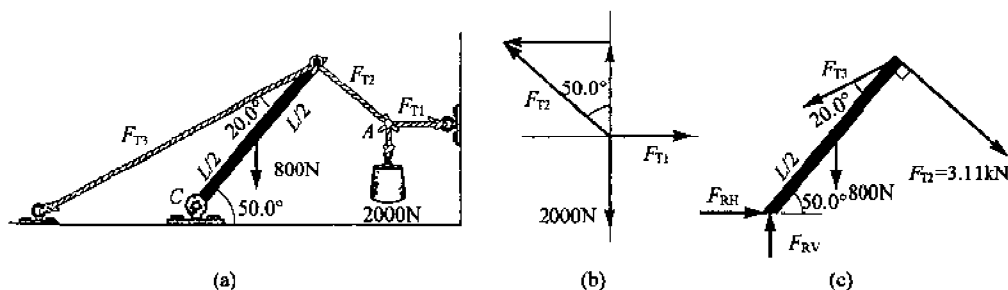


图 5－12

解　先写出 A 点处力的平衡条件。绳节 A 点的受力分析见图 5－12(b)，可见

$$F_{T2}\cos 50.0^\circ - 2000\text{N} = 0$$

和

$$F_{T1} - F_{T2}\sin 50.0^\circ = 0$$

解得　$F_{T2}=3.11\text{kN}$，$F_{T1}=2.38\text{kN}$。

吊杆的受力如图 5－12(c)所示。取轴钉 C 为轴，其转矩方程为

$$\circlearrowleft \sum \tau_c = +(L)(F_{T3})(\sin 20.0^\circ) - (L)(3110\text{N})(\sin 90.0^\circ) - (L/2)(800\text{N})(\sin 40.0^\circ) = 0$$

解之得 $F_{T3}=9.84\text{kN}$(如果需要我们还可根据 x 方向和 y 方向力的平衡条件进一步求出其水平、竖直分量 F_{RH} 和 F_{RV})。

习　　题

5.12　图 5－13 所示，两个人坐在汽车中，汽车重量为 8000N，前后轮间距为 L，车的重心在前轮后 $0.400L$ 处。前座的人重量为 700N，后座的人为 900N，设他们均坐在汽车的中线上，每个前后轮各承担多少重量？

(答　2.09kN，2.71kN)

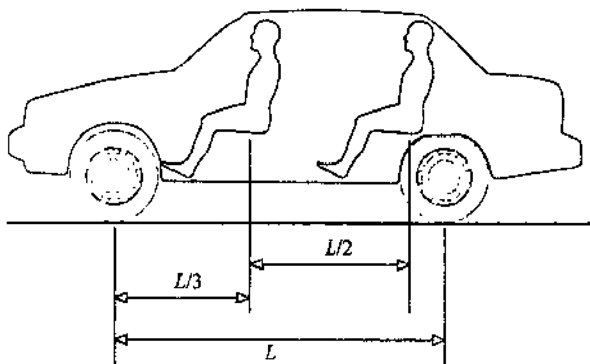


图 5－13

5.13　匀质横梁重 400N，与水平成 25.0°，两个人各担一端，问每个人要受到多大的竖直方向的力。

(答　200N)

5.14　上题中若重量为 140N 的小孩坐在横梁上距后端四分之一处，情况又如何？

(答　235N，305N)

5.15　匀质吊杆重量为 1600N，一端与轴钉相连，另一端受绳子拉住，如图 5－14。求绳的张力以及轴钉受力的各分量。

(答　$F_T=0.67\text{kN}$，$F_{RH}=0.67\text{kN}$，$F_{RV}=1.6\text{kN}$)

5.16　图 5－15 为重量为 500N 的匀质吊杆，在末端悬挂一 700N 的重物。求绳的张力以及轴钉对节杆的作用力。

（答　2.9kN，2.0kN　水平线下方 35°）

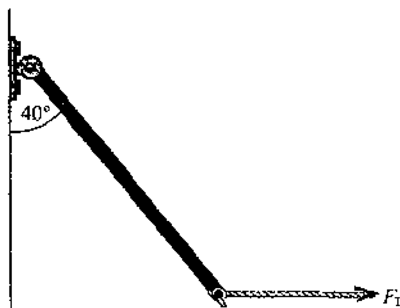


图 5－14

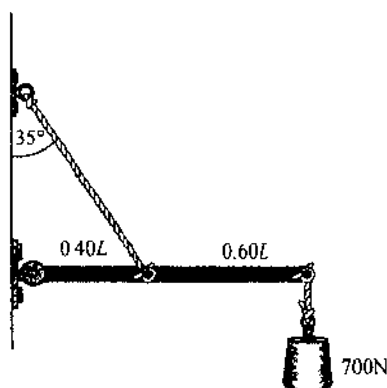


图 5－15

5.17　图 5－16 为手臂示意图。手中握着一个 4.0kg 的铅球。手与前臂的总质量为 3.0kg，而它们的重力作用点距肘关节 15cm。求二头肌受力。

（答　0.13kN）

5.18　图 5－17 所示系统处于平衡态。三个物体竖直挂在横杆下，匀质等长横杆重量均为 0.50N。已知物 3 重量 1.40N。求(a)物 1、物 2 的重量，(b)靠上方的悬线的张力。

（答　(a)1.5N，1.4N；(b)5.3N）

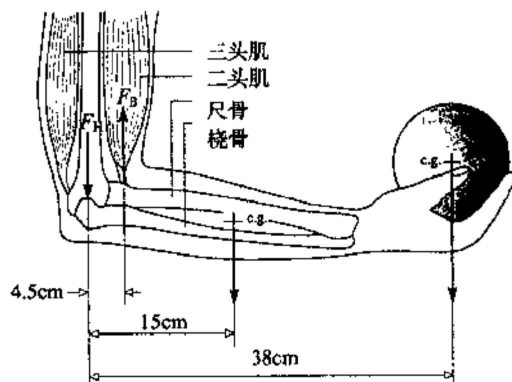


图 5－16

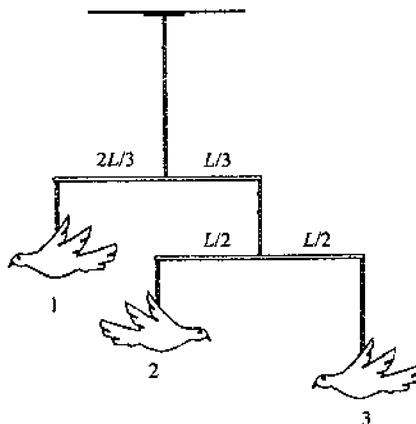


图 5－17

5.19　重量为 200N、宽 1.0m 的门连结于两个折页。两折页相距 2.5m，上折页距门顶边 d，下折页距门底边也为 d。下折页支撑门的全部重量。求折页对门的作用力。

（答　上折页水平方向力为 40N，下折页作用力与水平成 79°偏上，大小为 0.20kN）

5.20　如图 5－18 所示，长度为 L、重量为 40N 的匀质杆受到 4 个外力作用。为使它保持平衡，需在何处对它施加多大的力，力的方向如何？

（答　0.11kN，距右端 0.68L，在水平上 49°角）

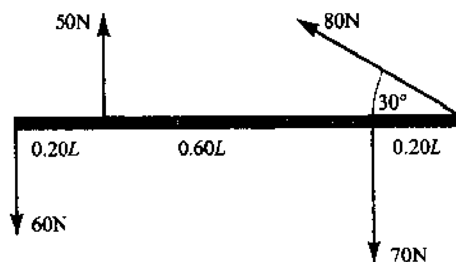


图 5－18

5.21 长 L、重 120N 的匀质杆吊在两绳末端，如图 5-19 所示。有一个 0.40kN 的物体吊在杆距左端 1/4 处。求 F_{T1}、F_{T2} 和 θ。

（答　0.19kN，0.37kN，14°）

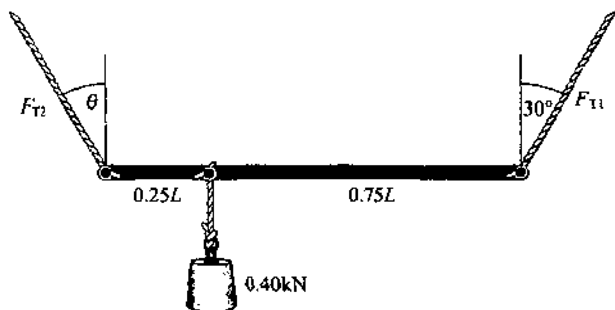


图 5-19

5.22 如图 5-20 所示，长度 L、重量 100N 的梯子底部抵在墙角，顶部由绳子拉住。已知梯子重心距底部 0.40L 处，在距顶部 0.20L 处悬吊一 150N 的物体。求绳子张力以及墙对梯子底部作用力的各分量。

（答　$F_T=0.12\text{kN}$，$F_{RH}=0.12\text{kN}$，$F_{RV}=0.25\text{kN}$）

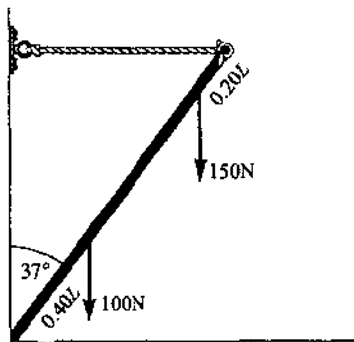


图 5-20

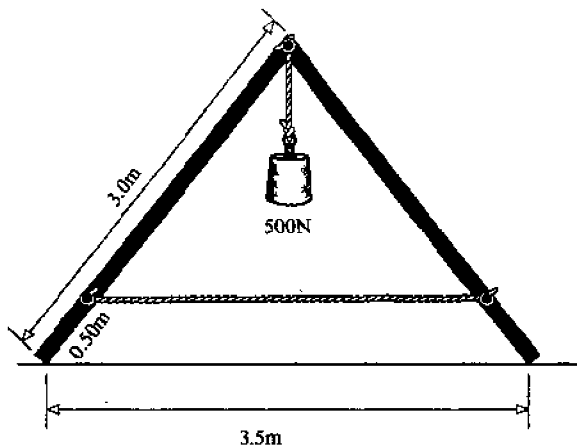


图 5-21

5.23 两个重量均为 150N 的匀质木椽搭成一个架子，如图 5-21 所示。架子下部由绳拉紧，架顶悬挂 500N 的物体。地面相当光滑。求绳的拉力。

（答　0.28kN）

5.24 重量 900N 的碾子遇到一个 5.0cm 高的障碍物。碾子半径为 25cm。求当拉力与水平夹角 θ 为(a)0°，(b)30°时，能拉动碾子所需最小的力。（提示：即碾子卡在障碍物边缘，刚要离开地面时力的大小）

（答　(a)0.68kN；(b)0.55kN）

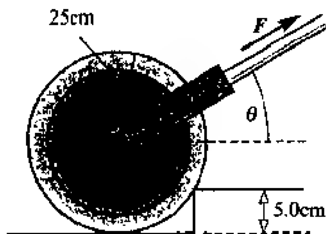


图 5-22

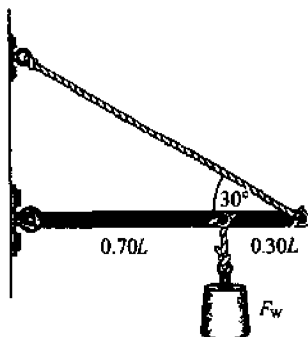


图 5-23

5.25 重 500N、长 L 的匀质吊杆如图 5-23，如果绳子最大能承受 1800N 的张力，求它能悬挂的最大重量 F_W。

（答　0.93kN）

5.26 图 5-24 中的吊杆质量可以忽略，而 $F_{W1}=500N$。若系统平衡，F_{W2}应多重？

（答　0.64kN）

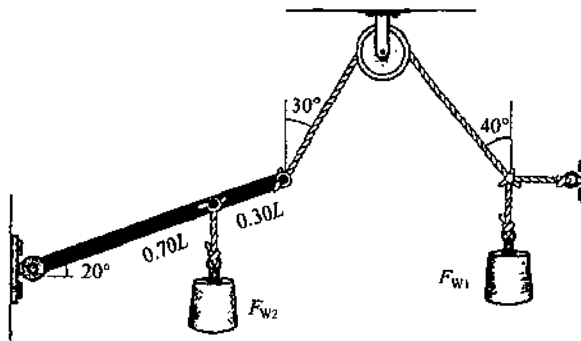


图 5-24

5.27 若上题中的吊杆重 300N，$F_{W2}=500N$，求 F_{W1} 值。

（答　0.56kN）

5.28 一物体受力如图 5-25 所示。若使物体处于平衡态，须在 x 轴上什么位置、施加多大的力（大小和方向）？先要求出力的分量，再求其大小。

（答　$F_x=232N, F_y=-338N; F=410N$，与 x 方向成$-55.5°$，$x=2.14m$）

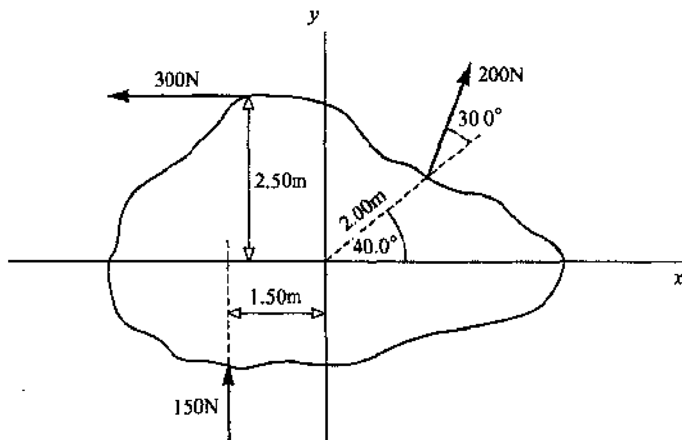


图 5-25

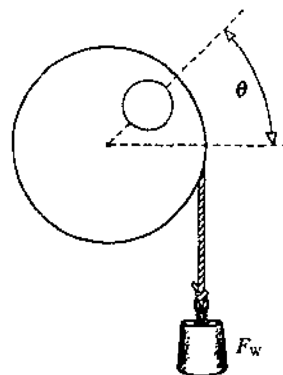


图 5-26

5.29 如图 5-26 所示，一个半径为 b 的匀质圆盘可绕中心轴自由转动。在距盘中心 r 处钻了一个直径为 D 的孔，钻掉部分的重量为 F_{Wh}。圆盘边缘绕有细绳，绳末端吊一个物体，如图 5-26 所示。欲使系统处于平衡态，吊起的物体重量 F_W 应为多少？

（答　$F_W=F_{Wh}(r/b)\cos\theta$）

第六章　功、能量和功率

功

力对物体作功定义为力沿物体位移方向的分量与物体位移的乘积。考察图 6-1 中物体作直线运动的简单情况，物体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下位移矢量为 $\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{F}$ 在矢量 $\boldsymbol{s}$ 方向的分力为 $F\cos\theta$。这时功定义为 $\boldsymbol{F}$ 沿位移方向的分力乘以位移

$$W = (F\cos\theta)(s) = Fs\cos\theta$$

此处 θ 为力矢量与位移矢量的夹角。功是标量。

如果 $\boldsymbol{F}$ 和 s 方向相同，则 $\cos\theta=\cos0°=1$，$W=Fs$；若方向相反，则 $\cos\theta=\cos180°=-1$，$W=-Fs$，功为负值。有些力，比如摩擦力，经常使物体运动减慢，力的方向与位移方向相反，它们作负功。由于摩擦力阻碍物体运动，克服摩擦力所作的功就等于摩擦力 F_f 与物体走过的路程之积。这种路程可能是直线，也可能是曲线。所以，克服摩擦力拖动物体最终又回到起始点，纯位移为零，仍然要作功。功是能量以下述方式从一个物体到另一个物体的转移：力作用于后者一段距离。力的作用点移动，才能作功。

功的单位

在国际单位制(SI)中，功的单位是 N·m，称为焦耳(J)。1J 的功等于 1N 的力使物体在力的作用方向移动 1m。有时也用到其他单位，如尔格(erg)，$1\text{erg}=10^{-7}\text{J}$，如英尺·磅力(ft·lbf)，1ft.lbf=1.355J。

能量

能量是物体状态改变的度量。力对物体作功，即有能量转移到了该物体，转移的能量等于所作的功。一个物体作功了，它就损失了能量，损失的能量等于它所作的功。能量和功的单位都是焦耳，能量也是标量。一个物体能作功，我们就说它具有能量。

动能(KE)

运动的物体具有动能。质量为 m 的物体，运动速率为 v，其平动动能为

$$\text{KE} = \frac{1}{2}mv^2$$

若质量以 kg 为单位，速率以 m/s 为单位，动能的单位为 J。

重力势能(PE_G)

物体由于受重力作用所具有的能量叫重力势能。质量为 m 的物体下落了竖直距离为 h 所作的功为 mgh。人们相对于一个任意的零高度(经常是地球的表面)，来定义重力势能：

$$\text{PE}_\text{G} = mgh$$

式中 g 是重力加速度。注意 mg 就是物体的重量。当 m 以 kg 为单位，g 以 m/s^2 为单位，h 以 m 为单位时，重力势能的单位为 J。

功能原理

当外力对一个质点或刚体作功，而又没引起势能变化时，作功将完全转化为其动能。因为物体不可能是绝对刚性的，也会有部分能量转移到物体的各个部分，这时外力对物体所作的功就不严格等于物体动能的改变量了。

能量守恒

能量不能产生,也不能消灭,只能从一种形式转变成另一种形式。质量也可以看成一种能量。狭义相对论所预言的质量-能量的相互转化*,在一般情况下是可以忽略的。具体内容将在第四十一章中讨论。

功率

单位时间内所作的功叫功率。

$$\text{平均功率}=\frac{\text{作功}}{\text{作功所花时间}}=\text{力}\times\text{速率}$$

这里速率是指物体沿力的方向运动的速率。广义地说,功率是能量传播的速率。在国际单位制(SI)中,功率的单位为瓦特(W),1W=1J/s。还有一种单位称马力(hp),1hp=746W。

千瓦小时(kW·h)

千瓦小时是能量单位。如果力作功的功率为1kW(即1000J/s),则一小时内所作的功为1千瓦小时:

$$1\text{kW}\cdot\text{h}=3.6\times10^{6}\text{J}=3.6\text{MJ}$$

例　　题

6.1 图6-1中,75N的外力与地面成28°角,拉一个物体在地面走过8.0m距离。问力作功多少?

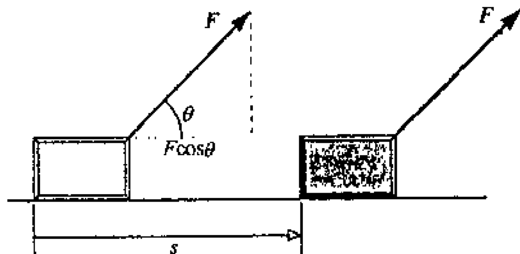


图6-1

解 作功等于位移8.0m乘以力沿位移方向的分力,(75N)(cos28°),所以

$$W=(75\text{N})(\cos28°)(8.0\text{m})=0.53\text{kJ}$$

6.2 图6-2所示,木块在30°斜面上受到三个力作用:$\boldsymbol{F}_1$沿水平方向,大小为40N;$\boldsymbol{F}_2$垂直于斜面,20N;$\boldsymbol{F}_3$平行于斜面,30N。物体沿斜面上升了80cm。求每个力对木块作的功。

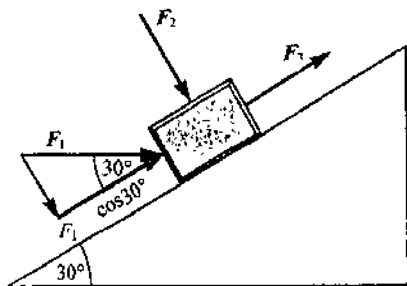


图6-2

解 $\boldsymbol{F}_1$沿斜面的分量为

$$F_1\cos30°=(40\text{N})(0.866)=34.6\text{N}$$

所以$\boldsymbol{F}_1$所作的功为(34.6N)(0.80m)=28J(注意,距离的单位为m)。

由于$\boldsymbol{F}_2$沿物体位移方向的分量为零,所以它不作功。

* "质量与能量相互转化"只是一部分人的看法——中文版责任编辑。

F_3 沿斜面方向的分量就是 30N，它所作的功为(30N)(0.80m)=24J。

6.3 一个 300g 物体在水平桌面上滑行了 80cm。若物体与桌面之间的滑动摩擦因数为 0.20，求克服摩擦力所作的功。

解☞ 先求摩擦力。由于法向力就等于重力，所以

$$F_f=\mu_k F_N=(0.20)(0.300\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)=0.588\text{N}$$

摩擦力所作的功等于 $F_f s\cos\theta$。由于摩擦力与位移反方向，$\theta=180°$，所以

$$W=F_f s\cos 180°=(0.588\text{N})(0.80\text{m})(-1)=-0.47\text{J}$$

功为负值表明摩擦力使运动减慢，动能减小。外力克服摩擦力作功即为 0.47J。

6.4 将 3.0kg 物体竖直升高 40cm 要克服重力作多少功？

解☞ 升高物体需有外力。若物体匀速上升，则外力等于物体重力，它所作的功即它克服重力所作的功。所以

$$W=(mg)(h)(\cos\theta)=(3.0\text{kg}\times 9.81\text{m/s}^2)(0.40\text{m})(1)=12\text{J}^*$$

一般地说，把质量为 m 的物体提升竖直距离为 h，则克服重力所作的功为 mgh。

6.5 当物体下降竖直距离为 h，支撑它的力作功多少？重力又对它作功多少？

解☞ 设物体的质量为 m，支撑力为 mg。位移向下，而支撑力指向上。所以支撑力作功为

$$Fs\cos\theta=(mg)(h)(\cos 180°)=-mgh$$

作用于该物体的重力也为 mg，但重力与位移方向相同，都向下。所以重力作功为

$$Fs\cos\theta=(mg)(h)(\cos 0°)=mgh$$

6.6 重量为 200N 长度为 3.0m 的梯子，其重心距底部 120cm 处。在梯子顶端有一 50N 的物体。求将梯子从地面立起来所需的功。

解☞ 外力克服重力所作的功分为两部分：使梯子的重心升高 1.20m 和使顶端的物体升高 3.0m 所作的功。所以

$$W=(200\text{N})(1.20\text{m})+(50\text{N})(3.0\text{m})=0.39\text{kJ}$$

6.7 油泵将 600L 的燃油泵入 20m 高的油罐里，已知每 cm^3 油的质量为 0.82g，1L 等于 1000cm^3。油泵作了多少功？

解☞ 这些油的总质量为

$$(600\text{L})\left(1000\,\frac{\text{cm}^3}{\text{L}}\right)\left(0.82\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)=492000\text{g}=492\text{kg}$$

作功 $W=(mg)(h)=(492\text{kg}\times 9.81\text{m/s}^2)(20\text{m})=96\text{kJ}$

6.8 质量 2.0kg 的物体下降了 400cm。(a)重力对它作了多少功？(b)它减少了多少重力势能 PE_G？

解☞ 重力 mg 将该物向下拉，物在重力方向位移为 4.00m。重力作功为

$$(mg)(h)=(2.0\text{kg}\times 9.81\text{m/s}^2)(4.00\text{m})=78\text{J}$$

物体势能改变为 mgh_f-mgh_i，其中 h_i 和 h_f 分别为物体相对于某一参考平面的初始高度和最后高度。所以有

$$\text{势能改变}=mgh_f\quad mgh_i=mg(h_f-h_i)=(2.0\text{kg}\times 9.81\text{m/s}^2)(-4.0\text{m})=-78\text{J}$$

即重力势能 PE_G 减少了 78J。

6.9 1.50N 的力作用于气垫导轨上 0.20kg 的小车，使其从静止开始作加速运动。走了 30cm。导轨与外力方向相同且都在同一水平面内，它们之间的摩擦可以忽略。求小车最终的速率。

解☞ 外力作功使得小车动能增加且两者相等。所以有

$$W=(\text{最终动能})-(\text{初始动能})\quad\text{或}\ Fs\cos 0°=\frac{1}{2}mv_f^2-0$$

---

* 原书中误印成(3.0kg×9.81N)——译注。

代入具体数值

$$(1.50\text{N})(0.30\text{m})=\frac{1}{2}(0.20\text{kg})v_f^2$$

解得 $v_f=2.1\text{m/s}$。

6.10 质量 0.50kg 的木块以初始速率 20cm/s 在桌面上滑动了 70cm 后停止。求平均摩擦力。

解 ☞ 木块动能的减小是由于摩擦力的减速作用。即木块动能改变=摩擦力作功

$$\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=F_f s\cos\theta$$

由于摩擦力与位移方向相反，$\cos\theta=-1$，

代入 $v_f=0, v_i=0.20\text{m/s}, s=0.70\text{m}$ 得

$$0-\frac{1}{2}(0.50\text{kg})(0.20\text{m/s})^2=(F_f)(0.70)(-1)$$

解得 $F_f=0.014\text{N}$。

6.11 速率为 15m/s 的汽车撞上一堆垃圾后又走了 2.0m 而停止。求安全带平均施加给一个 90kg 的乘客以多大的力。

解 ☞ 假设安全带对乘客的平均作用力为 F，F 的作用距离为 2.0m，使乘客的动能减至零。所以乘客动能减少等于 F 所作的功，即

$$0-\frac{1}{2}(90\text{kg})(15\text{m/s})^2=(F)(2.0\text{m})(-1)$$

解得 $F=5.1\text{kN}$(注意安全带对乘客的作用与位移反向，所以 $\cos\theta=-1$)

6.12 在地面竖直上抛一物体，初速度为 20m/s。求物体速率达 8.0m/s 时所处的高度。忽略空气的阻力。

解 ☞ 由于抛体的能量守恒，

$$\text{动能变化}+\text{势能变化}=0$$

即

$$\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2+(mg)(h_f-h_i)=0$$

所以有

$$h_f-h_i=-\frac{v_f^2-v_i^2}{2g}=-\frac{(8.0\text{m/s})^2-(20\text{m/s})^2}{2(9.81\text{m/s}^2)}=17\text{m}$$

6.13 在阿特伍德机(见 3.23 题)上分别挂上 800g 和 700g 的物体。系统从静止开始释放。求 800g 的物体下降了 120cm 时的速率。

解 ☞ 800g 物体降了 120cm，同时 700g 的物体上升了 120cm。重力势能的变化为

$$(0.70\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)(1.20\text{m})-(0.80\text{kg})(9.81\text{m})(1.20\text{m})=-1.18\text{J}$$

即重力势能减少了−1.18J。由于能量守恒，系统的动能增加了 1.18J，即

$$\frac{1}{2}(0.70\text{kg})(v_f^2-v_i^2)+\frac{1}{2}(0.80\text{kg})(v_f^2-v_i^2)=1.18\text{J}$$

由 $v_i=0$ 解之得 $v_f=1.25\text{m/s}$。

6.14 如图 6-3 所示，珠子可在光滑的线轨上滑动。设它在 A 点时速率为 200cm/s。求它在 (a)B 点，(b)C 点时的速率。

解 ☞ 珠子的能量守恒：动能改变+势能改变=0

即

$$\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2+mg(h_f-h_i)=0$$

(a)$v_i=2.0\text{m/s}, h_i=0.80\text{m}$，而 $h_f=0$，得到 $v_f=4.4\text{m/s}$

(b)$v_i=2.0\text{m/s}, h_i=0.80\text{m}$，而 $h_f=0.50\text{m}$，所以 $v_f=3.1\text{m/s}$

6.15 假设图 6-3 中的珠子的质量为 15g，在 A 点时速率为 2.0m/s，它到达 C 点时便停止了。设从 A 到 C 轨道长度为 250cm。求珠子运动所受到的平均摩擦阻力。

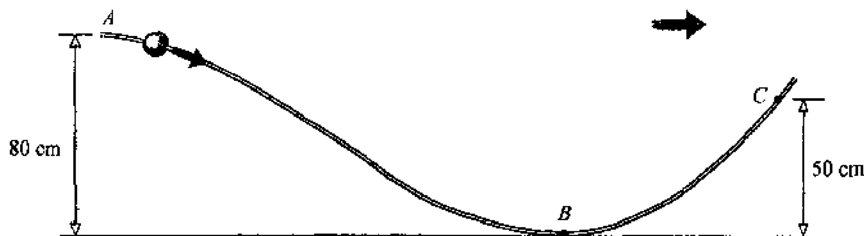


图 6－3

解 珠子从 A 到 C,它的总能量改变了:既损失了动能,也减小了势能。总能量变化等于摩擦力作功

$$mg(h_C-h_A)+\frac{1}{2}m(v_C^2-v_A^2)=F_f s\cos\theta$$

注意 $\cos\theta=-1, v_C=0, v_A=2.0\text{m/s}, h_C-h_A=-0.30\text{m}, s=2.50\text{m}, m=0.015\text{kg}$,代入得

$$F_f=0.030\text{N}。$$

6.16 质量为1200kg的汽车靠惯性沿30°的斜坡下滑,如图 6－4 所示。当速率为 12m/s 时,司机刹车。如果要让汽车滑行 100m 就停下来,摩擦力应多大?(设摩擦力是恒量)

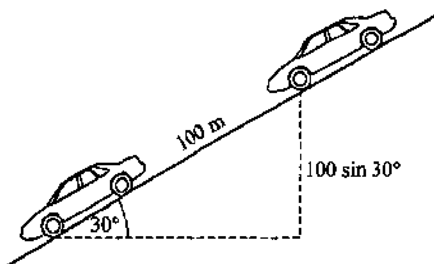


图 6－4

解 汽车的总能量改变($KE+PE_G$)等于刹车力所作的功:$Fs\cos180°$(摩擦力使汽车减慢)所以有

$$\frac{1}{2}m(v_f^2-v_i^2)+mg(h_f-h_i)=Fs(-1)$$

式中 $m=1200\text{kg}, v_f=0, v_i=12\text{m/s}, h_f-h_i=(100\text{m})\sin30°, s=100\text{m}$,代入解得

$$F=6.7\text{kN}$$

6.17 一小球连在 180cm 长的线端往返运动成为摆,如图 6－5 所示。球在最低位置时速率为 400cm/s。(a)它能摆多高?(b)那时摆线与铅垂线夹角多大?

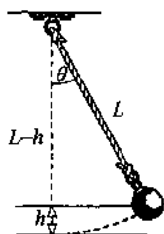


图 6－5

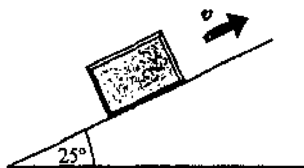


图 6－6

解 (a)摆线的拉力总是垂直于球的运动,因此不作功。所以摆球的总能量守恒,其动能的减少量就等于势能的增加量。

$$\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{1}{2}mv_i^2+mgh=0$$

由于 $v_f=0, v_i=4.00\text{m/s}$,得到 $h=0.816\text{m}$,即球升高 0.816m 时便停止。

(b)从图 6－5 可见

$$\cos\theta=\frac{L-h}{L}=1-\frac{0.816}{1.80}$$

得到 $\theta=56.9°$。

6.18 一个 500g 的木块沿图 6－6 所示的斜面以初速率 200cm/s 上行。若木块与斜面间的摩

擦因数等于 0.150，问它能沿斜面上行多远？

解☞ 木块受摩擦力为

$$F_f=\mu F_N=\mu(mg\cos25°)^*$$

木块沿斜面上升距离为 D 时，它竖直升高距离为 $D\sin25°$。木块能量改变等于摩擦力作功：

$$\frac{1}{2}m(v_f^2-v_i^2)+mg(D\sin30°)=-F_fD$$

已知 $v_i=2.00\text{m/s}$，$v_f=0$，等式两边的 m 相消，得到 $D=0.365\text{m}$。

6.19 质量 60 000kg 的火车被牵引着上坡，坡度为 1.0%（即水平每 100m 上坡 1.0m）。若牵引力为 3.0kN，初速率为 12m/s，摩擦阻力为 4.0kN。火车速率减至 9m/s 时，在水平方向行进了多远？

解☞ 火车总能量的变化是由于牵引力和摩擦力作功的结果，即

动能改变＋势能改变＝牵引力作功＋摩擦力作功

$$\frac{1}{2}m(v_f^2-v_i^2)+mg(0.010s)=(3000\text{N})(s)(1)+(4000\text{N})(s)(-1)$$

解得 $s=275\text{m}=0.28\text{km}$

6.20 一条广告称，某质量为 1200kg 的轿车只需 8.0s 即可使其从静止加速到 25m/s。不考虑摩擦损失，求发动机的平均功率。

解☞ 加速过程中发动机所作的功等于汽车动能的增加 $\frac{1}{2}m(v_f^2-v_i^2)$。这段时间为 8.0s。所以

$$\text{功率}=\frac{\text{功}}{\text{时间}}=\frac{\frac{1}{2}(1200\text{kg})(25\text{m/s})^2}{8.0\text{s}}=47\text{kW}$$

转换成马力(hp)，则

$$\text{功率}=(46900\text{W})\left(\frac{1\text{hp}}{746\text{W}}\right)=63\text{hp}$$

6.21 用一个 0.25hp 的发动机以 5.0cm/s 的速率提升一个物体。求它能以这个恒定速率提升物体的最大质量。

解☞ 先将发动机的功率转换为瓦：0.25hp＝186.5W。由题意，在 1.0s 内可将重 mg 的物体上升 0.050m。即

$$\text{功}=(\text{重量})(\text{高度})=(mg)(0.050)$$

而由定义，功率＝功/时间，即

$$186.5\text{W}=\frac{(mg)(0.050\text{m})}{1.0\text{s}}$$

代入 $g=9.81\text{m/s}^2$，得到 $m=381\text{kg}$，发动机以此速率可提升 $0.38\times10^3\text{kg}$ 的物体。

6.22 若在 6.20 题中的数据指的是轿车上坡，坡的斜角为 20°，它的平均功率为多少？

解☞ 这时作功既要使它加速，又要使它升高：

$$\text{功}=\text{动能变化}+\text{势能变化}=\frac{1}{2}m(v_f^2-v_i^2)+mg(h_f-h_i)$$

式中 $h_f-h_i=L\sin20°$，L 为 8.0s 内车行距离。代入 $v_i=0$，$v_f=25\text{m/s}$，$t=8.0\text{s}$

$$L=v_{av}t=\frac{1}{2}(v_i+v_f)t=100\text{m}$$

$$\text{功 }W=\frac{1}{2}(1200\text{kg})(625\text{m/s}^2)+(1200\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)(100\text{m})(\sin20°)=777\text{J}=0.78\times10^3\text{kJ}$$

$$\text{功率}=\frac{777\text{kJ}}{8.0\text{s}}=97\text{kW}=0.13\times10^3\text{hp}$$

6.23 为了从船上卸下谷物，升降机从舱底将谷物升高 12m，然后以每秒 2.0kg 的速率从升降机顶部卸下。若每粒谷物卸下时的速率为 3.0m/s。升降机的功率不得小于多少 hp？

---

* 原式为 $F_f=\mu F_N-\mu(mg\cos25°)$——译注。

解 ☞　$功率=\frac{动能变化+势能变化}{时间}=\frac{\frac{1}{2}m(v_f^2-v_i^2)+mgh}{t}$

$=\frac{m}{t}\left[\frac{1}{2}(9.0\mathrm{m^2/s^2})+(9.81\mathrm{m/s^2})(12\mathrm{m})\right]$

由题意 $m/t=2.0\mathrm{kg/s}$，代入得

功率 $P=0.24\mathrm{kW}=0.32\mathrm{hp}$

习　题

6.24　3.0N 的力使物体沿力的方向移动了 12m。求力作的功。

（答　36J）

6.25　将质量 4.0kg 的物体升高 1.5m。(a)克服重力作功多少？(b)若不是升高，而是降低，情况如何？

（答　(a)59J；(b)−59J）

6.26　匀质大理石板长 3.4m，宽 2.0m，质量为 180kg。将它从地板上直立起来需作功多少？

（答　3.0kJ）。

6.27　要将质量 1300kg 的轿车在 80m 距离内从静止加速到 20m/s，需多大的力？

（答　3.3kN）

6.28　质量为 1200kg 的轿车速率为 30m/s。若轮胎与路面间摩擦力为 6000N，求刹车后车能滑行多远？

（答　90m）

6.29　一个质子($m=1.67\times10^{-27}\mathrm{kg}$)以 $5.0\times10^6\mathrm{m/s}$ 的初速率射入厚度为 0.010mm 的金属膜，又以 $2.0\times10^6\mathrm{m/s}$ 的速率射出。求金属膜对质子的平均阻力。

（答　$1.8\times10^{-9}\mathrm{N}$）

6.30　要将质量 200kg 的小车沿斜坡慢慢推到 1.5m 高的平台上，推力需作功多少，忽略摩擦阻力。

（答　2.9kJ）

6.31　上题中斜坡长 7.0m，摩擦阻力为 150N，情况又如何？

（答　4.0kJ）

6.32　要将质量为 50 000kg 的货车沿 1.20%坡度的道路以不变的速率行驶 800m。(a)求牵引力克服重力所作的功；(b)如果摩擦阻力为 1500N，求牵引力作的总功。

（答　(a)4.70MJ；(b)5.90MJ）

6.33　质量为 60kg 的人走上 3.0m 高的楼梯。求(a)升高这个人作功多少？(b)这个人升高作了多少功？(c)这个人的重力势能改变了多少？

（答　(a)1.8kJ；(b)1.8kJ；(c)1.8kJ）

6.34　水泵将湖水输送到 20m 高处的容器中。求输送 $5.0\mathrm{m^3}$ 的水，水泵需克服重力作功多少？已知每 $\mathrm{m^3}$ 水的质量为 1000kg。

（答　$9.8\times10^5\mathrm{J}$）

6.35　一个质量 2.0kg 的物体即将落地时具有动能 400J。忽略摩擦力，问它是从多高处落下的？

（答　20.0m）

6.36　质量为 0.50kg 的球从窗外落下，若窗户的竖直高度为 1.50m。(a)球下落窗户这段高度动能增加多少？(b)如果球经过窗户顶部时速率为 3.0m/s，那么经过底部时速率为多少？

（答　(a)7.4J；(b)6.2m/s）

6.37　空气中的氮分子在海平面处平均动能为 $6.2\times10^{-21}\mathrm{J}$，质量为 $4.7\times10^{-26}\mathrm{kg}$。(a)若氮分子能竖直向上运动而不会遇到其他空气分子，它将能上升多高？(b)其初始速率为多少？

（答　(a)14km；(b)0.51km/s）

6.38　轮胎与路面的滑动摩擦因数为 0.80。质量为 900kg 的轿车以 25m/s 的速率沿水平道路行驶。刹车后还能滑行多远？

（答　40m）

6.39　图 6－7 中的单摆，若从 A 点释放摆球，(a)求它到达最低点 C 时的速率和(b)到达 B 点的速率。

（答　(a)3.8m/s；(b)3.4m/s）

6.40　质量为 1200kg 的轿车沿长度为 15m、坡度 20°的斜面滑下。若(a)摩擦力可忽略，(b)摩擦阻力为

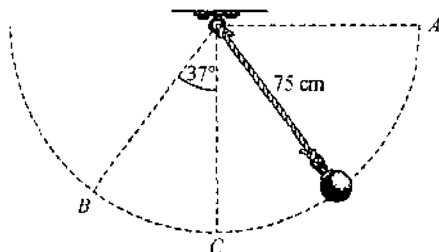


图 6-7

3000N，求车滑到坡底时的速率。

（答　(a)10m/s；(b)5.1m/s）

6.41　质量为 1200kg 的汽车作惯性滑行，速率从 20m/s 降至 15m/s 期间车沿水平路面滑行 130m。求摩擦阻力。

（答　0.81kN）

6.42　质量 2000kg 的电梯从地下室升至四楼，上升了 25m。它通过四楼时速率达3.0m/s。设摩擦力不变，为 500N。求电梯发动机作的功。

（答　0.51MJ）

6.43　如图 6-8 所示，珠子从 A 点释放，沿线轨无摩擦滑动。若到达 B 点时速率达 200cm/s，求 A 点的高度 h_1。

（答　20.4cm）。

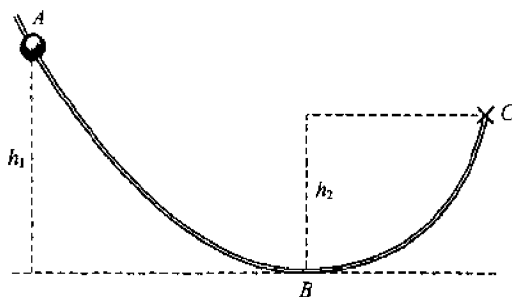


图 6-8

6.44　若图 6-8 中 m=50.0cm，h_2=30.0cm，从 A 到 C 轨道长 400cm，珠子质量 3.00g，从 A 点释放到 C 点停止。求摩擦阻力。

（答　1.47mN）

6.45　在图 6-8 中，h_1=200cm，h_2=150cm，在 A 点质量 3.00g 的珠子沿轨道方向下滑的速率为 800cm/s。(a)忽略摩擦力，珠子滑到 B 点的速率多少？(b)若珠子离开 C 又升高了 20.0cm，求珠子克服摩擦力损失的能量。

（答　(a)10.2m/s；(b)105mJ）

6.46　计算在 1.0min 内将 150kg 的物体升高 20m 所需平均功率，以 hp 为单位。

（答　0.66hp）

6.47　计算在 60.0s 内将 500kg 的物体升高 20.0m 所需的功率。

（答　1.63kW）

6.48　发动机功率为 40.0hp，驱动汽车以 15.0cm/s 的速率在水平道路上行驶。车受到多大的阻力？

（答　1.99kN）

6.49　质量 1000kg 的汽车以 20m/s 速率沿坡度为 3.0%的道路上坡。忽略摩擦力，发动机功率为多少马力？

（答　7.9hp）

6.50　一辆 900kg 的汽车，最大功率为 40.0hp。在水平道路上开足马力可使速率稳定在 135km/h。求这时摩擦力的大小。

（答　826N）

6.51 水库中的水以 3000kg/min 的流量带动下边 120m 处的水轮机。若水轮机效率为 80%，且忽略水管的摩擦以及水离开水轮机时的动能，水轮机输出功率为多少马力？

（答 63hp）

6.52 箱子与水平路面的摩擦因数为 0.15，一个 40hp 的发动机以 15m/s 的速率拖动箱子在路上行走，能拖动的最大质量是多少？

（答 1.4×10^3kg）

6.53 一辆 1300kg 的汽车沿 15.0°的斜坡上行，从静止开始，12.0s 内便将速率提到 30.0m/s。假设是匀加速运动，发动机最小功率是多少？

（答 132hp）

第七章 简单机械

机械

任何一种装置，用它可以改变力的大小、方向或作用方式，以得到某种便利，都叫做机械。简单机械例如有杠杆、斜面、滑轮、曲轴以及螺旋起重器等。

功的原理

适用于连续运转的机械，功的原理如下：

$$\text{输入的功}=\text{输出的有用功}+\text{克服摩擦力所作的功}$$

对于某些仅仅短时间运作的机械，有些输入功可能被用来以能量的形式贮存在机械内。比如机械内的弹簧可能被拉伸了，或动滑轮被升高了，等等。

机械效益

实际机械效益(AMA)定义为

$$\text{AMA}=\text{力的比率}=\frac{\text{机械对负荷的力}}{\text{操作机械的力}}$$

理想机械效益(IMA)定义为

$$\text{IMA}=\text{距离的比率}=\frac{\text{力的作用点移动的距离}}{\text{负荷移动的距离}}$$

因为摩擦力总是不可避免的，所实际机械效益总是小于理想机械效益。一般来说，它们都大于1。

机械效率(Eff)

$$\text{机械的效率}=\frac{\text{输出功}}{\text{输入功}}=\frac{\text{输出功率}}{\text{输入功率}}$$

机械效率也等于实际机械效益与理想机械效益之比(AMA/IMA)。

例　　题

7.1 在一个起重装置中，要升高重物10cm就必须拉动绳子70cm。若要吊起5.0kN的重物，至少施加多大的作用力？

解 最省力的情况是所有的输入功都用来提升重物，即没有摩擦力以及其他的能量损失。这时有

$$\text{输入功}=\text{提升功}$$

如果重物升高距离为h，提升功为$(5.0\text{kN})(h)$。作用力F必须使绳子移动$7.0h$。写方程为

$$(F)(7.0h)=(5.0\text{kN})(h)$$

解得$F=0.71\text{kN}$。

7.2 升降机在20.0s内将3000kg的重物升高8.00m。而升降机引擎的功率为18.0hp。求(a)机械的输出功，(b)输出功率和输入功率以及(c)引擎和升降机的效率。

解 (a)输出功＝(提升力)×(距离)$=(3000\times9.81\text{N})(8.00\text{m})=235\text{kJ}$

(b)$\text{输出功率}=\frac{\text{输出功}}{\text{时间}}=\frac{235\text{kJ}}{20.0\text{s}}=11.8\text{kW}$

$\text{输入功率}=(18.0\text{hp})\left(\frac{0.746\text{kW}}{1\text{hp}}\right)=13.4\text{kW}$

(c)效率$=\frac{输出功率}{输入功率}=\frac{11.8\text{kW}}{13.4\text{kW}}=88.1\%$

或 效率$=\frac{输出功}{输入功}=\frac{235\text{kJ}}{(13.4\text{kJ/s})(20.0\text{s})}=87.7\%$

取两位有效数字，效率为88%。上述差别是由于计算过程中的四舍五入引起的。

7.3 发动机的效率为90.0%，可提供的功率为12.0hp。这时输入功率为多少kW?

解 由效率定义有

输入功率$=\frac{输出功率}{效率}=\frac{(12.0\text{hp})(0.746\text{kW/hp})}{0.90}=9.95\text{kW}$

7.4 对于图7-1中的三种杠杆，要承受90N的重物F_W，试求竖直方向的力F_1、F_2和F_3。杠杆自重可忽略。并求各自的IMA、AMA和效率。

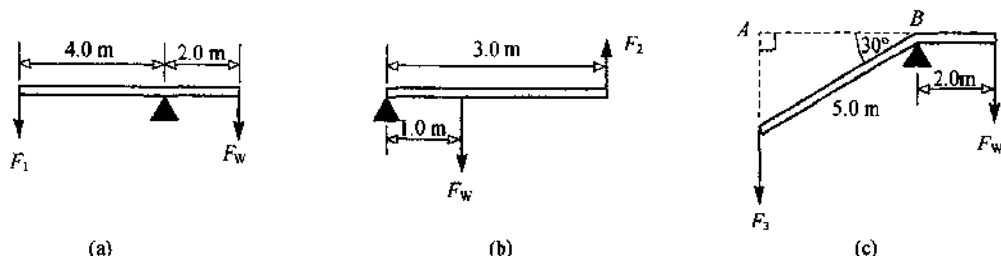


图7-1

解 对于三种情况，我们都取支点为转轴，计算力矩。假设系统都处于平衡态，即重物静止或以常速度缓慢升高，这时顺时针力矩与逆时针力矩相抵消，我们记得力矩

$$\tau=rF\sin\theta$$

顺时针力矩=逆时针力矩

(a)(2.0m)(90N)(1)=(4.0m)(F_1)(1)，得到$F_1=45\text{N}$

(b)(1.0m)(90N)(1)=(3.0m)(F_2)(1)，得到$F_2=30\text{N}$

(c)(2.0m)(90N)(1)=(5.0m)(F_3)sin60°，得到$F_3=42\text{N}$

在图7-1(a)中，重物的移动距离为作用点移动距离的一半，所以

$$\text{IMA}=距离比=2.0$$

同样，在图7-1(b)中，IMA=3/1=3。在图7-1(c)中，杠杆的动力臂为(5.0m)sin60°=4.33m，所以距离比为4.33/2=2.16。

结论汇总如下表

	杠杆(a)	杠杆(b)	杠杆(c)
IMA	2.0	3.0	2.2
AMA	$\frac{90\text{N}}{45\text{N}}=2.0$	$\frac{90\text{N}}{30\text{N}}=3.0$	$\frac{90\text{N}}{41.6\text{N}}=2.2$
Eff	1.0	1.0	1.0

三种情况中效率均为1.0，因为忽略了杠杆自重以及支撑点处的摩擦。

7.5 忽略滑轮的重量以及摩擦力，要拉起重量为100N的物体F_W，求图7-2中五种情况作用力F的大小。

解 (a)两根绳子分担重物F_W，每个绳的向上拉力相等，$F_T=\frac{1}{2}F_W$。又因为绳子是连续的，滑轮无摩擦，所以$F=F_T$，即

$$F=F_T=\frac{1}{2}F_W=\frac{1}{2}(100\text{N})=50\text{N}$$

(b)这时同样是两根绳子分担重物F_W，$F_T+F=F_W$，且$F_T=F$，所以有

$$F=\frac{1}{2}F_W=50\text{N}$$

(c)令滑轮A、B两边绳的张力分别为F_{T1}和F_{T2}。A处于平衡态，有

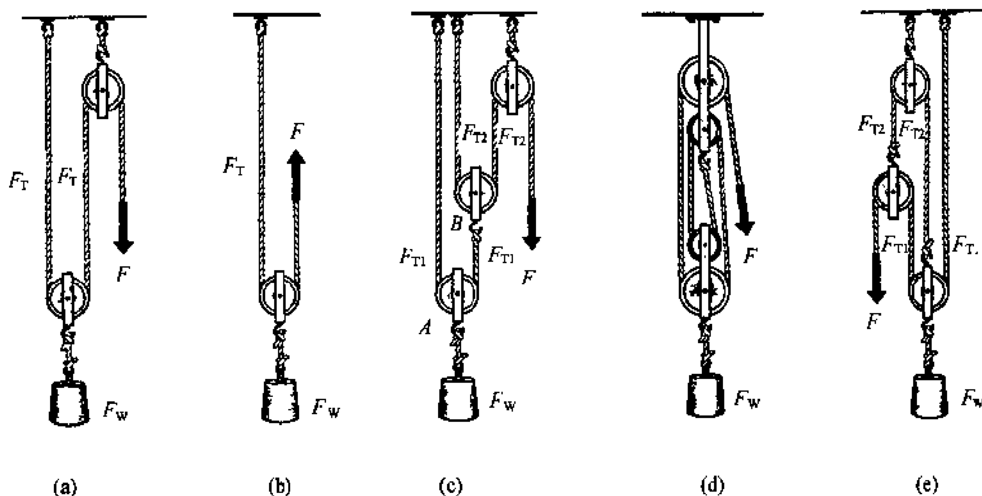


图 7-2

$$F_{T1}+F_{T1}-F_W=0,\quad 或\ F_{T1}=\frac{1}{2}F_W$$

滑轮 B 也处于平衡态，有

$$F_{T2}+F_{T2}-F_{T1}=0,\quad 或\ F_{T2}=\frac{1}{2}F_{T1}=\frac{1}{4}F_W$$

但 $F=F_{T2}$。所以 $F=\frac{1}{4}F_W=25\text{N}$

(d)这时有四根绳子分担 F_W，每根绳子张力均为 F_T，所以 $4F_T=F_W$。而 $F=F_T=\frac{1}{4}F_W$，所以 $F=25\text{N}$。

(e)首先可看出 $F=F_{T1}$。由于左边的滑轮处于平衡态，所以有

$$F_{T2}-F_{T1}-F=0$$

由于 $F_{T1}=F$，所以 $F_{T2}=2F$。

右边的滑轮也处于平衡态，有

$$F_{T1}+F_{T2}+F_{T1}-F_W=0$$

考虑到 $F_{T1}=F$ 和 $F_{T2}=2F$，代入得

$$F=\frac{1}{4}F_W=25\text{N}$$

7.6 用图 7-3 所示的轮轴系统，在轮边施 50N 的力即可升起 400N 的重物 F_W。轮和轴的半径分别为 85cm 和 6.0cm。求系统的 IMA、AMA 以及机械效率。

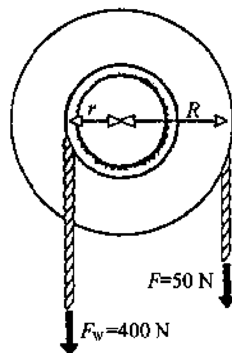


图 7-3

解 我们知道，轮轴转一圈，绕在各自边缘上的绳子就会绕上或解开一圈的长度。

$$\text{IMA}=\frac{力的作用点移动的距离}{负荷(重物)移动的距离}=\frac{2\pi R}{2\pi r}=\frac{85\text{cm}}{6.0\text{cm}}=14$$

$$\text{AMA}=力的比率=\frac{400\text{N}}{50\text{N}}=8.0$$

$$效率=\frac{\text{AMA}}{\text{IMA}}=\frac{8.0}{14.2}=0.56=56\%$$

7.7 在图 7-4 所示的斜面上有一重物 F_W。(a)沿斜面需多大的力能使 20kg 的重物滑动？(忽略摩擦力)(b)斜面的 IMA 等于多少？(c)如果实际上需 64N 的拉力，求斜面的 AMA 以及机械效率。

解 (a)解这道题可有几种方法。考虑应用能量的方法。因无摩擦力，所以拉力作功，$(F)(15\text{m})$ 应等于使物体上升势能的增加，$(20\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)(3.0\text{m})$。列出方程解之得 $F=39\text{N}$。

(b) $\text{IMA}=\frac{\text{力作用点移动的距离}}{\text{重物升高的距离}}=\frac{15\text{m}}{3.0\text{m}}=5.0$

(c) $\text{AMA}=\text{力的比率}=\frac{F_W}{F}=\frac{196\text{N}}{64\text{N}}=3.06=3.1$

$\text{效率}=\frac{\text{AMA}}{\text{IMA}}=\frac{3.06}{5.0}=0.61=61\%$

或者换一种算法

$\text{效率}=\frac{\text{输出功}}{\text{输入功}}=\frac{(F_W)(3.0\text{m})}{(F)(15\text{m})}=0.61=61\%$

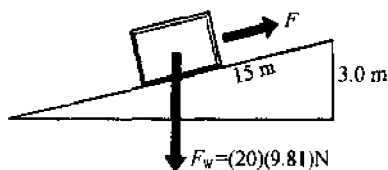


图 7 - 4

7.8 图 7 - 5 为一个螺旋千斤顶，动力臂为 40cm，螺距为 5.0mm。若效率为 30%，升高 270kg 的重物，要在操作杆的末端沿水平且垂直于操作杆的方向施加多大的力？

解 操作杆转一圈，力的作用点移动的距离为

$$2\pi r=2\pi(0.40\text{m})$$

而重物只上升了一个螺距 0.0050m。所以

$$\text{IMA}=\text{距离比率}=\frac{2\pi(0.40\text{m})}{0.0050\text{m}}=0.50\times10^3$$

由于效率＝AMA/IMA，所以

$$\text{AMA}=(\text{效率})(\text{IMA})=(0.30)(502)=0.15\times10^3$$

又由于 AMA＝(重物的重量)/(作用力)，所以

$$F=\frac{\text{重物的重量}}{\text{AMA}}=\frac{(270\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)}{151}=18\text{N}$$

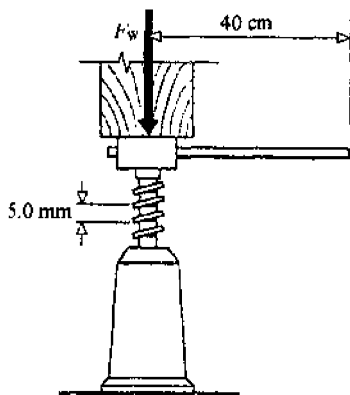


图 7 - 5

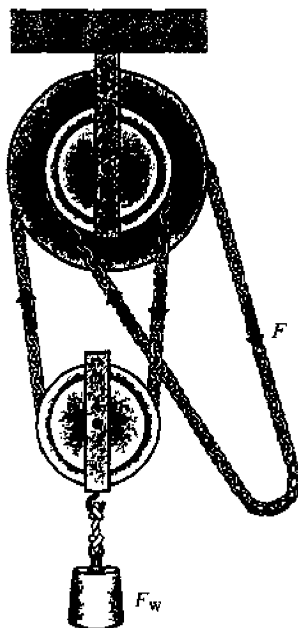


图 7 - 6

7.9 图 7 - 6 为一个链索滑轮组起重器。半径分别为 $r=10\text{cm}$ 和 $R=11\text{cm}$ 的两个带齿的滑轮连在一起并绕同一个轴转动，一条链索绕过较小的(10cm)滑轮又绕过下面的动滑轮，最后又往上绕过 11cm 的滑轮。操作者向下拉链索以提起重物。(a)求 IMA。(b)若要提起 700N 的重物，需用 50N 的力，求机械效率。

解 假设操作者拉动链索使上面的滑轮转过一圈。则链索在大、小滑轮上分别移动了一圈，即 $2\pi R$ 和 $2\pi r$。这使得连接动滑轮的链索缩短了一截：$2\pi R-2\pi r$。而重物上升了这个距离的一半。即

$$\frac{1}{2}(2\pi R-2\pi r)=\pi(R-r)$$

链索在拉力 F 的作用下移动了 $2\pi R$。所以

$$\text{IMA}=\frac{\text{拉力作用点移动的距离}}{\text{重物上升的距离}}=\frac{2\pi R}{\pi(R-r)}=\frac{2R}{R-r}=\frac{22\text{cm}}{1.0\text{cm}}=22$$

(b)从以上数据得到

$$\text{AMA}=\frac{\text{物体重力}}{\text{拉力}}=\frac{700\text{N}}{50\text{N}}=14$$

$$\text{效率}=\frac{\text{AMA}}{\text{IMA}}=\frac{14}{22}=0.64=64\%$$

习　　题

7.10 电动机提供 120hp 功率使起重机将 5000kg 的重物在 20s 内上升了 13.0m。求机械效率。

(答　36%)

7.11 参见图 7-2(d),如果提起 50kg 的重物需要 200N 的力。求 IMA、AMA 以及效率。

(答　4,2.5,61%)

7.12 在图 7-7(a)和(b)两系统中,重物都能与作用力相平衡。假设所有绳子都是竖直的。求两系统中 F 的大小(设效率为 100%)。

(答　(a)100N;(b)75N)

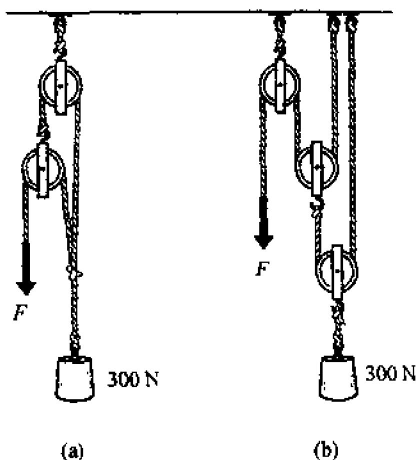


图 7-7

7.13 利用某机械,力的作用点移动 3.3m 使重物升高 8.0cm。求(a)IMA 和(b)AMA,(效率为 60%)。50N 的作用力能提起多重的物体?如果效率为(c)100%和(d)60%。

(答　(a)41;(b)25;(c)2.1kN;(d)1.2kN)

7.14 使用轮轴装置,80N 的力作用于轮的边缘可以提起 640N 的物体。若轮和轴的直径分别为 36cm 和 4.0cm,求该装置的 AMA、IMA 以及机械效率。

(答　8.0,9.0,89%)

7.15 150N 的力将液压起重机的活塞移动 20cm,能将 900kg 的汽车升高 0.25cm。求它的 IMA,AMA 以及机械效率。

(答　80,59,74%)

7.16 某螺旋压力机的轮子直径为 55cm,螺距为 0.20cm,效率为 40%。若要产生 12kN 的压力,需在轮边缘沿切线方向施多大的力?

(答　35N)

7.17 若图 7-6 中上面的两个滑轮的直径分别为 18cm 和 16cm,该起重器的效率为 4.5%,要升起 400kg 的大箱子,需多大的拉力?

(答　0.48kN)

第八章　冲量和动量

线动量(*P*)

物体的线动量为其质量(m)和速度($\boldsymbol{v}$)的乘积

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{v}$$

动量是矢量，其方向为速度的方向。在 SI 中动量的单位为 kg·m/s。

冲量

冲量是力($\boldsymbol{F}$)与力的作用时间的乘积。冲量是矢量，方向与力的方向相同，在 SI 中冲量的单位为 N·s。

动量定理

力的冲量使物体动量改变，改变的大小和方向等于作用力的冲量。如果常力 $\boldsymbol{F}$ 作用于质量为 m 的物体，作用时间为 Δt，物体的速度从初始时 $\boldsymbol{v}_i$ 改变到末速度 $\boldsymbol{v}_f$，则

$$\boldsymbol{F}\Delta t=m(\boldsymbol{v}_f-\boldsymbol{v}_i)$$

牛顿第二定律的最初形式为 $\boldsymbol{F}=\Delta\boldsymbol{P}/\Delta t$，由此得到 $\boldsymbol{F}\Delta t=\Delta\boldsymbol{P}$。另外，$\boldsymbol{F}\Delta t=\Delta(m\boldsymbol{v})$ 式中，如果质量为常量，则有 $\boldsymbol{F}\Delta t=m(\boldsymbol{v}_f-\boldsymbol{v}_i)$。

线动量守恒

如果作用于物体系的净外力等于零，则该物体系的线动量的矢量和保持不变。

碰撞和爆炸

在碰撞和爆炸过程前后，物体系的动量矢量和不变。比如两个物体，质量分别为 m_1 和 m_2，则碰撞前的动量和等于碰撞后的动量和，即

$$m_1\boldsymbol{u}_1+m_2\boldsymbol{u}_2=m_1\boldsymbol{v}_1+m_2\boldsymbol{v}_2$$

式中 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 是碰撞前的速度，$\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 为碰撞后的速度。对于一维情况，其分量形式为

$$m_1u_{1x}+m_2u_{2x}=m_1v_{1x}+m_2v_{2x}$$

同样，对于 y 方向和 z 方向，动量守恒的形式一样。记住，矢量总是用黑粗体字，而速度是矢量。另一方面，u_{1x}，u_{2x}，v_{1x} 和 v_{2x} 是标量，可以是正或负。先选定一个正方向，若速度矢量与这个方向相反，其数值标量就是负的。

完全弹性碰撞

在碰撞中，如果物体系的平动动能之和保持不变，则为完全弹性碰撞。对于只有两个物体的情况有

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

恢复系数

对于两个物体间的碰撞，物体只沿一条直线(比如 x 方向)运动，定义一个纯数 e 为恢复系数：

$$e=\frac{v_{2x}-v_{1x}}{u_{1x}-u_{2x}}$$

式中 u_{1x} 和 u_{2x} 为碰撞前的速率值，而 v_{1x} 和 v_{2x} 为碰撞后值。注意 $|u_{1x}-u_{2x}|$ 为两物体相互靠近时的相对速率，$|v_{2x}-v_{1x}|$ 为离开时的相对速率。

对于完全弹性碰撞，$e=1$；非弹性碰撞，$e<1$；而碰撞后两个物体连成一体，$e=0$，这种碰撞称为完全非弹性碰撞。

质心

质量为 m 的物体的质心是一个点，在这个点上集中了该物体的全部质量；如果将作用于物体上的外力加在这个质点上，质点的运动将与物体的运动完全相同。即，如果作用在一个质量为 m 的物体（或物体系）的合外力为 $\boldsymbol{F}$，则该物体（或物体系）的质心的加速度为 $\boldsymbol{a}_{cm}=\boldsymbol{F}/m$。

如果一个物体由许多微元 m_1、m_2…组成，这些微元的坐标为 (x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2)…，则质心的坐标为

$$x_{cm}=\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i},\quad y_{cm}=\frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i},\quad z_{cm}=\frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}$$

这里是对组成物体的所有微元求和。在均匀的重力场中，物体的质心与重心一致。

例　题

8.1　质量 8.0g 的子弹水平射进一块质量为 9.00kg、原来静止的木块，使木块以 40cm/s 的速率运动。求子弹射到木块前的速率。

解　考虑子弹和木块的体系。木块开始时速度为零，从而动量为零。取子弹运动的方向为正 x 方向。动量守恒告诉我们，系统

碰撞前动量＝碰撞后动量，即

（子弹动量）＋（木块动量）＝（子弹加木块的动量）

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=(m_1+m_2)v_x$$

$$(0.0080\text{kg})v_{1x}+0=(9.008\text{kg})(0.40\text{m/s})$$

解得 $v_{1x}=0.45$km/s，即速度为 0.45km/s——正 x 方向。

8.2　质量为 16g 的物体沿 x 正方向运动，速率为 30cm/s，另一质量为 4.0g 的物体沿 x 反方向以 50cm/s 速率运动。两物体碰撞并粘在一起。求碰撞后它们的速度。

解　令 16g 物体为 m_1，4.0g 物体为 m_2。取 m_1 运动方向为正。这样 m_2 的运动速度表示标量为 -50cm/s。应用动量守恒定律：碰撞前系统动量＝碰撞后系统动量

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=(m_1+m_2)v_x$$

$$(0.016\text{kg})(0.30\text{m/s})+(0.0040\text{kg})(-0.50\text{m/s})=(0.020\text{kg})v_x$$

解得 $v_x=0.14$m/s。

即碰撞后系统以 0.14m/s 速率朝 $+x$ 方向运动。注意，4.0g 物体的动量为负值。

8.3　一块 2.0kg 的砖头以 6.0m/s 的速率运动。若要在 7.0×10^{-4}s 内将它停下，需要多大的力？

解　应用动量定理 $F\Delta t=mv_f-mv_i$

$$F(7.0\times10^{-4}\text{s})=0-(2.0\text{kg})(6.0\text{m/s})$$

解得 $F=-1.7\times10^4$N，负号表明作用力阻止砖头的运动。

8.4　速率为 300m/s、质量为 15g 的子弹穿透一块 2.0cm 厚的泡沫塑料板，以 90m/s 的速率射出。求塑料板对子弹的平均阻力。

解　设子弹在塑料板内时间为 Δt，取子弹运动方向为正，由动量定理有

$$F\Delta t=mv_f-m_i$$

又假设在塑料板内子弹是匀减速运动，$x=v_{av}t$，式中 $x=0.020$m，$v_{av}=\frac{1}{2}(v_i+v_f)=195$m/s。所以 Δt

$=1.026\times10^{-4}$s。即

$$F(1.026\times10^{-4}\text{s})=(0.015\text{kg})(90\text{m/s})-(0.015\text{kg})(300\text{m/s})$$

解得 $F=-3.1\times10^{4}$N。

若不应用动量定理，而用 $F=ma$ 应怎样解这道题？用能量的方法呢？

8.5 某放射性元素的原子核质量为 3.80×10^{-25}kg，处于静止状态。它突然射出一个质量为 6.6×10^{-27}kg 的粒子，速率为 1.5×10^{7}m/s。求核的反冲速率。

解 取射出粒子运动方向为正。设核质量 $m_n=3.80\times10^{-25}$kg，粒子质量 $m_p=6.6\times10^{-27}$kg，$m_{nf}=m_n-m_p=3.73\times10^{-25}$kg，粒子速率 $v_{pf}=1.5\times10^{7}$m/s。核放射过程动量守恒

$$0=m_{nf}v_{nf}+m_pv_{pf}$$

式中 v_{nf} 为所示的反冲速率。代入数值有

$$0=(3.73\times10^{-25}\text{kg})(v_{nf})+(6.6\times10^{-27}\text{kg})(1.5\times10^{7}\text{m/s})$$

解得　$v_{nf}=-2.7\times10^{5}$m/s

负号表明反冲速度与放射出的粒子速度反向。

8.6 质量为 0.25kg 的球沿 $+x$ 方向运动，速率为 13m/s。球撞击球拍后反向以 19m/s 速率运动。球和球拍作用时间为 0.010s。求球拍对球的平均作用力。

解 由题意，$v_f=13$m/s，$v_i=-19$m/s，由

$$F\Delta t=mv_f-mv_i$$

$$F(0.010\text{s})=(0.25\text{kg})(-19\text{m/s})-(0.25\text{kg})(13\text{m/s})$$

解得 $F=-0.80$kN。

8.7 甲乙二人足穿旱冰鞋面对面站在一起。他们质量分别为 m_1 和 m_2。甲推乙使乙后退，求甲的运动速率。假设旱冰鞋自由滑动。

解 二人组成一个系统。乙"后退"，设其方向为负。系统不受外力（推力为内力）。由动量守恒

$$0=m_1v_1+m_2v_2$$

得 $v_1=-\dfrac{m_2}{m_1}v_2$。

v_1 为甲的反冲速率。若 m_2/m_1 比值很大，v_1 可以比 v_2 大很多。乙的速度方向为负，甲的速度方向为正。

8.8 如图 8-1 所示：子弹射入一悬挂于绳端的木块并使木块摆起，摆到的位置比初始位置升高了 10cm。求子弹的初速率。

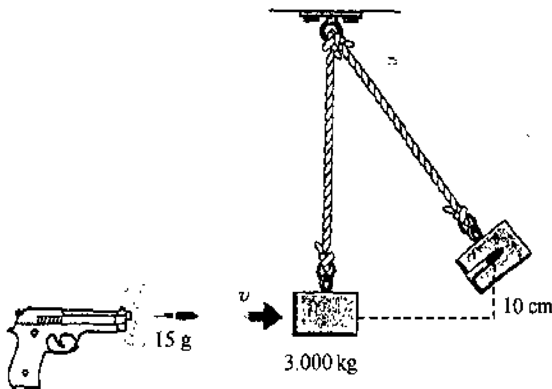


图 8-1

解 应用动量守恒，代入子弹和木块质量有

$$(0.015\text{kg})v+0=(3.015\text{kg})V$$

式中 v 为子弹初速率，V 为子弹射入木块后它们共同的速率。

这个方程式中有两个未知数。注意，子弹射入后，木块升高 10cm。令木块初始时势能为零，应用能量守恒，即系统最后的势能应等于（子弹＋木块）初始的动能：

$$\frac{1}{2}(3.015\text{kg})V^2-(3.015\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)(0.10\text{m})$$

解得 $V=1.40\text{m/s}$。代入第一式得 $v=0.28\text{km/s}$。

注意，我们不能写成$\frac{1}{2}mv^2=(m+M)gh$ 的能量守恒方程（m 为子弹质量，M 为木块质量），因为在碰撞（子弹射入）过程中有摩擦力造成的能量损失。

8.9 三个质点依次排在 x 轴上：200g，在 $x=0$ 处，500g 在 $x=30\text{cm}$ 处，400g 在 $x=70\text{cm}$ 处。求系统的质心。

解 $$x_{cm}=\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}=\frac{(0)(0.20\text{kg})+(0.30\text{m})(0.50\text{kg})+(0.70\text{m})(0.40\text{kg})}{(0.20+0.50+0.40)\text{kg}}=0.39\text{m}$$

8.10 某体系由 xy 平面上的三个质点组成：4.0kg，坐标为（$x=0$，$y=5.0\text{m}$），5.0kg，（-3.0m，-6.0m），7.0kg，（3.0m，8.0m），求质心位置。

解 $$x_{cm}=\frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}=\frac{(0)(4.0\text{kg})-(-3.0\text{m})(5.0\text{kg})+(3.0\text{m})(7.0\text{kg})}{(4.0+5.0+7.0)\text{kg}}=0.38\text{m}$$

$$y_{cm}=\frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}=\frac{(5.0\text{m})(4.0\text{kg})+(-6.0\text{m})(5.0\text{kg})+(8.0\text{m})(7.0\text{kg})}{16\text{kg}}=2.9\text{m}$$

$$z_{cm}=0$$

8.11 静止在水平铁轨上的两节相同的火车车厢相距 D，之间用缆索连接。其中一节车厢装置一绞盘，用它可将两车厢拉到一起。(a)试描述它们的相对运动。(b)若甲车厢质量是乙车厢的三倍，情况如何？

解 缆索的力对于两个车厢组成的体系是内力。作用于体系的净外力为零，所以尽管两节车厢相互靠近，体系的质心并没移动。选体系的质心为坐标原点，所以

$$x_{cm}=0=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

式中 x_1 和 x_2 分别为甲乙两车厢的质心坐标。

(a)若 $m_1=m_2$，则有

$$0=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad 或 \quad x_1=-x_2$$

体系的质心在两节车厢中间 $D/2$ 处，当两车厢向质心靠近时，它们各自到质心的距离始终相等。

(b)如果 $m_1=3m_2$，则有

$$0=\frac{3m_2x_1+m_2x_2}{3m_2+m_2}=\frac{3x_1+x_2}{4}$$

解得 $x_1=-x_2/3$。当两车厢相互靠近时，体系的质心不变，而较重的甲车厢到质心的距离为乙车厢到质心距离的三分之一。

开始时，由于 $|x_1|+|x_2|=D$，有 $x_2/3+x_2=D$。所以乙车厢(m_2)距体系质心为 $x_2=3D/4$，而甲车厢(m)则为 $D/4$。

8.12 如图 8-2，摆球从图示位置释放将桌上的木块击走。木块在摩擦力 $0.20Mg$ 的作用下滑动了 D 后停止。若摆球与木块碰撞后反弹，反弹后摆线与竖直方向成 20°角，求 D。

解 摆球下落的高度为 $h_1=(L-L\cos37°)=0.201L$，其反弹达到的高度为 $h_2=(L-L\cos20°)=0.0603L$。由于摆球势能转变为到最低点时的动能，即$(mgh_1)=\frac{1}{2}mv^2$

碰撞过程动能不守恒，而动量守恒，即

$$m\sqrt{2g(0.201L)}+0=-m\sqrt{2g(0.0603L)}+MV$$

式中 V 为木块 M 碰撞后的速率。注意上式中摆球反弹后动量为负值。解上述方程有

$$V=\frac{m}{M}0.981\sqrt{gL}$$

木块的平动动能克服摩擦作功，即

$\frac{1}{2}MV^2=F_fD$ 或 $\frac{1}{2}M(0.963gL)^2\left(\frac{m}{M}\right)^2=(0.20Mg)(D)$

$D=2.4(m/M)^2L$

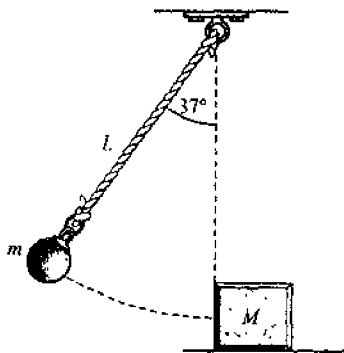


图 8-2

8.13 两个质量相等的球都朝坐标原点运动，一个球沿 y 轴朝下，速率为 2.00m/s；另一球沿 $-x$ 轴朝右，速率为 3.00m/s。碰撞后一个球沿 $+x$ 轴方向运动，速率为 1.20m/s。求另一个球运动速度的 x、y 分量。

解☞ 选向上和向右为正方向。由动量守恒：

x 方向：$m(3.00\text{m/s})+0=m(1.20\text{m/s})+mv_x$

y 方向：$0+m(-2.00\text{m/s})=0+mv_y$

解得 $v_x=1.80\text{m/s}, v_y=-2.00\text{m/s}$。

8.14 一辆 7500kg 的卡车以 5.0m/s 的速率向东行驶与一辆 1500kg 的轿车相撞，轿车原来以 20m/s 的速率朝西偏南 30°的方向行驶。两辆车碰撞后残骸绞到一起。求这残骸以多大的速率，朝什么方向运动？

解☞ 碰撞前两车的动量如图 8-3(a)，碰撞后残骸的动量如图 8-3(b)。碰后在朝北和朝东方向的动量都守恒。

朝东：$(7500\text{kg})(5.0\text{m/s})-(1500\text{kg})[(20\text{m/s})\cos30°]=Mv_E$ 这里 $M=7500\text{kg}+1500\text{kg}=9000\text{kg}$，$v_E$ 为残骸速度中朝东方向的分量。

朝北：$(7500\text{kg})(0)-(1500\text{kg})[(20\text{m/s})\sin30°]=Mv_N$

从两式中分别得到

$v_E=1.28\text{m/s}, v_N=-1.67\text{m/s}$，其合速率

$$v=\sqrt{(1.67\text{m/s})^2+(1.28\text{m/s})^2}=2.1\text{m/s}$$

夹角 $\theta=\arctan\left(\frac{1.67}{1.28}\right)=53°$，见图 8-3(b)。

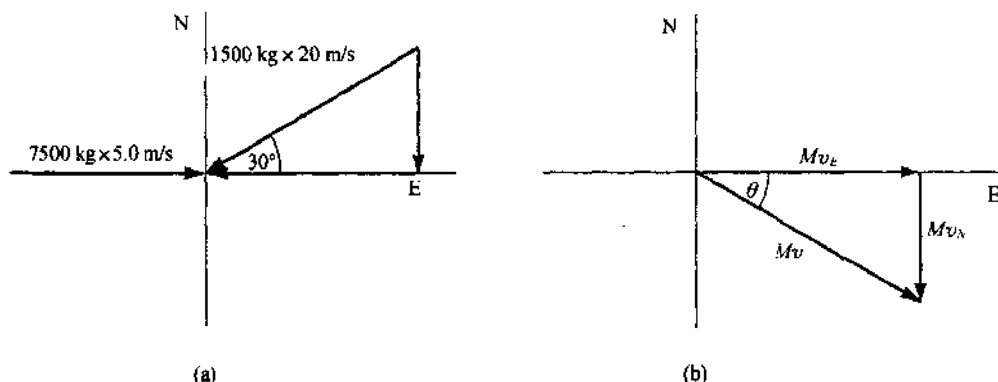


图 8-3

8.15 两个质量相同的球迎面碰撞。其中一个速度为 0.75m/s，朝东，另一个为 0.43m 朝西。若为完全弹性碰撞，求碰后各自的速度。

解☞ 由于是正面对撞，所有运动都是在一条直线上，取向东为正，由动量守恒：

$$m(0.75\text{m/s})+m(-0.43\text{m/s})=mv_1+mv_2$$

简化得到

$$0.32\text{m/s}=v_1+v_2 \tag{1}$$

由题意，为完全弹性碰撞，动能守恒，即

$$\frac{1}{2}m(0.75\text{m/s})^2+\frac{1}{2}m(0.43\text{m/s})^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2$$

简化为

$$0.747=v_1^2+v_2^2 \tag{2}$$

将(1)式中 $v_2=0.32-v_1$ 代入(2)式有

$$0.747=(0.32-v_1)^2+v_1^2 \quad 或 \quad 2v_1^2-0.64v_1-0.645=0$$

所以

$$v_1=\frac{0.64\pm\sqrt{(0.64)^2+5.16}}{4}=0.16\pm0.59(\mathrm{m/s})$$

即 $v_1=0.75\mathrm{m/s}$ 或 $-0.43\mathrm{m/s}$，而代入(1)式得 $v_2=-0.43\mathrm{m/s}$ 或 $0.75\mathrm{m/s}$。即两组解：

$$(v_1=0.75\mathrm{m/s}, v_2=-0.43\mathrm{m/s})和(v_1=-0.43\mathrm{m/s}, v_2=0.75\mathrm{m/s})$$

去掉第一组，因为它意味两球继续运动，没改变运动状态，第二组解是正确的。它说明质量相同物体迎面发生完全弹性碰撞，它们只是简单地互换速度。这道题最后的解为 $v_1=0.43\mathrm{m/s}$ 朝西，$v_2=0.75\mathrm{m/s}$，朝东。

另一种解法

对于完全弹性碰撞，恢复系数 $e=1$，

即
$$e=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}=\frac{v_2-v_1}{(0.75\mathrm{m/s})-(-0.43\mathrm{m/s})}=1$$

得到 $v_2-v_1=1.18\mathrm{m/s}$　　(3)

(3)与(1)式联立得 v_1 和 v_2 的惟一解。

8.16 质量为1.0kg的球以12m/s的速率运动，与一个质量为2.0kg并以24m/s速率但运动方向相反的球正面碰撞。若(a)$e=2/3$，(b)两球粘在一起，(c)完全弹性碰撞，求碰撞后两个球各自的运动状态。

解☞ 三种情况中碰撞前后系统的动量都守恒，即

$$(1.0\mathrm{kg})(12\mathrm{m/s})+(2.0\mathrm{kg})(-24\mathrm{m/s})=(1.0\mathrm{kg})v_1+(2.0\mathrm{kg})v_2$$

从而有

$$-36\mathrm{m/s}=v_1+2v_2 \tag{1}$$

(a)因为 $e=2/3$，

$$e=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}=\frac{v_2-v_1}{(12\mathrm{m/s})-(-24\mathrm{m/s})}=\frac{2}{3}$$

得到 $24\mathrm{m/s}=v_2-v_1$，与(1)式联立得

$$v_1=-28\mathrm{m/s}, \quad v_2=-4.0\mathrm{m/s}。$$

(b)这时 $v_1=v_2=v$，所以(1)变成

$$-36\mathrm{m/s}=3v, \quad 或\ v=-12\mathrm{m/s}$$

(c)这时 $e=1$，

$$e=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}=\frac{v_2-v_1}{(12\mathrm{m/s})-(-24\mathrm{m/s})}=1$$

得 $v_2-v_1=36\mathrm{m/s}$，代入(1)得

$$v_2=0, \quad v_1=-36\mathrm{m/s}。$$

8.17 一个小球从 h 处落到地面上又跳起 $0.65h$ 高。求球和地面之间的恢复系数。

解☞ 地板的初始速率和最后速率均为零，即

$$u_1=v_1=0$$

由定义

$$e=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2}=-\frac{v_2}{u_2}$$

利用动能-势能转换关系，在碰撞前有

$$mgh=\frac{1}{2}mu_2^2$$

在碰撞后有

$$mg(0.65h)=\frac{1}{2}mv_2^2$$

取向下为正方向，有 $u_2=\sqrt{2gh}$，$v_2=-\sqrt{1.30gh}$ 代入得

$$e=\frac{\sqrt{1.30gh}}{\sqrt{2gh}}=\sqrt{0.65}=0.81$$

8.18 如图 8-4 所示，两个质量、速率都不相等的球碰撞后都改变了运动方向。(a)若碰撞后 800g 的球的速率变成 15cm/s，求 500g 的球的速度。(b)这碰撞是否为完全弹性的？

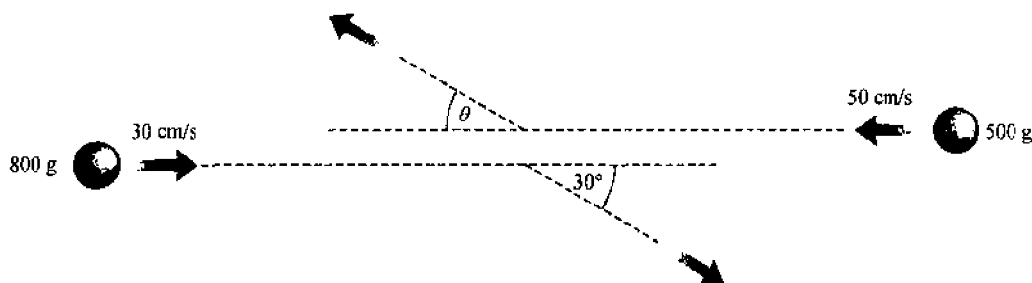


图 8-4

解释 取向右运动为正。沿 x 方向列出动量守恒：

$(0.80\text{kg})(0.30\text{m/s})+(0.50\text{kg})(-0.50\text{m/s})=(0.80\text{kg})[(0.15\text{m/s})\cos30°]+(0.50\text{kg})v_x$

得到 $v_x=-0.228\text{m/s}$。

取向上为运动正方向，沿 y 方向的动量守恒式为

$$0=(0.80\text{kg})[-(0.15\text{m/s})\sin30°]+(0.50\text{kg})v_y$$

解得 $v_y=0.120\text{m/s}$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(-0.228\text{m/s})^2+(0.120\text{m/s})^2}=0.26\text{m/s}$$

（译注：原书中有"$v=0.26\text{m/s}$—向右"字样，方向错误）

图 8-4 中角度 θ 由下式得到

$$\theta=\arctan\left(\frac{0.120}{0.228}\right)=28°$$

(b)碰前总动能 $=\frac{1}{2}(0.80\text{kg})(0.30\text{m/s})^2+\frac{1}{2}(0.50\text{kg})(0.50\text{m/s})^2=0.099\text{J}$ 碰后总动能 $=\frac{1}{2}(0.80\text{kg})(0.15\text{m/s})^2+\frac{1}{2}(0.50\text{kg})(0.26\text{m/s})^2=0.026\text{J}$ 可见碰撞后动能有损失，不是完全弹性碰撞。

8.19 一束水流垂直喷到一块竖直并静止的板上，然后水就沿板面流走了。设喷水速率为 80m/s，流量为 30mL/s。求喷射水流对板的作用力。见图 8-5。

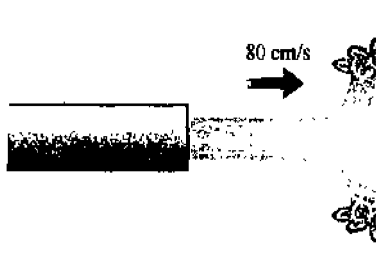


图 8-5

解释 板对水流的冲力改变了水流的水平方向动量。取向右为 x 正向，动量定理为

$$F_x\Delta t=(mv_x)_f-(mv_x)_i$$

取 $t=1.00\text{s}$，则 1.00s 时间的水的质量为 30g。代入上述方程有

$$F_x(1.00\text{s})=(0.030\text{kg})(0\text{m/s})-(0.030\text{kg})(0.80\text{m/s})$$

解之得 $F_x=-0.024\text{N}$。

板对水的作用力为 0.024N，方向向左。根据牛顿第三定律（作用与反作用定律）水流对板的作用也是 0.024N，方向向右。

8.20 火箭竖直立在发射台上，点火后以 1500kg/s 的速率喷出气体，气体分子的速率达到 50km/s。若火箭缓慢上升，火箭的初始质量最大为多少？

解释 由于与气体喷出的速率相比，火箭自身的速率是可以忽略的。假设气体从静止加速到 50km/s 的速率。使质量为 m 的气体加速运动所需冲力为

$$F\Delta t=mv_f-m_i=m(50\,000\text{m/s})-0$$

即　$F=(50\,000\text{m/s})\frac{m}{\Delta t}$

已知$\frac{\Delta m}{\Delta t}=1500\text{kg/s}$,代入得

$$F=(50\ 000\text{m/s})(1500\text{kg/s})=75\text{MN}$$

与此大小相等、方向相反的力作用于火箭,即火箭的升力。它可以承载75MN的重力。所以火箭初始的最大质量为

$$M=\frac{\text{重力}}{g}=\frac{75\times10^6\text{N}}{9.81\text{m/s}^2}=7.7\times10^6\text{kg}$$

习　题

8.21 很典型地,网球发球时的离拍速率为51m/s,若球质量为0.058kg,击球前球在空中静止。求击球瞬间网球动量的变化。

(答　3.0kg·m/s)

8.22 足球的质量为0.425kg,初始静止。踢出时的速率达26m/s。若作用时间为8.0ms,求球所受到的平均作用力。

(答　1.4kN)

8.23 一辆40 000kg的货车沿直轨道以5.0m/s的速率滑行并撞上了一辆停止的30 000kg的货车。撞后两车绞到了一起。求碰撞后它们的共同速率。

(答　2.9m/s)

8.24 一辆质量15 000kg的空货车以5.00m/s速率水平行驶。突然有5000kg的煤从上方落入车内。设煤水平方向初速率为零。求货车最后的速率。

(答　3.75m/s)

8.25 砂子以2000kg/min的速率从送料口落到传送带上。传送带水平速率为250m/min。求驱动传送带所需的力(忽略摩擦力)。

(答　139N)

8.26 质量分别为8kg和4kg的物体相对运动,速率分别为11m/s和7m/s。它们碰撞后就连成一体,求碰撞后的速度。

(答　5m/s,与8kg物体原来运动方向相同)

8.27 质量为1200kg的轮式大炮射出质量为8.00kg的炮弹,炮弹出口速度为600m/s,与水平成30.0°,求大炮的反冲速率。

(答　3.46m/s)

8.28 三个物体分布在y轴上:2kg,$y=300$cm;6kg,$y=150$cm;而4kg,$y=-75$cm。求它们质心的位置。

(答　$y=1$m)

8.29 在xy平面上有4个质点:300g,($x=0$,$y=2.0$m);500g,(−2.0m,−3.0m);700g,(50cm,30cm)以及900g,(−80cm,150cm)。求质心坐标。

(答　$x=-0.57$m,$y=0.28$m)

8.30 质量为m的球静止于坐标原点。它突然炸成两块并沿x轴向相反方向飞出。质量为$0.270m$的到达$x=70$cm处,求另一块的位置。(提示:它们的质心情况如何?)

(答　$x=-26$cm)

8.31 静止于坐标原点质量为m的球炸成质量相等的三块。在某一时刻,其中一块位于(−40cm,0)位置,第二块位于(20cm,−60cm),求第三块的位置。

(答　$x=-60$cm,$y=60$cm)

8.32 长桌面上有一质量为2.0kg的木块。质量为5.0g的子弹以150m/s的速率水平射进木块,使它在桌面上滑动了270cm。(a)求木块刚被射中时的速率。(b)求木块与桌面间的摩擦力。

(答　(a)0.37m/s;(b)0.052N)

8.33 桌面上有个洞,质量为2.0kg的木块就放在洞口上。一质量为7.0g的子弹从洞口下竖直射入木块中,使它升高到25cm。求子弹的初速率。

(答　0.64km/s)

8.34 一辆6000kg的卡车朝北以5.0m/s速率行驶撞上了4000kg、朝西以15m/s速率行驶的卡车,并连在一起。求碰撞后它们共同的速度。

（答　6.7m/s，西偏北 27°）

8.35　要使质量为 3.0kg 的物体在 0.20s 内速率从 65cm/s 降低到 15cm/s，需多大的平均阻力？

（答　7.5N）

8.36　质量为 7.00g 的子弹以 200m/s 的速率水平射穿一个质量为 150g 的罐头盒，盒子即以 180cm/s 的速率运动。求子弹射穿盒子时的速率。

（答　161m/s）

8.37　两个质量相等、速率均为 3m/s 相向运动的物体正面碰撞。求它们碰撞后的速率。如果(a)碰后连成一体；(b)完全弹性碰撞；(c)恢复系数为 1/3。

（答　(a)0m/s；(b)每个物体均以 3m/s 速率弹回；(c)反弹速率均为 1m/s）

8.38　一个 90g 的球以 100cm/s 的速率与一个 10g 的静止的球正面碰撞。若(a)它们碰后连成一体，(b)完全弹性碰撞，(c)恢复系数为 0.90。求各自碰后的速率。

（答　(a)90cm/s；(b)80cm/s，1.8m/s；(c)81cm/s，1.7m/s）

8.39　球从高处落到地面上，第一次弹跳 144cm，第二次落地弹跳 81cm。求(a)球和地面碰撞的恢复系数和(b)第三次落地后球能跳起多高。

（答　(a)0.75；(b)46cm）

8.40　两个质量相等的小球在坐标原点处碰撞。碰前它们的速度分量分别为($u_{1x}=40$cm/s，$u_{1y}=0$)和($u_{2x}=-30$cm/s 和 $u_{2y}=20$cm/s)。若第一个小球碰撞后静止不动了，求第二个小球碰后速度的分量。

（答　$v_{2x}=10$cm/s，$v_{2y}=20$cm/s）

8.41　两个质量相等的球平行于 x 轴相向运动，速率都是 30cm/s。设它们是完全弹性碰撞，且第一个球碰撞后速度沿 x 轴偏上 30°的方向，求第一个球碰后速率和第二个球碰后的速度。

（答　30cm/s，30cm/s，方向沿 $-x$ 轴偏下 30°，与第一个球反向。）

8.42　(a)若要使质量为 2.0×10^5kg 的火箭竖直离开地面，火箭发动机的推力至少要多大？(b)若发动机以 20kg/s 的速率喷出燃料，这些燃烧气体喷出时速率为多少？忽略喷出气体对火箭质量的影响。

（答　(a)20×10^5N；(b)98km/s）

第九章 平面内的角运动

角位移(θ)

角位移通常用弧度(rad)、度或圈(r)来描述：

$$1\text{r} = 360° = 2\pi \text{ rad} \quad 或\ 1\text{rad} = 57.3°$$

1弧度是圆周上与半径等长的一段弧对圆心所张的角度。于是，可用半径为 r 的圆周上的弧长 l 来表征角度的大小

$$\theta = \frac{l}{r}$$

用弧度度量角度得到一个无量纲数，rad和度一样，不是物理量单位，不能用m、kg或s表示。然而，为了记住我们处理的是一个角度量，还是要在数字后加上这个英文词的前三个字母rad表示弧度。

角速率(ω)

一个绕固定轴转动的物体的角速率是它的角坐标，即角位移 θ 随时间的变化率。如果在时间 t 以内，θ 从 θ_i 变到 θ_f，则平均角速率为

$$\omega_{av} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t}$$

角速率的单位只用rad/s。由于旋转系统转一整圈即转 2π rad，所以

$$\omega = 2\pi f$$

式中 f 为频率，其单位为每秒钟多少转、多少圈或多少周。相应地，ω 又叫角频率。我们可以把 ω 与方向联系起来得到一个矢量。右手的四指按旋转方向弯成一圈，则拇指所指的转轴方向就是角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的矢量方向。

角加速度(α)

绕定轴转动的物体的角加速度是其角速率随时间的变化率。如果物体的角速率在时间 t 内均匀地从 ω_i 变到 ω_f，则其角加速度为常量

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

角加速度 α 的单位典型地有 rad/s^2，r/min^2 等。因为 $\Delta\omega$ 可以与方向相联系，所以 α 也可以有方向，用矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 来表示。但在本书中并不需要这样做。

匀加速运动的方程

描述匀角加速运动的方程与描述匀加速线运动的方程非常相似、用通常的表示法有

线运动	角运动	线运动	角运动
$v_{av} = \frac{1}{2}(v_i + v_f)$	$\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)$	$v_f^2 = v_i^2 + 2as$	$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$
$s = v_{av}t$	$\theta = \omega_{av}t$	$s = v_i t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v_f = v_i + at$	$\omega_f = \omega_i + \alpha t$		

表中第一行平均速率和平均角速率的方程只适用于匀加速运动的情况。（译注：原书认为它们就

是平均速率的定义式，不管加速度是否为常量都成立，这是错误的。）

角度量和切向量之间的关系

半径为 r 的轮子绕方向固定的轴转动时，轮子边缘上某点的运动，需要用它走过的圆周线上的距离 l、切向速率 v 以及切向加速度 a_T 来描述。而这些量是与描述轮子转动的角度量 θ、ω 和 α 相联系的，其关系式为

$$l = r\theta, \quad v = r\omega, \quad a_T = r\alpha$$

注意以上角度量要采用弧度制。简单的推理可以证明，l 就是缠绕在轮边缘上带子随轮转动所展开或绕紧的长度或者轮子滚动（没有滑动）时转过的距离。

向心加速度（a_c）

质点绕半径为 r 的圆周以常速率运动时就具有加速度。尽管其运动的切向速率保持不变，但它的速度方向却不断变化。速度的这种变化便导致了质点的加速度，其方向指向圆心，称之为向心加速度。其大小由下式确定：

$$a_c = \frac{(\text{切向速率})^2}{\text{圆的半径}} = \frac{v^2}{r}$$

式中 v 为质点绕圆周的速率。

由于 $v=r\omega$，所以 $a_c=r\omega^2$，但 ω 必须以 rad/s 为单位。注意"加速度"这个词在物理学中既用来表示标量，也用来表示矢量，幸而通常并不会引起混乱。

向心力（$\boldsymbol{F}_c$）

绕半径为 r 的圆周作运动的质点必须受到力的作用以产生向心加速度 v^2/r。按 $F=ma$，有

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

此处 $\boldsymbol{F}_c$ 的方向指向圆形路径的圆心。

例　　题

9.1　将下述各量用其他角度单位表示出来：

(a) $28°$，(b) $\frac{1}{4}$ r/s，(c) 2.18rad/s^2

解　(a) $28°=(28°)\left(\frac{1\text{r}}{360°}\right)=0.078\ \text{r}=(28°)\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{360°}\right)=0.49\ \text{rad}$

(b) $\frac{1}{4}\ \frac{\text{r}}{\text{s}}=\left(0.25\ \frac{\text{r}}{\text{s}}\right)\left(\frac{360°}{1\text{r}}\right)=90°/\text{s}=\left(0.25\ \frac{\text{r}}{\text{s}}\right)\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{r}}\right)=\frac{\pi}{2}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

(c) $2.18\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}=\left(2.18\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{360°}{2\pi\ \text{rad}}\right)=125°/\text{s}^2=\left(2.18\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{1\text{r}}{2\pi\ \text{rad}}\right)=0.347\ \frac{\text{r}}{\text{s}^2}$

9.2　图 9－1 中的摆球移动了 15cm 长的弧线。若摆线长为 90cm，求它划过的角度 θ，用弧度和度分别表示。

解　记住，$l=r\theta$ 公式中的角度只能用弧度来表示。所以

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{0.15\text{m}}{0.90\text{m}} = 0.167\text{rad} \doteq 0.17\text{rad}$$

以度（°）表示为

$$\theta = (0.167\text{rad})\left(\frac{360°}{2\pi\ \text{rad}}\right) = 9.6°$$

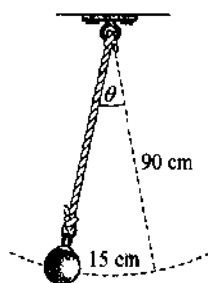


图 9－1

9.3　一电扇转速为 900r/min。(a)求扇叶上任一点的角速率。(b)求扇叶顶部的切向速率，假设扇叶顶部到轴心距离为 20.0cm。

解　(a) $f=900\ \frac{\text{r}}{\text{min}}=15.0\ \frac{\text{r}}{\text{s}}$

又　$\omega=2\pi f$　所以

$$\omega = 94.2\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

扇叶上所有点的角速率都相同。

(b) 切向速率

$$v = \omega r = (94.2\ \text{rad/s})(0.200\text{m}) = 18.8\text{m/s}$$

注意弧度(rad)是无量纲的，上式的结论中并没出现 rad。根据解题的需要，我们有时可以不写它，但有时又必须标明它，以免引起歧义。

9.4 如图 9－2 所示，一条传动带跨在半径为 25cm 的轮上。若带子上有一点的速率为 5.0m/s，轮子转动多快？

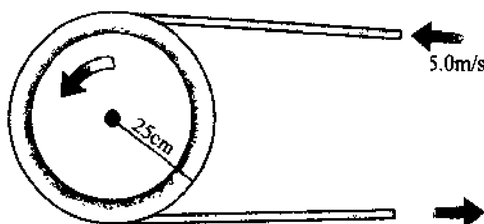


图 9－2

解答　$\omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{5.0\text{m/s}}{0.25\text{m}} = 20\text{rad/s}$

通常，ω 的单位为 s^{-1}，但这里就必须加写 rad。

9.5 半径为 40cm 的轮子绕固定轴转动，在 20s 时间内从静止均匀加速到 900r/min (转/分)。(a)求轮子的角加速度值和(b)轮缘上点的切向加速度。

解答　(a)由于加速度是常量，从定义式 $\alpha=(\omega_f-\omega_i)/t$ 得到

$$\alpha = \frac{\left(2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{r}}\right)\left(\frac{900\text{r}}{60\text{s}}\right)-\left(2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{r}}\right)\left(0\ \frac{\text{r}}{\text{s}}\right)}{20\text{s}} = 4.7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

(b) $a_T = r\alpha = (0.40\text{m})\left(4.7\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) = 1.88\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1.9\text{m/s}^2$

9.6 电动机轴上装有半径 5.0cm 的绕线轮，在 2.0s 内转速从 30r/s 均匀降到 20r/s。求(a)电机的角加速度，(b)在这段时间内电机转了多少圈和(c)轮子绕线的长度。

解答　(a) $\alpha=\dfrac{\omega_f-\omega_i}{t}=2\pi\ \dfrac{(20-30)\text{rad/s}}{2.0\text{s}}=-10\pi\ \text{rad/s}^2$

(b) $\theta=\omega_{av}t=\dfrac{1}{2}(\omega_f+\omega_i)t=\dfrac{1}{2}(100\pi\ \text{rad/s})(2.0\ \text{s})=100\pi\ \text{rad}=\dfrac{100\pi}{2\pi/\text{r}}=50\text{r}$

电机转过 50 圈。

(c)由于 $\theta=314\text{rad}$　所以

$$l = r\theta = (0.050\text{m})(314\text{rad}) = 16\text{m}$$

9.7 车轮半径为 30cm。车在 8.0s 内从静止均匀加速到 15m/s。求车轮的角加速度以及在此期间转过的圈数。

解答　由 $a_T=(v_f-v_i)/t$，有

$$a_T = \frac{15\text{m/s}}{8.0\text{s}} = 1.875\text{m/s}^2$$

由 $a_T=r\alpha$，有

$$\alpha = \frac{a_T}{r} = \frac{1.875\text{m/s}^2}{0.30\text{m}} = 6.2\text{rad/s}^2$$

注意，我们在表示 α 时必须写明 rad。

由　$\theta=\omega_i t+\dfrac{1}{2}\alpha t^2$，有

$$\theta=0+\frac{1}{2}(6.2\text{rad/s}^2)(8.0\text{s})^2=200\text{rad}$$

而 $(200\text{rad})\left(\dfrac{1\text{r}}{2\pi\ \text{rad}}\right)=32\text{r}$

即车轮转了 32 圈。

9.8 洗衣机的脱水桶转速从 900r/min 均匀降到 300r/min，期间转了 50 圈。求(a)角加速度和(b)转这 50 圈所花的时间。

解答　首先将角速度化成弧度量：

$$900\text{r/min}=15.0\text{r/s}=30.0\pi\ \text{rad/s},$$
$$300\text{r/min}=5.00\text{r/s}=10.0\pi\ \text{rad/s}$$

(a) 由于 $\omega_f^2=\omega_i^2+2\alpha\theta$，所以有

$$\alpha=\frac{\omega_f^2-\omega_i^2}{2\theta}=\frac{(10.0\pi\ \text{rad/s})^2-(30.0\pi\ \text{rad/s})^2}{2(100\pi\ \text{rad})}=-4.0\pi\ \text{rad/s}^2$$

(b) 由于 $\omega_{av}=\frac{1}{2}(\omega_i+\omega_f)=20.0\pi\ \text{rad/s},\quad \theta=\omega_{av}t$，

$$t=\frac{\theta}{\omega_{av}}=\frac{100\pi\ \text{rad}}{20.0\pi\ \text{rad/s}}=5.0\text{s}$$

9.9 质量为200g的物体系于绳子末端并作水平圆周运动。已知绳长1.20m，转速为30r/s。求(a)物体的加速度和(b)绳的张力。绳子质量可以忽略。

解 (a) 物体在圆周切向没有加速度，而向心加速度为

$$a_c=\frac{v^2}{r}=r\omega^2$$

式中 ω 必须以rad/s为单位。3.0r/s=6.0π rad/s。所以

$$a_c=(6.0\pi\ \text{rad/s})^2(1.20\text{m})=0.43\text{km/s}^2$$

(b) 使物体作上述加速运动，绳子提供向心力，即绳的张力

$$F_c=ma_c=(0.200\text{kg})(426\text{m/s}^2)=85\text{N}$$

9.10 汽车轮胎与地面的静摩擦因数为0.80，求汽车在水平路面上走一个半径为25m的弯道时，速率的极大值。

解 汽车弯道行驶所需的径向力来源于轮胎与地面的摩擦力，设车质量为 m，其最大摩擦力为 $0.80mg$，它必须大于、等于汽车作圆运动所需的向心力，否则车将向外侧打滑。所以最大速率由下式给出：

$$\frac{mv^2}{r}=0.80mg，\text{或}$$

$$v=\sqrt{0.80gr}=\sqrt{(0.80)(9.81\text{m/s}^2)(25\text{m})}=14\text{m/s}$$

9.11 宇宙飞船在月球上空20 000m的高度绕月球运行。假设飞船只受到月球引力作用，求飞船速率和转一圈所需时间。月球质量 $m_m=7.34\times10^{22}$kg，半径 $r=1.738\times10^6$m。

解 月球对飞船的引力即飞船的向心力：

$$G\frac{m_sm_m}{R^2}=\frac{m_sv^2}{R}$$

式中 m_s 为飞船质量，R 为飞船距月球质心的距离，即轨道半径。所以

$$v=\sqrt{\frac{Gm_m}{R}}=\sqrt{\frac{(6.67\times10^{-11}\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(7.34\times10^{22}\text{kg})}{(1.738+0.0200)\times10^6\text{m}}}=1.67\text{km/s}$$

转一圈所用的时间为

$$t=\frac{2\pi R}{v}=6.62\times10^3\text{s}=110\text{min}$$

9.12 如图9-3所示，绳端的小球在水平面内作圆周运动，若绳与铅垂线成30°角，求小球圆周运动的速率。绳长为24cm。

解 小球受力为重力 mg 以及绳作用力 F_T。F_T 的竖直分量与球重力相平衡，其水平分量提供球作圆周运动的向心力。即

$$F_T\cos30°=mg,\qquad F_T\sin30°=\frac{mv^2}{r}$$

联立得

$$\frac{mg\sin30°}{\cos30°}=\frac{mv^2}{r}$$

$$v=\sqrt{rg(0.577)}$$

式中 $r=\overline{BC}=0.24\ \text{m}\sin30°=0.12\text{m}$，$g=9.81\text{m/s}^2$，解得

$$v=0.82\ \text{m/s}$$

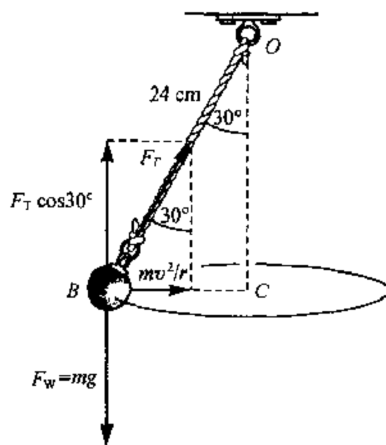


图 9-3

9.13 如图 9-4，珠子沿光滑线轨从 A 点由静止下滑。$h=25\text{cm}$，$R=5.0\text{cm}$。求它滑到(a)B 点和(b)D 点时线轨对珠子的作用力。

解 通常，在数值计算的中间阶段，有效数字可以比按规则要求多两位有效数字，避免最后结果由四舍五入产生误差。以下先求珠子到 B 点时的速率。B 点比初始位置 A 点的高度降低了 $h-2R$，势能差转变为动能

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h-2R)$$

v 为珠子在 B 点时的速率。所以

$$v = \sqrt{2g(h-2R)} = \sqrt{2(9.81\text{m/s}^2)(0.15\text{m})} = 1.716\ \text{m/s}$$

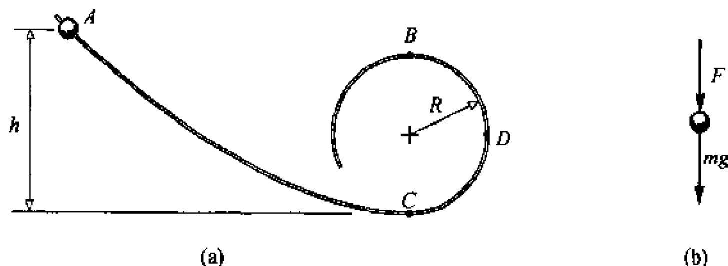


图 9-4

在图 9-4(b)中，珠子在 B 点受两个力：(1)重力和(2)线轨对它的作用力 F(假设向下)。这两个力之和提供珠子圆周运动的向心力 mv^2/R，即

$$mg + F = \frac{mv^2}{R}$$

$$F = \frac{mv^2}{R} - mg = (0.020\text{kg})\left[\left(\frac{1.716^2}{0.050} - 9.81\right)\text{m/s}^2\right] = 0.98\text{N}$$

线轨必须对珠子向下的作用 0.98N，才能使它作圆运动。

(b)在 D 点，重力与所需向心力垂直，因此线轨单独的作用力使珠子作圆运动。

计算方法与(a)类似，在 D 点有

$$v = \sqrt{2g(h-R)} = \sqrt{2(9.81\text{m/s}^2)(0.20\text{m})} = 1.98\text{m/s}$$

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{(0.020\text{kg})(1.98\text{m/s})^2}{0.050\text{m}} = 1.6\text{N}$$

译者说明：为了简化运算，最好先导出运算公式，最后再代人数据。如(a)中

$$F = \frac{mv^2}{R} - mg = \frac{m[2g(h-2R)]}{R} - mg$$

$$= \frac{(0.020\text{kg})[(2)(9.81\text{m/s}^2)(0.25\text{m}-0.10\text{m})]}{0.05\text{m}} - (0.020\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)$$

$$= 0.98\text{N}$$

9.14 如图 9-5，0.90kg 的物体在竖直面内作圆周运动，绳半径为 2.50m。(a)为了使球在圆周顶点仍不至偏离圆周轨迹，球在顶点运动速率 v_t 不得小于多少？(b)在(a)的条件下，球运动到最低点时速率 v_b 等于多少？(c)求球运动到最低点时绳的张力 F_{Tb}，若运动速率就是(b)中的 v_b。

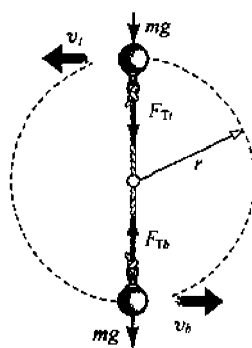


图 9-5

解答 (a) 如图 9-5 所示，球至顶点时所受径向力为(1)重力 mg 和(2)绳张力 F_{Tt}。其合力为向心力

$$\frac{mv^2}{r} = mg + F_{Tt}$$

对于给定的 r，当 $F_{Tt}=0$ 时 v 最小，这时

$$\frac{mv_t^2}{r} = mg$$

$$v_t = \sqrt{rg} = \sqrt{(2.50\text{m})(9.81\text{m/s}^2)} = 4.95\text{m/s}$$

(b) 球从底部到顶部升高了 $2r$，按能量守恒有

$$\frac{1}{2}mv_b^2 = \frac{1}{2}mv_t^2 + mg(2r)$$

代入 v_t 和 g 值得，$v_b=11.1\text{m/s}$。

(c)从图 9-5 可以看到，球运动到底部时受到的力不平衡，这个力 $F_{Tb}-mg$ 就是所需的向心力

$$F_{Tb} - mg = \frac{mv_b^2}{r}$$

代入 $m=0.90\text{kg}$，$g=9.81\text{m/s}^2$，$v_b=11.1\text{m/s}$，$r=2.50\text{m}$ 得

$$F_{Tb} = m\left(g+\frac{v_b^2}{r}\right) = 53\text{N}$$

9.15 一段半径为 30m 的弯道外侧要填高，使汽车仅靠路面的支撑力而无需靠摩擦力就能以 13m/s 的速率转弯。求路面的倾斜角。

解答 汽车不靠摩擦力就可以转弯，受力情况如图 9-6。可知只有两个力作用于汽车：(1)自身重力和(2)路面的支撑力(法向力)F_N。F_N 的竖直分量 $F_N\cos\theta$ 必须能与汽车的重力相平衡，而其水平分量 $F_N\sin\theta$ 则是汽车转弯所需的向心力。因此有

$$F_N\cos\theta = mg, \qquad F_N\sin\theta = mv^2/r$$

相除消去 F_N 和 m 得到

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr} = \frac{(13\text{m/s})^2}{(9.81\text{m/s}^2)(30\text{m})} = 0.575$$

从而得到倾角 $\theta=30°$。

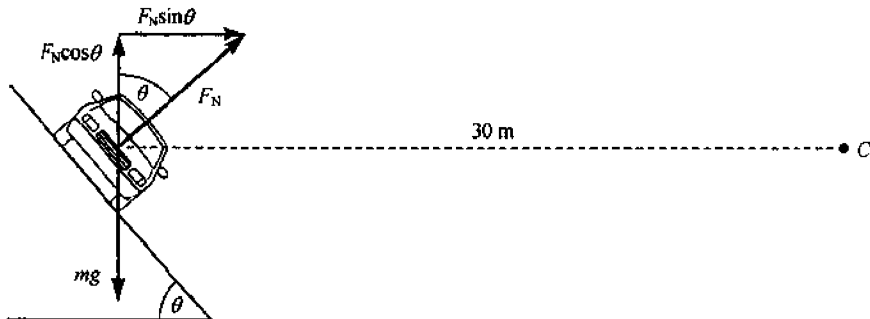


图 9-6

9.16 图 9-7 所示的薄壁圆环绕中心轴转动，其内侧有一木块，木块与环内壁间的摩擦因数为 $\mu_s=0.30$，环半径 $r=150\text{cm}$。若使木块能随环一起转动而不下落、不滑动。环的转

动要多快？

解 环内壁对木块的推力即向心力 $m\omega^2r$。这个力垂直于环壁，使木块与环壁产生摩擦力以阻止木块滑动。因为 $F_f=\mu_sF_N$，而 $F_N=m\omega^2r$，所以有

$$F_f=\mu_sF_N=\mu_sm\omega^2r$$

摩擦力能与重力相平衡，$\mu_sm\omega^2r=mg$，有

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\mu_sr}}=\sqrt{\frac{9.81\text{m/s}^2}{(0.30)(1.50\text{m})}}$$
$$=4.7\text{rad/s}=0.74\text{r/s}$$

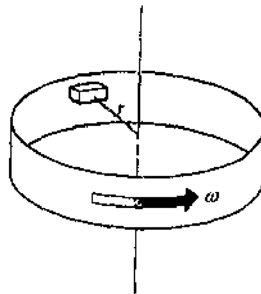


图 9-7

习　题

9.17 作以下单位转换：(a) 50.0r(圈)改 rad(弧度)，(b) 48π rad 改圈数，(c) 72.0r/min 改 rad/s，(d) 1.50×10^3r/min 改 rad/s，(e) 22.0rad/s 改 r/min，(f) 2.000rad/s 改 deg/s(度/秒)。

（答 (a) 314rad；(b) 24r；(c) 452rad/s；(d) 157rad/s；(e) 210r/min；(f) 114.6°/s）

9.18 用以下单位表示 40.0°/s：(a) r/s；(b) r/min；(c) rad/s。

（答 (a) 0.111r/s；(b) 6.67r/min；(c) 0.698rad/s）

9.19 飞轮转速为 480r/min。求飞轮上任一点的角速率以及距轴心 30.0cm 处的切向速率。

（答 50.3rad/s，15.1m/s）

9.20 砂轮的半径为 9.0cm，欲使其边缘运动速率达 6.0m/s。(a) 求砂轮的角速率，(b) 在这种转速下，用砂轮外缘来绕线，3.0s 时间内能绕多长？

（答 (a) 67rad/s；(b) 18m）

9.21 由于地球自转，地表上一点在 6.00h(小时)内转动多少弧度？赤道上一点的切向速率是多少？地球半径为 6370km。

（答 1.57rad，463m/s）

9.22 半径为 25.0cm 的轮子在 9.00s 时间内转速从 120r/min 均匀增加到 660r/min。求(a)匀角加速度（以 rad/s^2 为单位），(b)轮边上一点的切向加速度。（译注：原题中没有"均匀"二字。）

（答 (a) 6.28rad/s^2；(b) 157cm/s^2）

9.23 圆盘在 16.0s 时间内角速率从 12.00rad/s 均匀降到 4.00rad/s。角加速度以及这段时间内圆盘转过多少圈？

（答 -0.500rad/s^2，20.4r）

9.24 半径 30cm 的车轮在 14s 时间内均匀减速，从 8.0r/s 至停止。求其间车轮转了多少圈以及行驶了多远。

（答 56r，0.11km）

9.25 轮子转速从 6.00r/s 增至 26.0r/s，已知角加速度为 4.00rad/s^2。求期间转过多少圈，花了多长时间。

（答 502r，31.4s）

9.26 直径为 20cm 的轮缘上绕有细线。若以 75cm/s 的速率将线绕下来 9.0m 长，轮子将转多少圈，花多长时间？

（答 14r，12s）

9.27 质量为 1.5kg 的物体以 2.0r/s 的速率在半径为 25cm 的圆周上运动。求(a)它的切向速率，(b) 加速度和(c)所需向心力。

（答 (a) 3.1m/s；(b) 39m/s^2；(c) 59N）

9.28 (a)计算地球赤道上一点的径向加速度。(b)如果是北极的极点呢？地球半径为 6.37×10^6m

（答 (a) 0.0337m/s^2；(b) 零）

9.29 速率为 5.0m/s 的汽车试图沿半径 8.0m 的一段圆弧拐弯。设道路水平，若车不得打滑，问车胎与路面间的摩擦因数应多大？

（答 0.32）

9.30 水平圆形平台上有一木箱，箱到转轴 2.0m。木箱与平台间的静摩擦因数为 0.25。平台从静止逐渐加

速。当角速率达到多少时木箱开始滑动？

（答　1.1 rad/s）

9.31　提桶中有一块石头。它们一起在竖直面内作圆周运动，圆半径为60cm。若运动到圆的顶点时，石头仍保持与桶底接触，石块的速率至少为多少？

（答　2.4m/s）

9.32　摆线长80.0cm，摆球质量50.0g。先把摆球拉到一侧，使其比最低位置高20.0cm，然后释放。当球达最低点时，(a)速率是多少？(b)此时线的张力多大？

（答　(a) 1.98m/s；(b) 0.735N）

9.33　参见图9-4。珠子从A点释放，无摩擦滑到B点时，若线轨对珠子作用力为零。h应多高(用R表示)？

（答　$2.5R$）

9.34　上题中如$h=2.5R$，50g的珠子运动到C点时对线轨作用力为多少？

（答　2.9N）

9.35　卫星在地球上空200km处作圆轨道飞行。求卫星的速率以及转一圈所需时间。已知地球质量为6.0×10^{24}kg，半径为6370km。（提示：向心力由引力提供）

（答　7.8km/s，88min）

9.36　轨道过山车行驶到山顶时几乎要停了下来，然后又下坡并冲上了第二个较低的山顶。较低的山顶曲率半径为15m。若乘客在小山顶上时对坐椅的作用力为零，第一个山顶比第二个山顶高多少？

（答　7.5m）

9.37　人体可以承受9.00倍的重力加速度。若飞机速率为770km/h并向下俯冲，在最低点向上拉起。为保证飞行员安全，拉起时飞行路线的曲率半径不得小于多少？

（答　519m）

9.38　质量为60kg的飞行员驾驶滑翔机以40.0m/s的速率飞行。他希望向上拉起飞一个立圆，使他在顶端时对坐椅的压力为350N。求立圆的半径应为多少？

（提示：重力和坐椅都作用于飞行员。）

（答　102m）

9.39　设地球是一个半径$R=6370$km的理想球体。若某人在北极重量精确地等于600N，求他在赤道处称重多少。（提示：秤对人向上的力即秤的读数就是这里所说的重量。）

（答　597.9N）

9.40　质量为m的物体悬挂于长度为L的摆线末端。初始时，摆线与竖直方向成40°角，并释放。求摆线与竖直方向成20°角时，摆线的张力。（提示：将重量沿平行和垂直于摆线方向分解。）

（答　1.29mg）

第十章 刚体转动

转矩(力矩)

一个力对于某个转轴的转矩或力矩已在第五章中定义过了,请参见前文。

转动惯量(I)

转动惯量是物体转动惯性大小的度量。转动惯量大的物体不容易转动起来,而转动惯量小的物体就比较容易。

如果物体由许多小部分 $m_1,m_2,m_3,\cdots$ 组成,它们到转轴的距离分别为 $r_1,r_2,r_3,\cdots$,则物体绕该轴的转动惯量为

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots = \sum m_i r_i^2$$

I 的单位为 $kg \cdot m^2$。

为方便,由下式定义物体绕某转轴的回转半径(k):

$$I = Mk^2$$

式中 M 为物体的总质量,而 k 是到转轴的等效距离,质点 M 在距离转轴 k 处的转动惯量应与该物体绕该轴的转动惯量相同。

转矩和角加速度

转矩 τ 作用在转动惯量为 I 的物体上,使之产生角加速度

$$\tau = I\alpha$$

这里的 τ、I、α 都是相对于同一转轴的。它们的单位分别是,τ 为 $N \cdot m$,I 为 $kg \cdot m^2$,α 为 rad/s^2。

转动动能(KE_r)

若物体绕某轴的转动惯量为 I,转动的角速率为 ω,则转动动能为

$$KE_r = \frac{1}{2} I\omega^2$$

式中 ω 必须以 rad/s 为单位,能量的单位为焦耳(J)。

转动加平动

一个滚动的质量为 M 的物体(如滚球)的能量为两部分能量的总和:(1)该物体绕通过其质心的轴转动的动能(见第八章)和(2)将刚体全部质量集中到质心,这个等效质点的平动动能。即

$$KE_{总} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2$$

注意,式中的 I 为物体绕过质心的轴的转动惯量。

功(W)

物体在恒定转矩 τ 的作用下转过角位移为 θ,则转矩对物体作功为

$$W = \tau\theta$$

式中 θ 必须以弧度为单位,功的单位为焦耳(J)。

功率(P)

转矩 τ 对物体作功的功率为

$$P = \tau\omega$$

式中转矩 τ 以及角速率都是绕同一转轴的量,角速率的单位为 rad/s。

角动量

角动量是矢量,其大小等于 $I\omega$,其方向为转轴的方向。如果作用在物体上的净转矩为零,则物体角动量的大小和方向将保持不变。这就是角动量守恒定律。

角冲量

恒定转矩 τ 作用于某物体的时间为 t,则角冲量的大小为 τt。类似于线运动情况,角冲量使物体角动量发生改变,由下式给出:

$$\tau t = I\omega_f - I\omega_i$$

平行轴定理

如果物体的转轴通过质心,其转动惯量为 I_{cm},则物体绕距质心为 h,且与过质心转轴相平行的轴转动的转动惯量 I 等于

$$I = I_{cm} + Mh^2$$

这就是平行轴定理,式中 M 为物体总质量。

图 10-1 画出了 5 种质量均匀分布的物体(质量均为 M)绕过质心的对称轴的转动惯量。

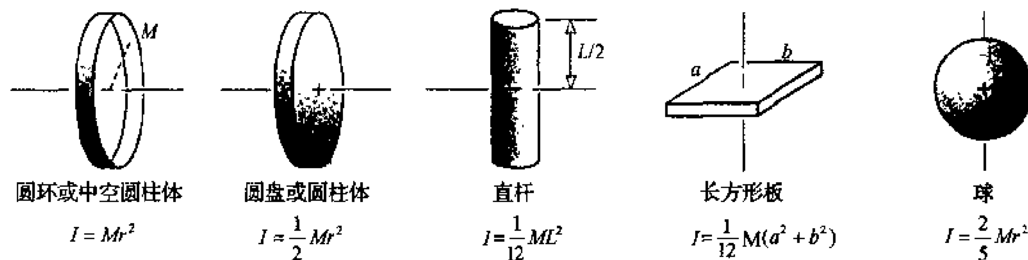


图 10-1

线运动量和角运动量的类比

线位移	s	角位移	θ
线速率	v	角速率	ω
线加速度	a_T	角加速度	α
质量(惯性)	m	转动惯量	I
力	F	力矩(转矩)	τ
线动量	mv	角动量	$I\omega$
线冲量	F_t	角冲量	τ_t

在线运动方程中,若用相应的角运动量取代线运动量,就得到相应的角运动方程。比如

线运动:$F=ma$, $\mathrm{KE}=\frac{1}{2}mv^2$, $W=Fs$, $P=Fv$

角运动:$\tau=I\alpha$, $\mathrm{KE}_r=\frac{1}{2}I\omega^2$, $W=\tau\theta$, $P=\tau\omega$

在角运动方程中,θ、ω 和 α 均须采用弧度制。

例　题

10.1 轮的质量为 6.0kg,回转半径为 40cm,转速为 300r/min。求它的转动惯量和动能。

解 ☞ $I = Mk^2 = (6.0\mathrm{kg})(0.40\mathrm{m})^2 = 0.96\mathrm{kg\cdot m^2}$

转动动能为$\frac{1}{2}I\omega^2$。首先将ω变成以 rad/s 为单位。

$$\omega=\left(300\ \frac{\text{r}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\text{min}}{60.0\text{s}}\right)\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\text{r}}\right)=31.4\text{rad/s}$$

所以

$$KE_r=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}(0.96\text{kg}\cdot\text{m}^2)(31.4\text{rad/s})^2=0.47\text{kJ}$$

10.2 半径为 7.0cm 的匀质圆球，质量为 500g，绕过球心的轴转动。求(a) KE_r，(b) 角动量以及(c) 回转半径。

解 从图 10-1 知，匀质实心球绕经过其质心的轴的转动惯量为

$$I=\frac{2}{5}Mr^2=(0.40)(0.50\text{kg})(0.070\text{m})^2=0.00098\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

(a) 已知 $\omega=300\text{r/s}=188\text{rad/s}$，所以

$$KE_r=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}(0.00098\text{kg}\cdot\text{m}^2)(188\text{rad/s})^2=0.017\text{kJ}$$

注意，角速率须用弧度制。

(b)其角动量为

$$I\omega=(0.00098\text{kg}\cdot\text{m}^2)(188\text{rad/s})=0.18\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

(c)任意物体的转动惯量都表示为 $I=Mk^2$，k 为回转半径。所以

$$k=\sqrt{\frac{I}{M}}=\sqrt{\frac{0.00098\text{kg}\cdot\text{m}^2}{0.50\text{kg}}}=0.044\text{m}=4.4\text{cm}$$

考虑到球的半径为 7.0cm，所以这个回转半径 k 的值是合理的。

10.3 飞机螺旋桨的质量为 70kg，回转半径为 75cm。求其转动惯量。若使它产生4.0r/s^2的角加速度，须给它多大的转矩？

解

$$I=Mk^2=(70\text{kg})(0.75\text{m})=39\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

由 $\tau=I\alpha$，α 须以 rad/s^2 为单位：

$$\alpha=\left(4.0\ \frac{\text{r}}{\text{s}^2}\right)\left(2\pi\ \frac{\text{rad}}{\text{r}}\right)=8.0\pi\ \text{rad/s}^2$$

所以

$$\tau=I\alpha=(39\text{kg}\cdot\text{m}^2)(8.0\pi\ \text{rad/s}^2)=0.99\text{kN}\cdot\text{m}$$

10.4 如图 10-2 所示，40N 的恒力作用于轮的切向。轮半径为 20cm，转动惯量为$30\text{kg}\cdot\text{m}^2$。求(a)轮的角加速度，(b)作用 4.0s 后的角速率和(c)在4.0s内转圈数。(d)试证明作用力在 4.0s 内所作功等于轮子在 4.0s 时刻的转动动能 KE_r。

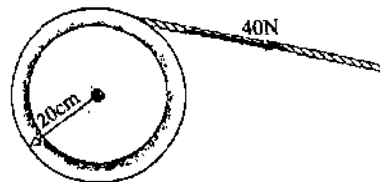


图 10-2

解 (a)由 $\tau=I\alpha$，即

$$(40\text{N})(0.20\text{m})=(30\text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

得　$\alpha=0.267\text{rad/s}^2=0.27\ \text{rad/s}^2$

(b) $\omega_f=\omega_0+\alpha t=0+(0.267\text{rad/s}^2)(4.0\text{s})=1.07\text{rad/s}=1.1\text{rad/s}$

(c) $\theta=\omega_{av}t=\frac{1}{2}(\omega_f+\omega_i)=\frac{1}{2}(1.07\text{rad/s})(4.0\text{s})=2.14\text{rad}=0.34\text{r}$(圈)

(d) 由功=转矩×角位移，即

$$W=(40\text{N}\times0.20\text{m})(2.14\text{rad/s})=17\text{J}$$

转轮最终的动能为

$$KE_r=\frac{1}{2}I\omega_f^2=\frac{1}{2}(30\text{kg}\cdot\text{m}^2)(1.07\text{rad/s})^2=17\text{J}$$

转矩所作的功等于轮动能的增加。

10.5 砂轮是一个质量为 0.90kg、半径为 8.0cm 的匀质圆盘。在 35s 内转速由1400r/min均匀减慢到停止。求摩擦力矩。

解 先来求角加速度 α，然后根据 $\tau=I\alpha$ 进而求出摩擦力矩。

$$f = 1400\text{r/min} = 23.3\text{r/s}$$

而 $\omega=2\pi f$,所以 $\omega_i=146\text{rad/s},\omega_f=0$

$$\alpha = \frac{\omega_f-\omega_i}{t} = \frac{-146\text{rad/s}}{35\text{s}} = -4.2\text{rad/s}^2$$

匀质圆盘的转动惯量

$$I=\frac{1}{2}Mr^2 = \frac{1}{2}(0.90\text{kg})(0.080\text{m})^2 = 2.9\times10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\tau = I\alpha = (0.0029\text{kg}\cdot\text{m}^2)(-4.2\text{rad/s}^2) = -1.2\times10^{-2}\text{N}\cdot\text{m}$$

10.6 用功与能量的关系求上题的解。

解 砂轮的初始动能设为 KE_r,由于克服摩擦力矩而逐渐变慢,直至停止。所以初始动能=克服摩擦力矩的功,即

$$\frac{1}{2}I\omega_i^2 = \tau\theta$$

$$\theta = \omega_{av}t = \frac{1}{2}(\omega_i+\omega_f)t = \frac{1}{2}(146\text{rad/s})(35\text{s}) = 2550\text{rad}$$

由上题,$I=0.0029\text{kg}\cdot\text{m}^2$,代入能量方程有

$$\frac{1}{2}(0.0029\text{kg}\cdot\text{m}^2)(146\text{rad/s})^2 = \tau(2550\text{rad})$$

解得

$$\tau = 0.012\text{N}\cdot\text{m} \quad 或\ 1.2\times10^{-2}\text{N}\cdot\text{m}$$

10.7 已知飞轮的转动惯量为 3.8kg · m²。若使它转 6.0 圈就能从 2.0r/s 增加到 5.0r/s。问需多大的恒定转矩。

解 由题意,

$$\theta=12\pi\ \text{rad},\quad \omega_i=4.0\pi\ \text{rad/s},\quad \omega_f=10\pi\ \text{rad/s}$$

对飞轮作功=轮动能增加

$$\tau\theta = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

$$(\tau)(12\pi\ \text{rad}) = \frac{1}{2}(3.8\text{kg}\cdot\text{m}^2)[(100\pi^2-16\pi^2)(\text{rad/s})^2] = 42\text{N}\cdot\text{m}$$

注意,解这类题时须用弧度和秒为单位运算。

10.8 如图 10-3 所示,半径 $r=15\text{cm}$ 的定滑轮边缘上用绳吊着质量为 400g 的物体。从静止释放,在 6.5s 内物体下降2.0m。求滑轮的转动惯量。

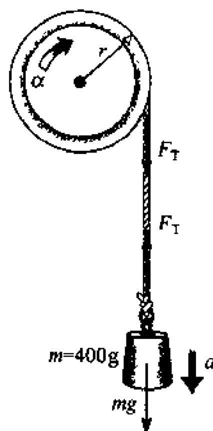


图 10-3

解 对滑轮有 $\tau=I\alpha$,对物体有 $F=ma$。先求 a,由 $y=v_it+\frac{1}{2}at^2$ 有

$$2.0\text{m} = 0+\frac{1}{2}a(6.5\text{s})^2$$

得 $a=0.095\text{m/s}^2$。又由 $a_T=\alpha r$ 所以

$$\alpha = \frac{a_T}{r} = \frac{0.095\text{m/s}^2}{0.15\text{m}} = 0.63\text{rad/s}^2$$

作用在物体上的力为 $mg-F_T$,所以牛顿第二定律的具体形式为

$$mg-F_T = ma,\quad 即$$

$$(0.40\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)-F_T = (0.40\text{kg})(0.095\text{m/s}^2)$$

解得 $F_T=3.88\text{N}$

对滑轮 $\tau=F_Tr=I\alpha$ 即

$$(3.88\text{N})(0.15\text{m}) = I(0.63\text{rad/s}^2)$$

解得 $I=0.92\text{kg}\cdot\text{m}^2$

10.9 用能量方法再计算上题。

解 开始时物体的重力势能 $PE_G=mgh,h=2.0\text{m}$。物体下降 2.0m,全部势能转变成了动能:一部分为物体自身的平动动能 KE,另一部分为滑轮的转动动能 KE_r。即

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

为了求 v_f，注意到 $v_i=0$，$y=2.0\text{m}$，$t=6.5\text{s}$（注意：$a\neq g$，物体不是自由落体）。所以平均速率 v_{av} 为

$$v_{av} = \frac{y}{t} = \frac{2.0\text{m}}{6.5\text{s}} = 0.308\text{m/s}$$

而 $v_{av}=\frac{1}{2}(v_i+v_f)$，$v_i=0$，所以

$$v_f = 2v_{av} = 0.616\text{m/s}$$

而 $v=\omega r$，解得

$$\omega_f = \frac{v_f}{r} = \frac{0.616\text{m/s}}{0.15\text{m}} = 4.1\text{rad/s}$$

代入能量方程式有

$$(0.40\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)(2.0\text{m}) = \frac{1}{2}(0.40\text{kg})(0.62\text{m/s})^2 + \frac{1}{2}I(4.1\text{rad/s})^2$$

解得 $I=0.92\text{kg}\cdot\text{m}^2$

10.10 图 10－4 所示的滑轮有两个轮槽，半径分别为 $r_1=50\text{cm}$ 和 $r_2=20\text{cm}$，滑轮的转动惯量为 $1.70\text{kg}\cdot\text{m}^2$。求滑轮的角加速度以及绳的张力 F_{T1} 和 F_{T2}。

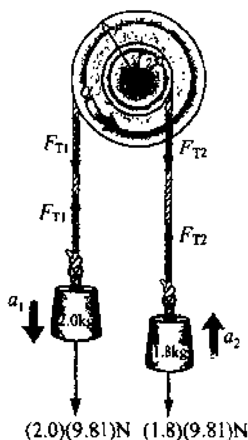


图 10－4

解答 注意线加速度与角加速度的关系 $a=\alpha r$，所以有 $a_1=(0.50\text{m})\alpha$ 和 $a_2=(0.50\text{m})\alpha$。对两个重物应用牛顿第二定律，对滑轮应用 $\tau=I\alpha$，取运动方向为正，有

$$(2.0)(9.81)\text{N} - F_{T1} = 2a_1$$
$$F_{T2} - (1.8)(9.81)\text{N} = 1.8a_2$$
$$(F_{T1})(r_1) - (F_{T2})(r_2) = I\alpha$$

或 $19.6\text{N}-F_{T1}=(1.0\text{m})\alpha$

$F_{T2}-17.6\text{N}=(0.36\text{m})\alpha$

$(0.50\text{m})F_{T1}-(0.20\text{m})F_{T2}=(1.70\text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$

三个方程有三个未知数，由第一式解得 F_{T1} 并代入第三式得到

$$(9.81\text{N}\cdot\text{m}) - (0.50\text{m}^2)\alpha - (0.20\text{m})F_{T2} = (1.70\text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

由此解得 F_{T2}，并代入第二式得

$$-11\alpha + 49 - 17.6 = 0.36\alpha$$

解得 $\alpha=2.8\text{rad/s}^2$。

再将 α 代入第一式、第二式得

$$F_{T1} = 17\text{N}, \quad F_{T2} = 19\text{N}$$

10.11 上题中参数都不变，请用能量的算法求 2.0kg 的物体从静止下落 1.5m 时的速率。

解答 滑轮的角速率为 ω，则 $v_1=r_1\omega$，$v_2=r_2\omega$。

滑轮转过 θ 角，2.0kg 物体下落距离为 s_1，1.8kg 物体上升了 s_2：

$$\theta = \frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}, \quad \text{即 } s_2 = s_1\frac{r_2}{r_1}$$

由能量守恒，势能减小等于动能增加：

$$m_1gs_1 - m_2gs_2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

而 $s_2=(20/50)(1.5\text{m})=0.60\text{m}$，$v_1=(0.50\text{m})\omega$，$v_2=(0.20\text{m})\omega$

解得 $\omega=4.07\text{rad/s}$。所以

$$v_1 = \omega r_1 = (0.50\text{m})(4.07\text{rad/s}) = 2.0\text{m/s}$$

10.12 电机转速为 20r/s 时能给出转矩 $75\text{N}\cdot\text{m}$。求其输出功率为多少马力(hp)。

解答 $\omega=20\text{r/s}=40\pi\ \text{rad/s}$。又

$$P = \tau\omega = (75\text{N}\cdot\text{m})(40\pi\ \text{rad/s}) = 9.4\text{kW} = 13\text{hp}$$

10.13 转轮通过传动带与电机连结。转轮的直径为 38cm，转速为 1200r/min。传动带绷紧

的一侧张力为 600N，而松垂的一侧为 130N。传动带传输到转轮的功率为多少 hp？

解 在这道题中，传动带的两部分对转轮都有力矩。先进行单位变换

$$f = 1200\text{r/min} = 20\text{r/s}$$
$$\omega = 2\pi f = 40\pi\ \text{rad/s}$$

再由 $P=\tau\omega$ 有

$$P = [(600-130)(0.19)\text{N}\cdot\text{m}](40\pi\ \text{rad/s}) = 11\text{kW} = 15\text{hp}$$

10.14 功率为 0.75hp 的电机带动一个静止的轮子，轮子的转动惯量为 2.0 kg·m²。求 8.0s 后轮子的角速率。忽略能量损失。

解 电机在 8.0s 内所作的功＝轮子在 8.0s 后的动能，即功率×时间＝动能。代入数据有

$$(0.75\text{hp})(746\text{W/hp})\times(8.0\text{s}) = \frac{1}{2}(2.0\text{kg}\cdot\text{m}^2)\omega^2$$
$$\omega = 67\text{rad/s}$$

10.15 如图 10－5 所示的匀质实心球在水平表面滚动继而上坡，若忽略摩擦能量损失，它能滚多高？

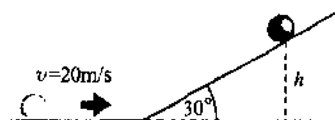


图 10－5

解 球的转动动能和平动动能将转化为它到达最高点时的势能，即

$$\left(\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2\right)_{初始} = (Mgh)_{停止}$$

对于球体，$I=\frac{2}{5}Mr^2$，$\omega=v/r$；所以上述方程为

$$\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)(Mr^2)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = Mgh \quad 或\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{5}v^2 = (9.81\text{m/s}^2)h$$

代入 $v=20$m/s，得 $h=29$m。注意，答案与球的质量以及斜面倾角无关。

10.16 半径为 20cm 的圆环从山坡上释放而滚到高度差 5.0m 处，求这时它的转速。

解 环的初始势能转化为质心平动动能与绕质心转动的动能：

$$Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}Mv^2$$

而 $I=Mr^2$，$v=\omega r$，上述方程变成

$$Mgh = \frac{1}{2}M\omega^2r^2+\frac{1}{2}M\omega^2r^2$$

所以

$$\omega = \sqrt{\frac{gh}{r^2}} = \sqrt{\frac{(9.81\text{m/s}^2)(5.0\text{m})}{(0.20\text{m})^2}} = 35\text{rad/s}$$

10.17 一实心圆盘沿轨道滚动上坡，到坡顶时速率为 80cm/s。若摩擦损失可以忽略不计，求它比坡顶低 18cm 时的速率。

解 在坡顶时圆盘具有平动和转动的动能，相对于 18cm 以下的地方还有一定的势能 PE_G。而在低处，势能则转化为平动和转动的动能

$$(KE_t+KE_r)_{初始}+Mgh = (KE_t+KE_r)_{最后}$$
$$\frac{1}{2}Mv_i^2+\frac{1}{2}I\omega_i^2+Mgh = \frac{1}{2}Mv_f^2+\frac{1}{2}I\omega_f^2$$

对于圆盘有 $I=\frac{1}{2}Mr^2$，$\omega=v/r$，代入 $h=18$cm 并化简得到

$$\frac{1}{2}v_i^2+\frac{1}{4}v_i^2+gh = \frac{1}{2}v_f^2+\frac{1}{4}v_f^2$$

由 $v_i=0.80$m/s，得 $v_f=1.7$m/s。

10.18 图 10－6 中 4 个质点组成一个体系。求体系绕垂直于纸面的轴的转动惯量，如果转轴通过(a)A 点和(b)B 点。

解 (a)由转动惯量定义

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \cdots + m_Nr_N^2$$
$$= (2.0\text{kg} + 3.0\text{kg} + 4.0\text{kg} + 5.0\text{kg})(r^2)$$

这时 r 为对角线长度的一半：

$$r^2 = \frac{1}{4}[(1.20\text{m})^2 + (2.50\text{m})^2]$$

代人上式得 $I_A = 27\text{kg}\cdot\text{m}^2$

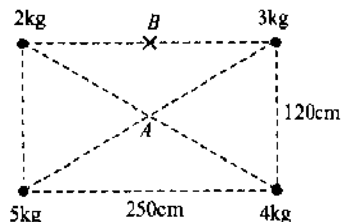


图 10-6

(b) 我们不能应用平行轴定理，因为 A 和 B 点均不是体系的质心。仍然从定义出发。对于 2.0kg 和 3.0kg 的物体，$r=1.25\text{m}$，而对于另外两物体，$r=\sqrt{(1.20)^2+(1.25)^2}=1.733(\text{m})$。所以有

$$I_B = (2.0\text{kg} + 3.0\text{kg})(1.25\text{m})^2 + (5.0\text{kg} + 4.0\text{kg})(1.733\text{m})^2 = 33\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

10.19 图 10-7 中的匀质圆盘直径为 80cm，质量为 6.5kg。求它相对垂直于纸面的轴的转动惯量，若 (a)轴过 G 点以及(b)过 A 点。

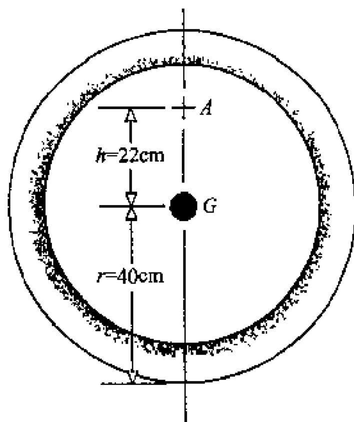


图 10-7

解 (a) $I_G = \frac{1}{2}Mr^2 = \frac{1}{2}(6.5\text{kg})(0.40\text{m})^2$
$=0.52\text{kg}\cdot\text{m}^2$

(b) 应用平行轴定理有

$I_A = I_G + Mh^2$
$= 0.52\text{kg}\cdot\text{m}^2 + (6.5\text{kg})(0.22\text{m})^2 = 0.83\text{kg}\cdot\text{m}^2$

10.20 拖拉机拉着一个大碾子压实土地。碾子为匀质圆柱形，直径为 1.80m，重量 10kN。若不计摩擦损失，使碾子从静止出发，滚动水平距离 3.0m 后速率达到 4.0m/s，求拖拉机输出的平均功率为多少马力。

解 功率等于拖拉机作功除以作功的时间。

作功$=(\Delta\text{KE})_r+(\Delta\text{KE})_t=\frac{1}{2}I\omega_f^2+\frac{1}{2}mv_f^2$

已知 $v_f=4.0\text{m/s}$，$\omega_f=v_f/r=4.44\text{rad/s}$，
$m=10000/9.81=1019(\text{kg})$。碾子的转动惯量为

$$I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(1019\text{kg})(0.90\text{m})^2 = 413\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

代人这些值得到功 $W=12.23\text{kJ}$

还须求出作功所花的时间。由于碾子走过 3.0m 的平均速率为 $v_{av}=\frac{1}{2}(4.0+0)=2.0\text{m/s}$，所以

$$t = \frac{s}{v_{av}} = \frac{3.0\text{m}}{2.0\text{m/s}} = 1.5\text{s}$$

则功率为

$$P = \frac{W}{t} = \frac{12230\text{J}}{1.5\text{s}} = (8150\text{W})\left(\frac{1\text{hp}}{746\text{W}}\right) = 11\text{hp}$$

10.21 如图 10-8 所示，长度为 L，质量为 M 的匀质细杆 AB 在其端点 A 与地面上的销轴相连。若从垂直位置释放，求它落到地面时的角速率。

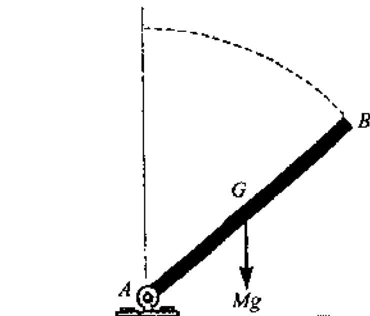


图 10-8

解 细杆绕过 A 点的转轴的转动惯量为

$$I_A = I_G + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

当细杆落地时，其质心 G 降低距离 $\frac{L}{2}$。细杆势能减少等于其转动动能的增加，即

$$Mg\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\omega^2$$

解得 $\omega=\sqrt{3g/L}$。

10.22 如图 10－9 所示，人站在能自由转动的台上，当两臂伸展时其转速为 0.25r/s，而两臂收拢时，转速为 0.80r/s。求两种情况下系统的转动惯量比。

解释 因为没有转矩（为什么？），角动量应守恒。即（角动量）$_{伸展}$＝（角动量）$_{收拢}$

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

所以 $\frac{I_i}{I_f}=\frac{\omega_f}{\omega_i}=\frac{0.80\text{r/s}}{0.25\text{r/s}}=3.2$

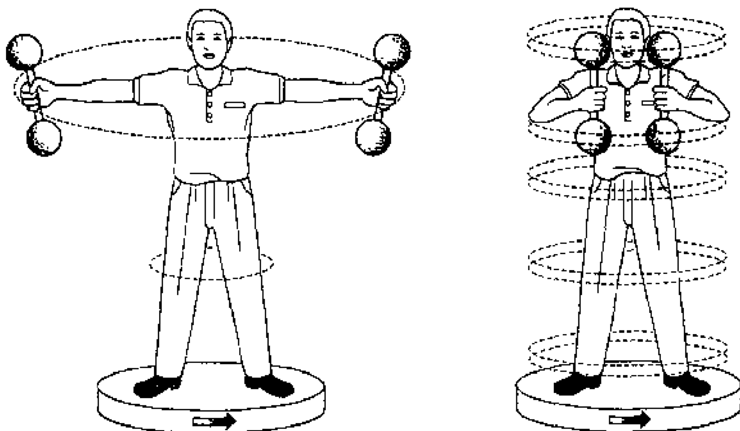


图 10－9

10.23 转动惯量为 I_1 的圆盘绕中心轴转动的角速率为 ω_1。这时另一个原来不转动的，转动惯量为 I_2 的圆盘落到第一个盘上，并成为整体（见图 10－10）。求体系最后的角速率。

解释 由角动量守恒定律，初始角动量等于后来的角动量，即

$$I_1\omega_1 + 0 = I_1\omega + I_2\omega$$

所以 $\omega=\frac{I_1\omega_1}{I_1+I_2}$

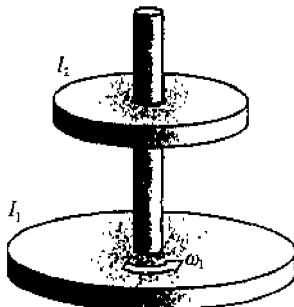


图 10－10

10.24 图 10－10 中下边的圆盘绕中心轴的转动惯量为 I_1。若这时有一个质量为 M 的小物体落在盘面上距中心轴为 R 的地方，这时它们整体的转动惯量为多少？

解释 由转动惯量的定义知，它们作为一个整体的转动惯量为

$$I = \sum_{盘} m_i r_i^2 + MR^2$$

上式第一项是对组成盘的所有质量求和，即为 I_1，所以整体的转动惯量为 I_1+MR^2。

10.25 图 10－10 中下边的圆盘转动惯量为 $I=0.0150\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ 并以 3.0r/s 转速旋转。盘上方距中心 20cm 处有一束细砂落下，在盘面上形成了半径 20cm 的圆砂环。若盘转速降到 2.0r/s，求落到盘面上的砂的质量。

解释 当有 Δm 的细砂落到盘面上，盘的转动惯量增加了 $r^2\Delta m$。当质量为 m 的细砂落到盘面上，盘和砂的体系的转动惯量为 $I+mr^2$。砂原来角动量为零，所以角动量守恒

$$I\omega_i = (I + mr^2)\omega_f$$

$$m=\frac{I(\omega_i-\omega_f)}{r^2\omega_f}=\frac{(0.0150\text{kg}\cdot\text{m}^2)(6.0\pi-4.0\pi)\text{rad/s}}{(0.040\text{m}^2)(4.0\pi\ \text{rad/s})}=0.19\text{kg}$$

习　题

10.26 200N 的力沿切向作用于半径为 25cm 的轮子的边缘。(a)求力的转矩。(b)若力与轮子辐条的角度

为 40°,转矩为多少?

(答 (a) 50N·m;(b) 32N·m)

10.27 某质量为 8.0kg 的轮子的回转半径为 25cm。(a)求其转动惯量。(b)若使轮子得到 3.0rad/s^2 的角加速度,需多大转矩?

(答 (a) 0.50kg·m^2;(b) 1.5N·m)

10.28 飞轮质量为 50kg,回转半径为 40cm。要使飞轮从静止状态,在 10s 内达到转速 300r/min,需给予多大恒定的转矩?

(答 25N·m)

10.29 一个 4.0kg、回转半径为 20cm 的轮子以 360r/min 的角速率转动。摩擦力矩为0.12N·m。问经过多长时间轮子将停止转动。

(答 50s)

10.30 25kg、回转半径为 22cm 的轮子以 6.0r/s 的转速旋转。求其转动动能。

(答 0.86kJ)

10.31 3.0m 长的细线绕在轮子的轴上。用 40N 的恒力拉此细线,当线完全拉下时,轮子的转速达到2.0r/s。求轮和轴整体的转动惯量。(提示:用能量求解最简便)

(答 1.5kg·m^2)

10.32 500g 的轮子,转动惯量为 0.015kg·m^2。开始时转速为 30r/s,又转了 163 圈就停止了。求阻力矩。

(答 0.26N·m)

10.33 对飞轮作功 100J,使飞轮从 60r/min 增加到 180r/min。求飞轮的转动惯量。

(答 0.63kg·m^2)

10.34 质量 5.0kg、回转半径为 20cm 的轮子从静止状态开始转动,转了 25 圈角速率即达 10r/s。求所受转矩。

(答 2.5N·m)

10.35 电机转速为 900r/min 时提供 2.0hp 功率。求它能给出多大的转矩。

(答 16N·m)

10.36 发电机的轮子半径为 40cm,受到皮带的拖动以 300r/min 的转速旋转。已知皮带张紧的一侧的张力为 1600N,而较松的一侧为 500N。若发电机效率为 90%。它可以产生多少千瓦的功率?

(答 12kW)

10.37 质量为 25kg、半径为 40cm 的轮子可以绕水平方向的轴自由转动。轮子的回转半径为 30cm。轮缘上绕有细线,线末端悬挂一 1.2kg 的物体。物体下落则使轮转动。求下落物体的加速度以及线的张力。

(答 0.77m/s^2,11N)

10.38 一个轮轴总的转动惯量为 0.0020kg·m^2。轴半径为 2.0cm。轮的外缘绕有细线,线末端悬挂一 800g 物体。物体下落可使轮子绕水平轴转动。求若使轮子从静止开始到 3.0r/s 的转速,物体需下落多少距离。

(答 5.3cm)

10.39 一个 20kg 的实心圆盘$\left(I=\frac{1}{2}Mr^2\right)$在水平表面上以 2.0m/s 的速率滚动。求其总动能。

(答 0.24kJ)

10.40 一个 6.0kg 的保龄球($I=2Mr^2/5$)从静止状态沿坡面下滚,到了比出发点低 80cm 的地方。若忽略摩擦损失,求这时球运动的速率。

(答 3.3m/s)

10.41 一个小球($I=2Mr^2/5$)在一个大的半球内表面作纯滚动,如图 10-11(球比画得要小得多)。若小球从 A 点释放,试求它到达(a)B 点和(b)C 点时的速率。

(答 (a) 2.65m/s;(b) 2.32m/s)

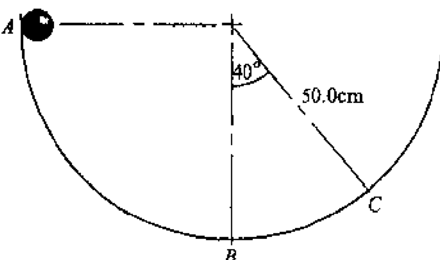


图 10-11

10.42 试求一个直径为 24cm 的实心圆盘绕过其质心、且垂直于盘面的转轴的回转半径。

(答 8.5cm)

10.43 如图 10-12 所示,四个质点分别在一个正方形的四个顶点上,正方形的边框质量可忽略。试求若垂直于纸面

的转轴通过(a)A点或(b)B点时，系统的转动惯量。

(答　(a) $1.4\text{kg}\cdot\text{m}^2$；(b) $2.1\text{kg}\cdot\text{m}^2$)

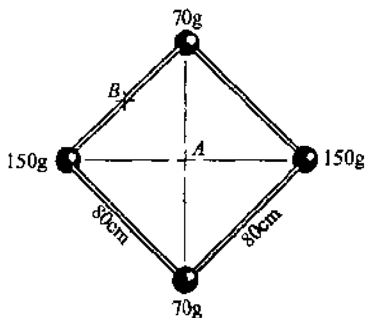


图 10 - 12

10.44 (a)试求一个竖直薄壁圆环($M=2\text{kg}$，$r=9\text{cm}$)绕过其边缘的水平轴的转动惯量。(b)试求一个2kg、半径为5cm的实心球绕与其球面相切的转轴的转动惯量。

(答　(a) $I=Mr^2+Mr^2=0.03\text{kg}\cdot\text{m}^2$；

(b) $I=\frac{2}{5}Mr^2+Mr^2=7\times10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2$)

10.45 米尺的一端通过销轴O连接，并可以在竖直面内自由转动，如图10 - 13所示。将它从水平位置释放，求通过图中的位置时的角速率和自由端的线速率。(提示：先证明$I=mL^2/3$)

(答　5.0rad/s 和 5.0m/s)

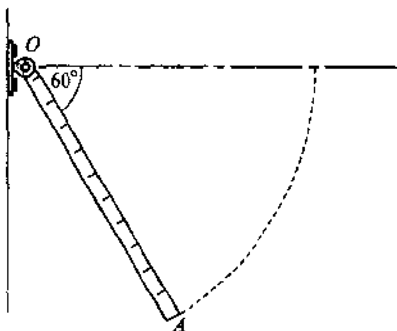


图 10 - 13

10.46 一飞船绕月球作椭圆轨道飞行。其近地点到月球质心距离为r_c，这时飞船速率为v_c；远地点时为r_f和v_f。求v_c/v_f。(提示：在近地点和远地点时有$v=r\omega$成立。)

(答　r_f/r_c)

10.47 一个大的水平圆盘($I=4000\text{kg}\cdot\text{m}^2$)绕过质心的垂直轴转动。当其角速率为0.150r/s时，有一个质量为90.0kg的人从树上跳下并站到距转轴3.00m的地方。求这时转盘的角速率。

(答　0.125r/s)

10.48 恒星(比如我们的太阳)坍塌后形成中子星。假设质量为M、半径为R的匀质球状恒星坍塌成为半径为$10^{-5}R$的匀质球体，若恒星原来的转速为每25天转一圈(正如太阳)，试求它形成的中子星的转速。

(答　5×10^3r/s)

10.49 一个90kg的人站在静止的儿童欢乐转盘上，距中心5.0m。人沿盘边行走，相对地面的速率为0.80m/s。若盘的转动惯量为20 000$\text{kg}\cdot\text{m}^2$，求盘转速。(提示：对于人有$I=mr^2$)

(答　0.018rad/s)

第十一章 简谐振动和弹簧

周期(T)

一个振动或转动的体系周而复始地运动，每完成一个完整循环所需要的时间叫周期。对于振动而言，周期即体系往返运动一次的时间，常以秒为单位。

频率(f)

单位时间内振动的次数，或每秒钟的循环次数叫频率。因为 T 是一个循环所需时间，所以频率 $f=1/T$。频率的单位为赫兹，每秒一周期为 1 赫兹(Hz)。

振动的图示法

图 11－1 描述了弹簧末端悬挂质量为 m 的物体上下振动的情况。从 a 到 b，或从 c 到 d，或从 e 到 f 都是一个完整的周期，所需时间即为 T。

位移(x 或 y)

振动物体偏离其平衡位置(一般为静止位置)的距离叫位移。平衡位置即振动路径的中点。振动过程中的最大位移量称为振幅(参见图 11－1)。

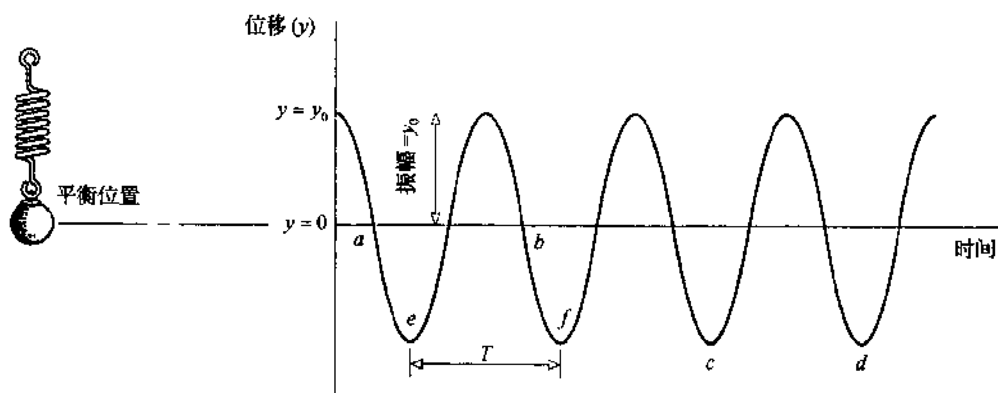


图 11－1

恢复力

如果体系处于振动状态，反抗体系位移的力叫恢复力。换句话说，对体系而言，无论恢复力是推力还是拉力，总是使体系朝平衡位置运动，即恢复力总是指向平衡位置的。对挂在弹簧末端的物体，当弹簧被拉伸时，弹簧就将物体拉向平衡位置；反之，弹簧被压缩，就将这个物体推向平衡位置。

简谐振动(SHM)

一个服从胡克定律的体系所经历的振动方式是简谐振动。图 11－1 所描述的运动就是简谐振动。由于其运动图像呈正弦或余弦函数的形式，所以常把简谐振动称为正弦振动。简谐振动的最主要特点是体系以单一频率振动，所以才称为“简谐”。

胡克体系

弹簧、悬线或杆状物体等等，受外力作用发生形变，而外力撤除后，体系将恢复到原来的位

形:此外,当这体系拉长了一段距离 x(若为压缩则 x 为负值),恢复力服从胡克定律

$$F=-kx$$

负号表明恢复力的方向总是与位移的方向相反,弹簧的劲度系数 k 的单位为 N/m,是弹簧弹性的度量。当形变较小时,大部分弹簧服从胡克定律。

人们有时用外力来表述胡克定律,外力 $F_外$ 拉伸(或压缩)弹簧使其形变量为 x,有

$$F_外=kx$$

$F_外$ 是弹簧恢复力的负值。

弹性势能

如果形变 x 在弹簧的弹性范围以内,则贮存在弹簧中的弹性势能为 $PE_e=\frac{1}{2}kx^2$。若弹簧末端物体的振幅为 x_0,则振动体系的能量始终为 $\frac{1}{2}kx_0^2$。但只有当 $x=\pm x_0$,即弹簧达最大位移时,这些能量才完全贮藏在弹簧中。

能量转换

在振动体系中不断进行动能和势能之间的转换。当体系通过平衡位置时,动能 KE 达到极大,势能 $PE_e=0$。而当体系位移最大时,KE=0,PE_e 达到极大。按能量守恒定律,若没有摩擦形式的能量损失,有

$$KE+PE_e=常数$$

对于质量为 m 的弹簧振子(弹簧自身质量可以忽略),上式变为

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kx_0^2$$

式中 x_0 为振幅。

简谐振动的速率

由上述能量守恒式可得到简谐振动振子的速率

$$|v|=\sqrt{(x_0^2-x^2)\frac{k}{m}}$$

简谐振动的加速度

体系形变后,恢复力将驱动振子。可以通过胡克定律和牛顿第二定律来求振子的加速度:

$$F=-kx$$

$$F=ma$$

$$a=-\frac{k}{m}x$$

负号表明加速度 $\boldsymbol{a}$(也即 $\boldsymbol{F}$)的方向总是与位移($\boldsymbol{x}$)的方向相反。请记住,$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 都不是固定不变的。

参考圆

如图 11-2 所示,假设质点 P 以常速率 v_0 作圆周运动,这个圆就称为简谐振动的参考圆。图中的 x 轴与参考圆的直径相重合。P 点在 x 轴上的投影 A 在简谐振动的中心附近往复运动。运动的振幅为 x_0,即圆的半径。P 点绕圆周一圈所需时间为振动的周期。点 A 的 x 方向速率即速度 v_0 的 x 分量:

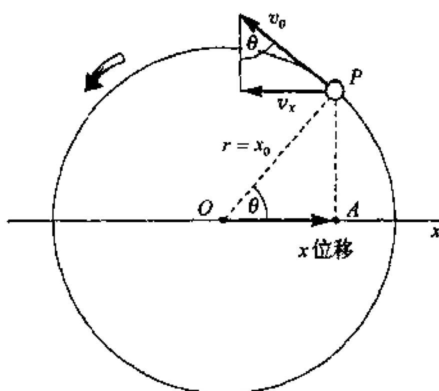


图 11-2

$$v_x = -v_0\sin\theta$$

当 v_x 值为正时，$\boldsymbol{v}_x$ 指向 x 轴的正方向，当 v_x 为负值时，$\boldsymbol{v}_x$ 指向 x 轴的反方向。

简谐振动的周期

简谐振动的周期是 P 点绕图 11-2 中参考圆一周所需要的时间，所以

$$T = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi x_0}{v_0}$$

但 v_0 是图 11-2 中 A 点的最大速率，即简谐振动位移 $x=0$ 时的速率 $|v_x|$

$$|v_x| = \sqrt{(x_0^2 - x^2)\frac{k}{m}}\text{，或 } v_0 = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

所以弹簧振子作简谐振动的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

加速度与周期的关系

从 $a=-(k/m)x$，和 $T=2\pi\sqrt{m/k}$ 两式中消去 k/m，得到加速度与周期的关系

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2}x$$

单摆

当摆角很小时，单摆的运动就近似为简谐振动。若摆线长为 L，所在地重力加速度为 g，则摆动周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

简谐振动的解析表达式

参见图 11-2，P 点的水平位移为 $x=x_0\cos\theta$。而 $\theta=\omega t=2\pi ft$，$\omega=2\pi ft$ 为参考点 P 在圆周上运动的角速率，所以

$$x = x_0\cos2\pi ft = x_0\cos\omega t$$

同样，P 点运动的 y 分量为

$$y = x_0\sin2\pi ft = x_0\sin\omega t$$

从图 11-2 也可得出，$v_x=v_0\sin2\pi ft$。

例　　题

11.1　对于图 11-3 所示的运动，它的振幅、周期和频率各是多少？

解　振幅为偏离平衡位置的最大位移，即 0.75cm。周期为体系完成一个循环所需时间，比如从 A 到 B 的时间。所以周期为 0.20s。而频率

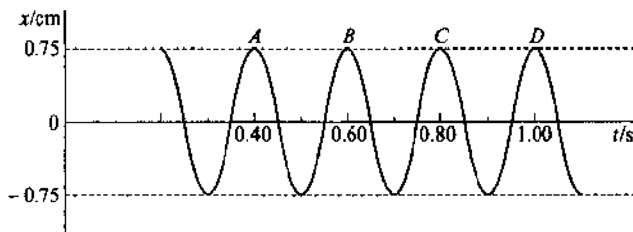


图 11-3

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.20\mathrm{s}}=5.0\mathrm{Hz}$$

11.2 一弹簧在 40s 内完成了 12 次振动。求其周期和振动频率。

解答

$$T=\frac{40\mathrm{s}}{12}=3.3\mathrm{s}$$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{12}{40\mathrm{s}}=0.30\mathrm{Hz}$$

11.3 一个 400g 的物体挂到竖直弹簧的底部，使弹簧拉长 35cm。求弹簧的劲度系数。若再加挂一个 400g 的物体，弹簧伸长多少？

解答 我们应用式 $F_{外}=ky$

$$F_{外}=mg=(0.400\mathrm{kg})(9.81\mathrm{m/s^2})=3.92\mathrm{N}$$

得

$$k=\frac{F}{y}=\frac{3.92\mathrm{N}}{0.35\mathrm{m}}=11\mathrm{N/m}$$

再加挂 400g 物体，外力为 7.84N，所以

$$y=\frac{F}{k}=\frac{7.84\mathrm{N}}{11.2\mathrm{N/m}}=0.70\mathrm{m}=2\times35\mathrm{cm}$$

只要弹簧是胡克体系，不管加载与否，每加 400g 的物体都会使弹簧伸长相同的长度。

11.4 劲度系数 $k=7.0\mathrm{N/m}$ 的弹簧水平放置，一个 200g 的物体连在弹簧末端并在外力作用下偏离平衡位置 5.0cm，然后去掉外力开始振动。忽略摩擦，求(a)物体的最大速率和(b)当物体偏离平衡位置 3.0cm 时的速率以及(c)在以上两种状态下的加速度。

解答 用能量守恒方程，式中 $k=7.0\mathrm{N/m}$，$x_0=0.050\mathrm{m}$，$m=0.200\mathrm{kg}$，解得

$$v=\sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2-x^2)}$$

(a) 当 $x=0$ 时，即物体通过平衡位置时速率最大

$$v=x_0\sqrt{\frac{k}{m}}=(0.050\mathrm{m})\sqrt{\frac{7.0\mathrm{N/m}}{0.200\mathrm{kg}}}=0.30\mathrm{m/s}$$

(b) 当 $x=0.030\mathrm{m}$ 时

$$v=\sqrt{\frac{7.0\mathrm{N/m}}{0.200\mathrm{kg}}[(0.050)^2-(0.030)^2]\mathrm{m^2}}=0.24\mathrm{m/s}$$

(c) 应用 $F=ma$ 和 $F=kx$ 有

$$a=\frac{k}{m}x=(35\mathrm{s^{-2}})(x)$$

所以当 $x=0$ 时，$a=0$；当 $x=0.030\mathrm{m}$ 时，$a=1.1\mathrm{m/s^2}$。

11.5 质量为 50g 的物体挂在弹簧末端作简谐振动，已知振幅为 12cm，周期为 1.70s。求(a)频率，(b)弹簧的劲度系数，(c)最大速率，(d)最大加速度，(e)当位移为 6.0cm 时的速率以及(f)当 $x=6.0\mathrm{cm}$ 时的加速度。

解答 (a) $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{1.70\mathrm{s}}=0.588\mathrm{Hz}$

(b) 由 $T=2\pi\sqrt{m/k}$ 有

$$k=\frac{4\pi^2 m}{T^2}=\frac{4\pi^2(0.050\mathrm{kg})}{(1.70\mathrm{s})^2}=0.68\mathrm{N/m}$$

(c) $v_0=x_0\sqrt{\frac{k}{m}}=(0.12\mathrm{m})\sqrt{\frac{0.68\mathrm{N/m}}{0.050\mathrm{kg}}}=0.44\mathrm{m/s}$

(d) 由 $a=-(k/m)x$，可知当 x 达极大值时 a 最大，即 $x=\pm x_0$ 时有

$$a_0=\frac{k}{m}x_0=\frac{0.68\mathrm{N/m}}{0.050\mathrm{kg}}(0.12\mathrm{m})=1.6\mathrm{m/s^2}$$

(e) $|v|=\sqrt{(x_0^2-x^2)\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{[(0.12\mathrm{m})^2-(0.06\mathrm{m})^2](0.68\mathrm{N/m})}{(0.050\mathrm{kg})}}=0.38\mathrm{m/s}$

$$(f)\ a=-\frac{k}{m}x=-\frac{0.68\text{N/m}}{0.050\text{kg}}(0.060\text{m})=-0.82\text{m/s}^2$$

11.6 弹簧上已经挂上 50g 的物体。若再增加 20g，弹簧又伸长了 7.0cm。(a)求弹簧的劲度系数，(b)如果撤掉这 20g，弹簧的振动周期是多少？

解答 (a)在 50g 作用下弹簧伸长为 x_1，$F_{外1}=kx_1$。增加 20g 后有 $F_{外1}+F_{外2}=k(x_1+x_2)$，这里 $F_{外2}$ 为 20g 的重力，而 x_2 为这 20g 造成的伸长。两式相减得

$$F_{外2}=kx_2$$

所以

$$k=\frac{F_{外2}}{x_2}=\frac{(0.020\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)}{0.070\text{m}}=2.8\text{N/m}$$

注意，这种作法等同于直接应用 $F_外=kx$，其中 $F_外$ 即另增加的外力，而 x 则是与这个力相对应的伸长。即我们本来就不必考虑弹簧先已挂上 50g 物体的事实。

(b)

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.050\text{kg}}{2.8\text{N/m}}}=0.84\text{s}$$

11.7 如图 11-4 所示，轻质弹性钢片下端夹住，而顶部连结一2.0kg的小球。需要 8.0N 的水平力使小球位移 20cm。假设撤除外力后系统作简谐振动。求(a)簧片的劲度系数和(b)小球来回摆动的周期。

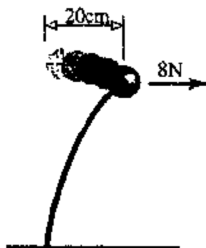


图 11-4

解答 (a) $k=\frac{外力\ F_外}{位移}=\frac{8.0\text{N}}{0.20\text{m}}=40\text{N/m}$

(b) $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{2.0\text{kg}}{40\text{N/m}}}=1.4\text{s}$

11.8 质量为 m 的物体挂在弹簧下端使弹簧伸长 6.0cm。若轻拉一下物体然后放开，求体系的振动周期。

解答

$$k=\frac{F_外}{x}=\frac{mg}{0.060\text{m}}$$

而 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.060\text{m}}{g}}=0.49\text{s}$

11.9 两个相同的弹簧，$k=20\text{N/m}$。质量 0.30kg 的物体按图 11-5(a)和(b)两种方式与弹簧连接在一起。忽略摩擦力，求两种情况下体系的周期。

解答 (a) 考察物体位移 $x>0$ 会发生什么事。这时一个弹簧伸长而另一个压缩。它们都对这个物体有作用力，且大小相等，方向都是反抗物体的位移。所以总的恢复力为 $F=-(20\text{N/m})x-(20\text{N/m})x=-(40\text{N/m})x$

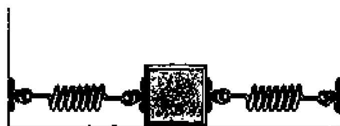
与 $F=-kx$ 相较，得到这个体系的劲度系数 $k=40\text{N/m}$，所以

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.30\text{kg}}{40\text{N/m}}}=0.54\text{s}$$

(b)当物体向下位移 y，每个弹簧都伸长了 y。对物体的作用力，即体系的恢复力为

$$F=-(20\text{N/m})y-(20\text{N/m})y=-(40\text{N/m})y$$

与 $F=-ky$ 比较，得到 $k=40\text{N/m}$，情况同(a)。所以周期也为 0.54s。


(a)

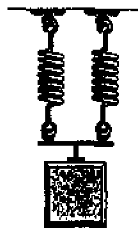

(b)

图 11-5

11.10 在某发动机内部，活塞在竖直方向上作简谐振动，振幅为 7.0cm。活塞顶部有一垫片。随着电机转速增加，在什么频率下垫片将不再与活塞接触？

解答 垫片向下加速度的极大值即重力加速度 g。若活塞向下的加速度大于重力加速度，垫片就不再与活塞接触。

简谐振动的加速度与周期和位移的关系为

$$a=-\frac{4\pi^2}{T^2}x$$

选向上为正方向，当 $x=+x_0=0.070\text{m}$ 时才有向下最大（也是最负的）加速度。

$$a_0=\frac{4\pi^2}{T^2}(0.070\text{m})$$

当 a_0 刚达到 g 时，垫片将与活塞脱离。所以体系的临界周期 T_c 为

$$\frac{4\pi^2}{T_c^2}(0.070\text{m})=g$$

解得　$T_c=2\pi\sqrt{\dfrac{0.070\text{m}}{g}}=0.53\text{s}$

这相当于频率 $f=1/T_c=1.9\text{Hz}$。即，若活塞的运动频率超过 1.9Hz 时，垫片将不再与活塞接触。

11.11 一台 20kg 的电机安装在四个竖直弹簧上，每个弹簧的劲度系数都是 30N/cm。求电机竖直方向作简谐振动的周期。

解答 和 11.9 题一样，我们可以用一个等效弹簧来代替这 4 个弹簧。等效弹簧的劲度系数为 4(3000N/m)=12000N/m。所以

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{20\text{kg}}{12000\text{N/m}}}=0.26\text{s}$$

11.12 将水银注入 U 型玻璃管。通常两管内水银柱会等高。但扰动后，水银就会在两管间来回振动（见图 11-6）。已知每 cm 高水银柱的质量为 15.0g。假设如图示，水银柱受扰动后来回无摩擦地振动起来。求(a)等效的弹簧劲度系数和(b)系统振动周期。

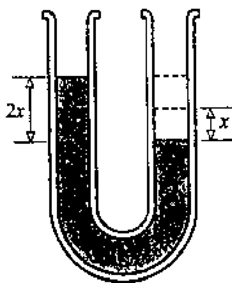


图 11-6

解答 (a)如图所示，当水银柱面偏离平衡位置为 x，恢复力就等于高度差 $2x$ 的水银柱的重量。水银柱每米质量为 1.50kg，所以 $(2x)$ 的水银柱质量为 $(2x)(1.50\text{kg})$，其重量为 $mg=(29.4\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)(x)$，也即恢复力

$$F=(29.4\text{N/m})(x)$$

对比 $F=kx$ 形式，得 $k=29.4\text{N/m}$，即为等效的弹簧劲度系数。

(b)振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}=1.16\sqrt{M}\text{s}$$

式中 M 为 U 型管内水银总质量，它们都在恢复力作用下而运动。

11.13 摆长为 150.3cm 的单摆在 246.7s 的时间内摆动了 100.0 周期。求该地的重力加速度。

解答

$$T=\frac{246.7}{100.0}=2.467(\text{s})$$

由 $T=2\pi\sqrt{L/g}$，有

$$g=\frac{4\pi^2}{T^2}L=9.749\text{m/s}^2$$

11.14 图 11-7 中的物体被外力向左推并使弹簧压缩了 15cm。然后撤除外力，物体被弹力向右弹出。忽略摩擦力以及弹簧的质量。求物体被弹出时的速度。

解答 弹簧受到压缩便贮存能量：$\frac{1}{2}kx_0^2$，$x_0=0.15\text{m}$。撤除外力后这一能量便转化为物体的动能

KE。当到达弹簧平衡位置时，所有弹性势能 PE_e 全部转化为动能 KE（弹簧质量可忽略，其动能也可不计）。所以

初始势能 PE_e = 最后物体的动能 KE

$$\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}(400\text{N/m})(0.15\text{m})^2=\frac{1}{2}(0.200\text{kg})v^2$$

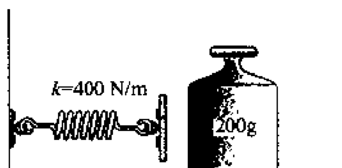


图 11－7

解得 $v=6.7$m/s

11.15 若上题中的物体最初以 8.0m/s 的速率向左运动碰到弹簧后便与之连在一起。(a)这物体将弹簧压缩多少？(b)后来这体系往返振动起来，其振幅为多少？（不计摩擦影响）

解 由题意，弹簧质量不计，所以物体的动能都用于压缩弹簧，最终转化成为弹性势能：

初始动能 = 最后势能

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}kx_0^2$$

代入 $v_0=8.0$m/s，$m=0.200$kg 和 $k=400$N/m，得到 $x_0=0.179$m$=0.18$m。

(b)弹簧偏离平衡位置压缩了 0.179m。这时所有能量均成为体系的势能 PE_e。当它向右运动时，物体经过平衡点并继续运动，直到平衡点右侧的某点停止，所有能量又都成为势能 PE_e。由于没有能量损失，这时伸长的弹簧所贮存的势能与它受压缩时完全相同。因此它将伸长 $x_0=0.18$m。即振幅为 0.18m。

11.16 图 11－8 中质量 2.0kg 的物体在弹簧未被拉伸时释放。忽略滑轮的转动惯量和摩擦力以及弹簧和绳的质量。求(a)体系振动的振幅和(b)平衡点的位置。

解 (a)假设物体能够下落的最大距离为 h。这时它损失的重力势能 PE_G 全部转化为弹性势能而贮存在弹簧里

$$mgh=\frac{1}{2}kh^2\qquad 或\ h=2\frac{mg}{k}=0.13\text{m}$$

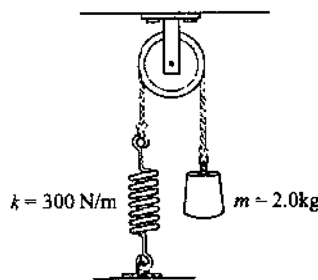


图 11－8

物体向上运动直到体系的能量又转化为 PE_G，即比最低位置又升高了 0.13m。所以振幅为 0.13/2=0.065(m)。

(b)运动的中心点比物体开始释放的位置低 0.065m，即等于物体从最高点到最低点距离的一半。

11.17 一个 3.0g 的质点挂在弹簧末端并按方程

$$y=0.75\sin 63t$$

的形式运动，式中 y 以 cm 为单位，t 以 s 为单位。求运动的振幅和频率、$t=0.020$s 时物体的位置以及弹簧的劲度系数。

解 简谐振动方程的一般形式为

$$y=y_0\sin 2\pi ft$$

两相比较得到 $y_0=0.75$cm，而 $2\pi f=63\text{s}^{-1}$。所以

$$f=10\text{Hz}$$

（注意，正弦的幅角必须是无量纲量，t 以 s 为单位，$2\pi f$ 就必须以 s^{-1} 为单位）。

当 $t=0.020$s 时，有

$$y=0.75\sin(1.26\text{rad})=(0.75)(0.952)=0.71\text{cm}$$

注意，幅角以弧度为单位，而不是度。应用　$f=(1/2\pi)\sqrt{k/m}$　得

$$k=4\pi^2f^2m=11.9\text{N/m}=12\text{N/m}$$

习　题

11.18 摆球至左侧最高点开始计时。若计到摆球第 90 次到达左侧最高点，时间为 60.0s。求摆动周期和频

率。

(答 0.667s,1.50Hz)

11.19 弹簧末端悬挂一个 300g 的物体上下振动。已知物体的最低点在桌面上方 2.0cm 处,而最高点距桌面 16cm,周期为 4.0s。求(a)振幅,(b)弹簧的劲度系数,(c)当物体距桌面 9cm 时的速率和加速度,(d)物体距桌面 12cm 时的速率和加速度。

(答 (a) 7.0cm;(b) 0.74N/m;(c) 0.11m/s,0;(d) 0.099m/s,0.074m/s^2)

11.20 弹簧吊挂一 1.5kg 的物体时伸长 10cm。假设吊挂 4.0kg 的物体并使弹簧振动起来,振幅为 12cm。求(a)弹簧的劲度系数,(b)作用在物体上恢复力的极大值,(c)振动周期,(d)最大速率和最大加速度,(e)当位移为 9cm 时,物体的速率和加速度。

(答 (a) 0.15kN/m;(b) 18N;(c) 1.0s;(d) 0.73m/s,4.4m/s^2;(e) 0.48m/s,3.3m/s^2)

11.21 一个 2.5kg 的物体作简谐振动,每秒钟内精确地振动三次。求物体偏离平衡位置 5.0cm 时的加速度以及所受的恢复力。

(答 18m/s^2,44N)

11.22 300g 的弹簧振子振幅为 7.0cm,频率为 1.80Hz。求(a)最大速率和最大加速度,(b)位移为 3.0cm 时的速率。

(答 (a) 0.79m/s,8.9m/s^2;(b) 0.72m/s)

11.23 某弹簧悬挂一物体时伸长了 20cm。使它振动起来后,其振动频率为多少?

(答 1.1Hz)

11.24 弹簧悬挂 300g 的物体,其简谐振动周期为 2.4s。若悬挂 133g 的物体,其周期为多少?

(答 1.6s)

11.25 50g 的弹簧振子频率为 0.70Hz。若弹簧伸长了 15cm,求外力所作的功以及弹簧贮存的能量。

(答 0.011J,0.011J)

11.26 在类似图 11-7 所示的装置中,轻质弹簧的劲度系数 k=400N/m。向左推动一物体使弹簧压缩了 8.0cm然后放开。物体沿桌面滑动了 55cm 后停止。求阻碍运动的摩擦力的大小。

(答 2.3N)

11.27 竖直弹簧 k=30N/m,在末端加挂 500g 的物体,物体下落并拉伸弹簧。求物体下落多少距离才会停止。(提示:物体势能的减少转化为弹簧的弹性势能。)

(答 33cm)

11.28 玩具汽枪内弹簧的劲度系数 k=20N/cm。射击前弹簧压缩 3.0cm。问 5.0g 的子弹能射多高?

(答 18m)

11.29 一木块在水平方向作简谐振动,振幅为 8.0cm,频率为 1.50Hz。若在木块上又放一小木块,要求振动过程中两木块之间无滑动,两木块间静摩擦系数至少为多大?

(答 0.72)

11.30 物体在火星上的重力为在地球上的 0.40 倍。求摆线长 50cm 的单摆在火星上的摆动频率。

(答 0.45Hz)

11.31 某"秒摆"可以按秒计时,它往复半个周期要 1.00s。(a)在重力加速度 g=9.80m/s^2 的地方,其摆长为多少?(b)若 T=1.00s,摆长应为多少?

(答 (a) 99.3cm;(b) 24.8cm)

11.32 竖直弹簧末端悬挂物体使弹簧伸长,若振动起来就形成弹簧振子。试证明,若一个单摆的摆线长度等于该物体使弹簧伸长的量,则该单摆与这个弹簧振子的周期相同。

11.33 一个物体以坐标原点为中心沿 y 轴上下振动,频率为 20Hz,振幅为 3.0cm,在 t=0 时刻正处在原点处。试写出其运动方程,用 cm 为单位。

(答 $y=3.0\sin 125.6t$)

11.34 一质点的振动方程为 $x=20\cos 16t$,x 的单位为 cm。求其振幅、频率以及 t=0 时质点的位置。

(答 20cm,2.6Hz,x=20cm)

11.35 一质点的振动方程为 $y=5.0\cos 23t$,y 以 cm 为单位。求其振动频率以及 t=0.15s时质点的位置。

(答 3.7Hz,−4.8cm)

第十二章　密度和弹性

密度

物质的密度定义为单位体积的质量：

$$\rho = \frac{质量}{体积} = \frac{m}{V}$$

在国际单位制(SI)中，密度的单位为 kg/m^3，然而也使用 g/cm^3，$1000kg/m^3 = 1g/cm^3$。水的密度接近于 $1000kg/m^3$。

比重 (spgr)

某种物质的密度与另外一种作为标准的物质的密度之比叫比重。对于液体和固体而言，常与 4℃的水的密度相比；而对于各种气体，则选空气为标准。

$$\text{spgr}(比重) = \frac{\rho}{\rho_{标}}$$

比重是无量纲的比值，与选用什么单位制无关。

弹性

使物体形变的力撤除以后，物体恢复原来的大小和形状的性质叫弹性。

应力(σ)

固体所受应力指的是作用力的大小除以作用面积：

$$应力 = \frac{力}{力的作用面积}$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

在 SI 中，应力单位为帕斯卡(Pa)，$1Pa = 1N/m^2$。一个立柱支撑一个重物，立柱不同截面的应力可能不同，细的部分应力就大，因为应力等于重物的作用力除以立柱的截面。

应变(ϵ)

应变是物体在应力作用下所产生的相对形变。即物体在某个尺度(或方向)上的变化量与物体在这个尺度(或方向)上原来量之比。

$$应变 = \frac{变化量}{原来的量}$$

于是，正应变是物体在轴向负载作用下长度的变化(ΔL)与原来长度 L_0 之比：

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

它是两个同量纲量之比，所以应变没有单位。对于不同条件下应变的严格定义将在以后作出。

弹性限度

使物体产生永久性形变的最小应力为它的弹性限度。当应力超过这个限度，应力撤除后，物体也不能完全恢复原来的状态。

杨氏模量(Y)

固体的杨氏模量或弹性模量定义为应力与应变之比，其单位同应力的单位，杨氏模量数值

大表明要产生一定的应变，需要更大的应力。因此有

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{FL_0}{A\Delta L}$$

杨氏模量单位为帕(Pa)。与胡克定律中的劲度系数 k 不同，Y 值仅取决于物体的材料，与其尺寸、形状无关。因此是描述材料力学性质的重要基本量。

体积模量(B)

体积模量描述材料的体弹性。假设物体表面上各点都受到均匀的且垂直于表面的压力 F，表面的面积为 A，则定义 A 所受到的压强为

$$P = \frac{F}{A}$$

压强的 SI 制单位为(Pa)

设对原体积为 V_0 的物体压强增加了 ΔP，使体积变化了 ΔV(ΔV 为负值)。则体积应力 $=\Delta P$，体积应变 $=-\frac{\Delta V}{V_0}$，而体积模量等于应力除以应变：

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_0} = -\frac{V_0\Delta P}{\Delta V}$$

这里的负号抵消了 ΔV 的负值，使 B 为正值。体积模量与压强的单位相同。

体积模量的倒数称为材料的压缩系数，用 K 表示。

剪切模量(S)

剪切模量描述材料的形状弹性。参见图 12-1，大小相等但方向相反的切向力 F 作用在长方形物体两底面，使其形状发生改变，但其体积并未改变。定义

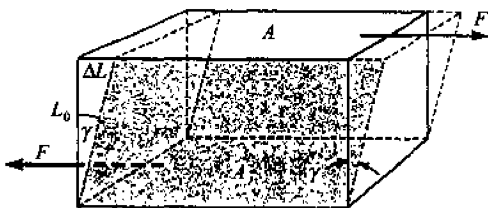


图 12-1

$$\text{剪应力} = \frac{\text{切向作用力}}{\text{被剪切的表面的面积}}$$

$$\sigma_S = \frac{F}{A}$$

$$\text{剪应变} = \frac{\text{切向移动的距离}}{\text{两表面之间的距离}}$$

$$\varepsilon_S = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\text{剪切模量} = \frac{\text{应力}}{\text{应变}}$$

$$S = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{FL_0}{A\Delta L}$$

通常 ΔL 很小，所以比值 $\Delta L/L_0$ 近似等于剪切角 γ(以弧度为单位)。这时有

$$S = \frac{F}{A\gamma}$$

例　题

12.1　51g 汽油占体积 75cm^3，求它的密度和比重。

解 ☞

$$密度 = \frac{质量}{体积} = \frac{0.051\text{kg}}{75 \times 10^{-6}\text{m}^3} = 6.8 \times 10^2\text{kg/m}^3$$

$$比重 = \frac{汽油的密度}{水的密度} = \frac{6.8 \times 10^2\text{kg/m}^3}{1000\text{kg/m}^3} = 0.68$$

或

$$比重 = \frac{75\text{cm}^3\ 汽油的质量}{75\text{cm}^3\ 水的质量} = \frac{51\text{g}}{75\text{g}} = 0.68$$

12.2 已知水银的密度为 13600kg/m³。求 300g 水银占多大体积。

解 ☞ 由 $\rho = m/V$ 所以

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.300\text{kg}}{13600\text{kg/m}^3} = 2.21 \times 10^{-5}\text{m}^3 = 22.1\text{cm}^3$$

12.3 铸铁的比重为 7.20。求其密度以及 60.0cm³ 铸铁的质量。

解 ☞ 应用

$比重 = \dfrac{物质的密度}{水的密度}$ 以及 $\rho = \dfrac{m}{V}$

从比重定义得

$$铸铁密度 = (比重)(水的密度) = (7.20)(1000\text{kg/m}^3) = 7200\text{kg/m}^3$$

而 60.0cm³ 铸铁的质量 $= \rho V = (7200\text{kg/m}^3)(60.0 \times 10^{-6}\text{m}^3) = 0.432\text{kg}$

12.4 空量瓶质量为 25.0g，装满水后为 75.0g，而装满甘油后为 88.0g。求甘油的比重。

解 ☞ 从已知数据可以得出，量瓶内的甘油质量为 63.0g，而相同体积水的质量为 50.0g。所以

$$比重 = \frac{甘油质量}{水质量} = \frac{63.0\text{g}}{50.0\text{g}} = 1.26$$

12.5 空量瓶质量为 30.0g，装满水后为 81.0g，装满某种油以后为 68.0g。求油的密度。

解 ☞ 应用 $\rho = m/V$ 先求量瓶的容积

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{(81.0 - 30.0) \times 10^{-3}\text{kg}}{1000\text{kg/m}^3} = 51.0 \times 10^{-6}\text{m}^3$$

油密度为

$$\rho_{油} = \frac{m_{油}}{V} = \frac{(68.0 - 30.0) \times 10^{-3}\text{kg}}{51.0 \times 10^{-6}\text{m}^3} = 745\text{kg/m}^3$$

12.6 铝的密度为 2700kg/m³。求边长为 2.00cm 的正方体铝块的质量。

解 ☞
$$m = \rho V = (2700\text{kg/m}^3)(0.020\text{m})^3 = 0.0216\text{kg} = 21.6\text{g}$$

12.7 棉籽油的密度为 926kg/m³。求一升(1000cm³)棉籽油的重量。

解 ☞
$$m = \rho V = (926\text{kg/m}^3)(1000 \times 10^{-6}\text{m}^3) = 0.926\text{kg}$$

$$重量 = mg = (0.926\text{kg})(9.81\text{m/s}^2) = 9.08\text{N}$$

12.8 锡的密度为 7300kg/m³，电解锡板过程中得到了 7.50×10^{-5}cm 厚的锡层。问若要得到 0.500kg 的电解锡，锡层的面积为多大？

解 ☞ 0.500kg 锡所占体积为

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.500\text{kg}}{7200\text{kg/m}^3} = 6.85 \times 10^{-5}\text{m}^3$$

锡层的体积等于面积 A 与厚度 t 之积，$V = At$。所以

$$A = \frac{V}{t} = \frac{6.85 \times 10^{-5}\text{m}^3}{7.50 \times 10^{-7}\text{m}} = 91.3\text{m}^2$$

12.9 金的密度为 19300kg/m³。有一金箔面积为 3.12cm²，质量为 6.50mg。求其厚度。

解 ☞ $1\text{mg} = 10^{-6}\text{kg}$。所以金箔的质量为 6.50×10^{-6}kg。

$$V = 面积 \times 厚度 = (3.12 \times 10^{-4}\text{m}^2)(\tau)$$

τ 为厚度，又 $V = m/\rho$ 所以有

$$(3.12 \times 10^{-4}\text{m}^2)(\tau) = \frac{6.50 \times 10^{-6}\text{kg}}{19300\text{kg/m}^3}$$

解得 $r=1.08\times10^{-6}\text{m}=1.08\mu\text{m}$。

12.10 1L 牛奶质量为 1.032kg。它所含脂肪的密度为 865kg/m^3。脂肪占牛奶体积的百分之四。求脱脂奶的密度。

解答 1000cm^3 的牛奶中脂肪的体积为

$$4\%\times1000\text{cm}^3=40.0\text{cm}^3$$

而 40.0cm^3 脂肪的质量 $=V\rho=(40.0\times10^{-6}\text{m}^3)(865\text{kg/m}^3)=0.0346\text{kg}$

$$\text{脱脂奶的密度}=\frac{\text{质量}}{\text{体积}}=\frac{(1.032-0.0346)\text{kg}}{(1000-40.0)\times10^{-6}\text{m}^3}=1.04\times10^3\text{kg/m}^3$$

12.11 长度 75.0cm、直径 0.130cm 的金属丝下端吊挂 8.00kg 的重物后伸长了 0.0350cm。求金属丝内的应力、应变以及杨氏模量。

解答

$$\sigma=\frac{F}{A}=\frac{(8.00\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)}{\pi(6.50\times10^{-4}\text{m})^2}=5.91\times10^7\text{N/m}^2=5.91\times10^7\text{Pa}$$

$$\varepsilon=\frac{\Delta L}{L_0}=\frac{0.0350\text{cm}}{75.0\text{cm}}=4.67\times10^{-4}$$

$$Y=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{5.91\times10^7\text{Pa}}{4.67\times10^{-4}}=1.27\times10^{11}\text{Pa}=127\text{GPa}$$

12.12 钢质圆柱长度 4.0m，直径 9.0cm，杨氏模量 $Y=1.9\times10^{11}\text{Pa}$。若加载 80 000kg，其长度变化多少？

解答 截面面积 $A=\pi r^2=\pi(0.045\text{m})^2=6.36\times10^{-3}\text{m}^2$

由 $Y=(F/A)/(\Delta L/L_0)$ 有

$$\Delta L=\frac{FL_0}{AY}=\frac{[(8.00\times10^4)(9.81)\text{N}](4.0\text{m})}{(6.36\times10^{-3}\text{m}^2)(1.9\times10^{11}\text{Pa})}=2.6\times10^{-3}\text{m}=2.6\text{mm}$$

12.13 大气压强约为 $1.01\times10^5\text{Pa}$。求大气对头顶上 2.0cm^2 面积的作用力。

解答 由 $P=F/A$，这里 F 是垂直于 A 的作用力，所以有 $F=PA$。假设头顶面积 2.0cm^2 是平的（事实上也差不多），大气的压力垂直于这个表面，有

$$F=PA=(1.01\times10^5\text{Pa})(2.0\times10^{-4}\text{m}^2)=20\text{N}$$

12.14 质量 60kg 的人站在一个轻质立方体顶上，立方体边长为 5.0cm。求这个立方体对地面的压强。

解答

$$P=\frac{F}{A}=\frac{(60)(9.81)\text{N}}{(5.0\times10^{-2}\text{m})^2}=2.4\times10^5\text{N/m}^2$$

12.15 已知水的体积模量为 2.1GPa。100mL 水受到 1.5MPa 的压强作用，体积压缩了多少？

解答 由 $B=-\Delta P/(\Delta V/V_0)$　所以

$$\Delta V=-\frac{V_0\Delta P}{B}=-\frac{(100\text{mL})(1.5\times10^6\text{Pa})}{2.1\times10^9\text{Pa}}=-0.071\text{mL}$$

12.16 一块果冻的形状像个方盒子，顶部面积为 15cm^2，高度为 3.0cm。大小为 0.50N 的剪切力作用在其上表面，使其相对下表面移动了 4.0mm。求切应力、切应变以及果冻的切变模量。

解答

$$\sigma_S=\frac{\text{切向力}}{\text{表面积}}=\frac{0.50\text{N}}{15\times10^{-4}\text{m}^2}=0.33\text{kPa}$$

$$\varepsilon_S=\frac{\text{位移}}{\text{高度}}=\frac{0.40\text{cm}}{3.0\text{cm}}=0.13$$

$$S=\frac{0.33\text{kPa}}{0.13}=2.5\text{kPa}$$

12.17 在本来长度 2.85m 的铁丝下悬吊一个 15kg、半径 4.0cm 的球，悬挂点到地面距离 2.94m。铁丝的直径为 0.090cm，其杨氏模量为 180GPa。若球摆动到最低点时速率为 5.0m/s。求球底部距地面还有多少距离。

解 球摆动到最低位置时铁丝的张力 F_T 一方面提供向心力，又要与球重力相平衡，即

$$F_T = mg + \frac{mv^2}{r} = m\left(9.81 + \frac{25}{r}\right)$$

式中各量均采用 SI 制。式中 r 为悬挂点到球心的距离，而铁丝又有所伸长(Δr)。Δr 是未知的。所以情况比较复杂。将铁丝和球看成单摆，则摆线未伸长时长度为 r_0，$r_0 = 2.85\text{m} + 0.040\text{m} = 2.89\text{m}$。这时悬挂点到球底部距离为 $2.85\text{m} + 0.080\text{m} = 2.93\text{m}$。而悬挂点到地面间距为 2.94m。所以 Δr 的最大值为 $2.94 - 2.93\text{m} = 0.01\text{m}$

所以用 r_0 代替 r 所产生的误差不大于 0.33%。将 $r = r_0 = 2.89\text{m}$ 代入计算张力的式子得 $F_T = 277\text{N}$。在这个张力下，铁丝伸长量为

$$\Delta L = \frac{FL_0}{AY} = \frac{(277\text{N})(2.85\text{m})}{\pi(4.5\times10^{-4}\text{m})^2(1.80\times10^{11}\text{Pa})} = 6.9\times10^{-3}\text{m}$$

因此球底部距地面为

$$2.94\text{m} - (2.85 + 0.0069 + 0.080)\text{m} = 0.0031\text{m} = 3.1\text{mm}$$

为了检验我们所作的假设，在计算 F_T 时代入 r 可能的最大值 $r = 2.90\text{m}$。得到 $\Delta L = 6.9\text{mm}$。说明我们的近似带来的误差是可以忽略的。

12.18 质量为 2.0kg 的物体挂在一条长 5.0m、横截面 0.0088cm^2、杨氏模量 $Y = 200\text{GPa}$ 的线的底部。设线仍能保持弹性。将物体向下拉一点又放开，则开始作简谐振动，求振动周期。

解 悬线就如同一个竖直的弹簧，其劲度系数 $k = F/\Delta L$，而 ΔL 为物体重量(F)使悬线产生的形变。由 $F/A = Y(\Delta L/L_0)$ 有

$$k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{AY}{L_0} = \frac{(8.8\times10^{-7}\text{m}^2)(2.00\times10^{11}\text{Pa})}{5.0\text{m}} = 35\text{kN/m}$$

得周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.0\text{kg}}{35\text{kN/m}}} = 0.047\text{s}$$

习　题

12.19 63.3g 的乙醇体积为 80.0mL，求其密度和比重。

(答　791kg/m^3，0.791)

12.20 已知四氯化碳的比重为 sp gr=1.60。求 200g 四氯化碳的体积。

(答　125mL)

12.21 2.00kg 的铝体积为多少？已知其密度为 2.70kg/m^3。

(答　740cm^3)

12.22 求边长为 5.00cm 的立方体铝块的质量。

(答　0.338kg)

12.23 一个桶可装水 200kg，用来装汽油却只能装 132kg。求汽油的(a)比重和(b)密度。

(答　(a) 0.660；(b) 660kg/m^3)

12.24 在标准状态下空气的密度为 1.29kg/m^3。某房间尺寸为 10.0m×8.00m×3.00m，求房间内空气的质量。

(答　310kg)

12.25 氢原子核质量为 $1.67\times10^{-27}\text{kg}$，可以视为半径 $1.2\times10^{-15}\text{m}$ 的小球。求其密度。

(答　$2.3\times10^{17}\text{kg/m}^3$)

12.26 均匀的毛细管内装满水银。已知 2.375cm 长度内水银质量为 0.24g。求管的内径。水银密度为 $13600\ \text{kg/m}^3$。

(答　0.49mm)

12.27 电池中酸溶液的比重为 1.285，其重量的 38.0% 为硫酸。求一升酸溶液中硫酸的质量。

（答　488g）

12.28 面积为 $14.5cm^2$ 的金箔质量为 1.93mg。其密度 $\rho=19300kg/m^3$。(a)求金箔的体积，(b)求其厚度（以埃(Å)为单位，$1Å=10^{-10}m$)，(c)金原子直径为 5Å，求金箔有多少层原子那么厚。

（答　(a) $1.00\times10^{-10}m^3$；(b) 690Å；(c) 138 层）

12.29 在一个充斥着粉尘的水泥厂中，每立方米空气中有 2.6×10^9 个粉尘颗粒（比重=3.0）。假设粉尘颗粒为直径 2.0μm 的小球。求(a)在一间 20m×15m×8.0m 的房间内粉尘的质量和(b)平均每次吸气吸入的粉尘量，假设每次吸气为 $400cm^3$。

（答　(a) 78g；(b) 13μg）

12.30 一个长度 4.00m、截面积 $0.500cm^2$ 的铁杆下部加挂 225kg 的重物后伸长了 1.00mm。求其杨氏模量。

（答　176GPa）

12.31 一个长 80cm、直径 0.60cm 的钢杆下部加挂 50kg 的重物能伸长多少？设其杨氏模量为 $Y=190GPa$。

（答　73μm）

12.32 四根悬线吊起一个平板。已知线长均为 3.0m 长，直径为 2.0mm，其杨氏模量为 180GPa。若在平板中间放一 50kg 重物，求平板由于悬线伸长而下降的高度。

（答　0.65mm）

12.33 某种金属的体积模量为 125GPa。已知大气压强为 1×10^5Pa，求将这种金属块放到真空中体积的变化量。（提示：真空中气压为零）

（答　8×10^{-7}）

12.34 已知铜的体积模量为 125GPa。若边长 40mm 的立方体铜块受到 20MPa 的压强作用，其体积变化多少？

（答　$-10mm^3$）

12.35 水的压缩系数为 $5.0\times10^{-10}m^2/N$。100mL 的水在 15MPa 压强作用下体积减少了多少？

（答　0.75mL）

12.36 一个呈立方体的金属块，每边长 25cm，其切剪模量为 80GPa。一对大小都为 4000N、方向相反的力分别沿切线的方向作用于金属块的上下表面。求剪切角以及上下表面的相对位移。

（答　$8.0\times10^{-7}rad$，$2.0\times10^{-7}m$）

12.37 质量为 60kg 的电机由四个圆柱形橡胶块支撑着。橡胶块高度均为 3.0cm，截面积为 $15cm^2$，而橡胶的切变模量为 2.0MPa。(a)若给电机以 300N 的切向力作用，它能侧向移动多少？(b)扰动后其侧向振动的频率为多少？

（答　(a) 0.075cm；(b) 13Hz）

第十三章 静止流体

平均压强

物体表面 A 所受的垂直于该表面的力除以表面积，即该面所受到的平均压强为

$$平均压强 = \frac{表面受到的垂直于该表面的力}{表面上受力面积}$$

$$P = \frac{F}{A}$$

在 SI 单位制中，压强的单位为帕斯卡(Pa)，$1Pa = 1N/m^2$。

标准大气压

标准大气压为 $1.01 \times 10^5 Pa$，或 $14.7\ lbf/in^2$。(磅力/平方英寸)

其他单位有

$$1\ 大气压(atm) = 1.013 \times 10^5 Pa$$
$$1\ 托(torr\ 或乇) = 1\ 毫米汞柱(mmHg) = 133.32Pa$$
$$1lbf/in^2 = 6.895kPa$$

液体静压强

高度为 h、密度为 ρ 的液柱产生的静压强为

$$P = \rho g h$$

帕斯卡定律

当容器中流体(液体或气体)中任何一部分的压强产生变化时，该流体中任何其他部分的压强也产生同样的变化。

阿基米德定律

整体或部分浸入流体中的物体所受到的浮力等于它所排开的流体的重量。浮力可以视为垂直向上的作用，作用力通过被排开的流体的重心。

$$F_B = 浮力 = 被排开的流体的重量$$

体积为 V 的物体若完全浸入密度为 ρ_f 的流体当中，它所受浮力就等于 $\rho_f Vg$。若物体的密度用 ρ_0 表示，物体的重量为 $\rho_0 Vg$。因此物体受到向上的净力为

$$F = Vg(\rho_f - \rho_0)$$

例　题

13.1 80kg 的金属圆柱，高 2.0m，底面积 $25cm^2$，立放在地面上。求它对地面的压强。



$$P = \frac{法向力}{面积} = \frac{(80kg)(9.81m/s^2)}{25 \times 10^{-4} m^2} = 3.1 \times 10^5 Pa$$

13.2 大气压约为 $1.0 \times 10^5 Pa$，窗玻璃尺寸为 40cm×80cm，求静止空气对玻璃室内一侧的作用力。



大气对处于其中的任何物体的作用都是垂直于其表面的。因此对玻璃的作用也垂直于玻璃表面。

$$F = PA = (1.0\times10^5\,\text{Pa})(0.40\times0.80\,\text{m}^2) = 3.2\times10^6\,\text{N}$$

当然，与之相等的大气压力也作用于房间外侧的玻璃，这样玻璃就不会碎了。

13.3 (a)求76cm深的水产生的压强。水的密度为$\rho_W = 1.00\text{g/cm}^3$。(b)若为水银呢？水银的密度为$\rho = 13.6\text{g/cm}^3$。

解答 (a) $P=\rho gh=(1000\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(0.76\text{m})=7450\text{N/m}^2=7.5\text{kPa}$

(b) $P=\rho gh=(13600\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(0.76\text{m})=1.01\times10^5\text{N/m}^2\approx1.0\text{atm}$

13.4 当潜艇潜入水下120m时，其外表面要承受多大的压强？海水密度约为1.03g/cm^3。

解答

$$\begin{aligned}P &= \text{大气的压强}+\text{水的压强}\\ &= 1.01\times10^5\,\text{N/m}^2+\rho gh = 1.01\times10^5\,\text{N/m}^2\\ &\quad +(1030\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(120\text{m})\\ &= 13.1\times10^5\,\text{N/m}^2 = 1.31\text{MPa}\end{aligned}$$

13.5 地面处的水压表指示为270kPa(约40 lbf/in^2)。建筑物内水管中水能升高多少？

解答 水压表读数是水压强与大气压强之差。水管中最高水柱对底部的压强为270kPa。由$P=\rho_W gh$有

$$h=\frac{P}{\rho_W g}=\frac{2.70\times10^5\,\text{N/m}^2}{(1000\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)}=27.5\text{m}$$

13.6 水库面积为8.00km^2。紧靠大坝的水深为12.0m。求(a)水库底和(b)水面下3.0m处水的压强。

解答 水库中水面面积与大坝所受水压毫无关系。在水中任一点都有$P=\rho_W gh$

(a) $P=(1000\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(12.0\text{m})=118\text{kPa}$

(b) $P=(1000\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(3.0\text{m})=29\text{kPa}$

13.7 如图13-1所示，活塞将某种液体限制在容器内。若活塞与活塞上的物体的总重量为200N，活塞截面积为8.0cm^2，而液体为水银的话($\rho=13600\ \text{kg/m}^3$)。求$B$点处的总压强($h=25\text{cm}$)。若在$B$点放置压强计，读数是多少？

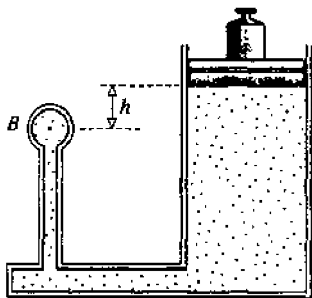


图13-1

解答 注意，对于活塞和大气对液体的压强，我们应该应用帕斯卡定律，即液体各部分都承受这种外加的压强。所以总压强分为三部分：

大气压$=1.0\times10^5\text{Pa}$

活塞及重物的压强$=\dfrac{F_W}{A}=\dfrac{200\text{N}}{8.0\times10^{-4}\text{m}^2}=2.5\times10^5\text{Pa}$

液体高度产生的压强$=h\rho g=0.33\times10^5\text{Pa}$

这时液体自身产生的压强比较小。B点的总压强为$3.8\times10^5\text{Pa}$。

压强计读数不包括大气压。所以B点处压强计读数应为$2.8\times10^5\text{Pa}$。

13.8 水压机原理如图13-2所示。大活塞的横截面积$A_1=200\text{cm}^2$，小活塞面积为5.0cm^2。若对小活塞施加$F_2=250\text{N}$的力。求大活塞所受的力F_1。

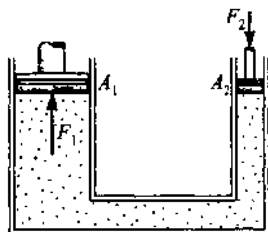


图13-2

解答 由帕斯卡定律，大小活塞面上的压强相等，即

$$\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}$$

所以$F_1=\dfrac{A_1}{A_2}F_2=\dfrac{200}{5.0}250\text{N}=10\text{kN}$

13.9 图13-3所示的体系中，左侧截面积800cm^2承受600kg的重物，右侧截面积25cm^2，活塞重量可忽略。两侧高度差$h=8.0\text{m}$。若体系内注满了ρ

$=0.78g/cm^3$ 的油。若体系保持平衡，小活塞受力 F 应多大？

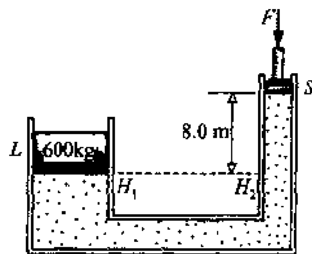


图 13－3

解答 体系内同一水平高度的两点 H_1 和 H_2 处具有相同的压强。即

H_1 处压强 = H_2 处压强 = F 产生的压强 + 8.0m 油产生的压强

$$\frac{(600)(9.81)N}{0.0800m^2}=\frac{F}{2.5\times10^{-4}m^2}+(8.0m)(780kg/m^3)(9.81m/s^2)$$

解得 $F=31N$

13.10 一个油桶，如果其内部压强达到 350kPa(压强计读数)就会破裂。这个桶与一个竖直的油管底部相连通。若要保证油桶不破裂，管内油的最大高度是多少？已知油密度为 $890kg/m^3$。

解答 应用 $P=\rho gh$ 所以

$$h=\frac{P}{\rho g}=\frac{350\times10^3N/m^2}{(890kg/m^3)(9.81m/s^2)}=40.1m$$

13.11 试管内有 8.0cm 的水，水上漂着 2.0cm 厚的油($\rho=0.80g/cm^3$)。求流体对试管底部的压强。

解答

$$P=\rho_1gh_1+\rho_2gh_2=(800kg/m^3)(9.81m/s^2)(0.020m)+(1000kg/m^3)(9.81m/s^2)(0.080m)=0.94kPa$$

13.12 如图 13－4，U 型管左侧 40cm 高的水柱与右侧 31cm 高的未知液体平衡。求未知液体的密度。

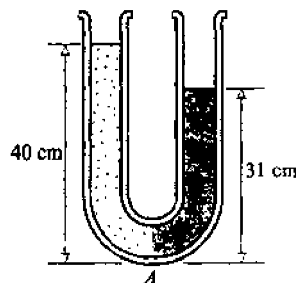


图 13－4

解答 在最低点 A 处，两侧液柱产生的压强相等，否则高压一侧的液体就会将低压一侧液体推开。所以水柱的压强＝未知液体柱的压强：

$$\rho_1gh_1=\rho_2gh_2$$

$$\rho_2=\frac{h_1}{h_2}\rho_1=\frac{40}{31}(1000kg/m^3)=1290kg/m^3=1.3\times10^3kg/m^3$$

13.13 图 13－5 所示的装置叫压强计，它由一个容器和与之相连通的 U 型管所成。如图，管内和容器内装水银，且一侧管内水银柱比另一侧高 5cm。求容器内液体的压强。已知大气压为 76cm 汞柱，水银密度为 $13.6g/cm^3$。

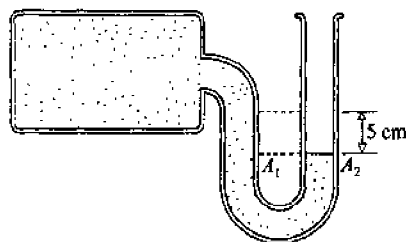


图 13－5

解答 A_1 处压强＝A_2 处压强

即　容器内压强＋5cm 汞柱压强＝大气压

$$P+(0.05m)(13600kg/m^3)(9.81m/s^2)=(0.76m)(13600kg/m^3)(9.81m/s^2)$$

解得 $P=95kPa$

或者用更简单的方法，容器内液体压强比大气压强低 5.0cm 汞柱，即 71cm 汞柱，等于 94.6kPa。

13.14 铝的密度为 $2700kg/m^3$。(a)质量为 25.0g 的铝块占多大体积？(b)若用一根线吊着铝块并将铝块完全浸入水中，线的张力为多少？

解答 (a)用 $\rho=m/V$ 有

$$V=\frac{m}{\rho}=\frac{0.0250kg}{2700kg/m^3}=9.26\times10^{-6}m^3=9.26cm^3$$

(b)铝块浸入水中排开了 $9.26cm^3$ 的水，而这部分水的重量即铝块所受浮力 F_B

$$F_B=(9.26\times10^{-6}m^3)(1000kg/m^3)(9.81m/s^2)=0.0908N$$

线的张力加浮力等于铝块重量，即 $F_T+F_B=mg$。所以

$$F_T = mg - F_B = (0.0250\text{kg})(9.81\text{m/s}^2) - 0.0908N = 0.154\text{N}$$

13.15　一块合金在空气中称重* 为 86g，在水中称重为 73g。求它的体积与密度。

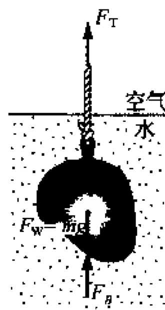


图 13-6

解释　图 13-6 是合金浸入水里的情况。可知

$$F_T + F_B = mg$$

$$F_B = (0.086)(9.81)\text{N} - (0.073)(9.81)\text{N} = (0.013)(9.81)\text{N}$$

F_B 等于物体排开水的重量。所以其体积

$$(0.013)(9.81)\text{N} = V(1000\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0.086\text{kg}}{1.3\times10^{-5}\text{m}^3} = 6.6\times10^3\text{kg/m}^3$$

13.16　铝的密度为 2700kg/m³，一个圆柱形铝块在空气中重量为 67g，在松节油中为 45g。求松节油的密度。

解释　松节油对浸入其中的铝块的浮力为

$$F_B = (0.067-0.045)(9.81)\text{N} = (0.022)(9.81)\text{N}$$

这就是铝块排开的松节油的重量。

由 $\rho=m/V$ 可求铝块体积

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.067\text{kg}}{2700\text{kg/m}^3} = 2.5\times10^{-5}\text{m}^3$$

这即是被排开的松节油的体积。对于松节油有

$$\rho = \frac{\text{质量}}{\text{体积}} = \frac{(\text{重量})/g}{\text{体积}} = \frac{(0.022)(9.81)/(9.81)}{2.48\times10^{-5}}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8.9\times10^2\text{kg/m}^3$$

13.17　玻璃塞子在空气中重量为 2.50g，在水中 1.50g，而在硫酸中为 0.70g。求硫酸的密度和比重。

解释　方法一：

塞子在水中受浮力 $F_B=(0.00250-0.00150)(9.81)\text{N}$，即排开水的重量。由 $\rho=m/V$ 或 $\rho g=F_W/V$，有

$$\text{塞子体积} = \text{排开水的体积} = \frac{\text{重量}}{\rho g}$$

$$V = \frac{(0.00100)(9.81)\text{N}}{(1000\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)} = 1.00\times10^{-6}\text{m}^3$$

而塞子在酸中的浮力为

$$[(2.50-0.70)\times10^{-3}](9.81)\text{N} = (0.00180)(9.81)\text{N}$$

它等于排开酸的重量 mg。而 $\rho=m/V$，而 $m=0.00180\text{kg}$，而 $V=1.00\times10^{-6}\text{m}^3$，所以有酸的密度 $=(0.00180\text{kg})/(1.00\times10^{-16}\text{m}^3)=1.8\times10^3\text{kg/m}^3$ 而比重为

$$\text{sp gr} = \frac{\rho_{\text{酸}}}{\rho_{\text{水}}} = \frac{1800}{1000} = 1.8$$

方法二：

$$\text{塞子排开水的重量} = [(2.50-1.50)\times10^{-3}](9.81)\text{N}$$

$$\text{塞子排开酸的重量} = [(2.50-0.70)\times10^{-3}](9.81)\text{N}$$

所以酸的比重为

$$\text{sp gr} = \frac{\text{排开酸的重量}}{\text{同体积排开水的重量}} = \frac{1.80}{1.00} = 1.8$$

---

* 原文为铝块在空气中和水中的质量，这里改成重量。但在物理学中，尤其是按本书的规定，重量应采用牛顿（N）为单位，而质量是与测量环境无关的。下同——译注。

其次，由于酸的比重$=\rho_{酸}/\rho_{水}$，所以

$$\rho_{酸}=(酸的比重)(水的密度)=(1.8)(1000\text{kg/m}^3)=1.8\times10^3\text{kg/m}^3$$

13.18 冰的密度为 917kg/m³。求漂浮在淡水中的冰露出水面部分占总体积的比例。

解 冰的密度比水的密度 1000kg/m³ 小，所以会漂浮。浮力为

$$F_B=它排开水的重量=冰自身的重量$$

冰的重量为$\rho_{冰}gV$，V为冰块的体积。另外被排开水的重量为$\rho_{水}gV'$，V'为被排开的水的体积。代入上述方程有

$$\rho_{冰}gV=\rho_{水}gV'$$

$$V'=\frac{\rho_{冰}}{\rho_{水}}V=\frac{917}{1000}V$$

所以水面以上部分的体积占总体积的比例为

$$\frac{V-V'}{V}=\frac{V-0.917V}{V}=1-0.917=0.083$$

13.19 60kg 的敞口箱子，尺寸为 1.0m×0.8m×0.5m。(a)放在水中后能下沉多深？(b)放入多重的物体才能使它下沉 30cm？

解 (a)假设箱子能够漂浮，则

$$浮力=被排开水的重量=箱子的重量$$

$$(1000\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(1.0\text{m}\times0.80\text{m}\times y)=(60\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)$$

解得 $y=0.075$m，即在水中下沉的高度。由于它小于箱子高度 0.50m，所以原假设是正确的。

(b) 浮力=箱子重量+物体重量

这时箱子浸入 30cm，有

$$(1000\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(1.0\text{m}\times0.80\text{m}\times0.30\text{m})=(60)(9.81)\text{N}+F_{物}$$

解得 $F_{物}=1760\text{N}=1.8\text{kN}$。即箱子内必须加载(1760/9.81)kg=180kg 的物体。

13.20 泡沫塑料密度小($\rho=0.58\text{g/cm}^3$)因此可作救生用具。为了使体重 80kg 的人有 20%的体积能浮出水面，需要多大体积的泡沫塑料？(人的密度为 1.04g/cm³)

解 在平衡时有

对人的浮力+对塑料的浮力=人的重量+塑料的重量

$(\rho_{水})(0.80V_{人})g+\rho_{水}V_{塑}g=\rho_{人}V_{人}g+\rho_{塑}V_{塑}g$

即 $(\rho_{水}-\rho_{塑})V_{塑}=(\rho_{人}-0.80\rho_{水})V_{人}$

但 $\rho_{人}V_{人}=80\text{kg}$，所以 $V_{人}=(80/1040)\text{m}^3$

代入上式得

$$[(1000-580)\text{kg/m}^3]V_{塑}=[(1040-800)\text{kg/m}^3][(80/1040)\text{m}^3]$$

所以 $V_{塑}=0.044\text{m}^3$

13.21 秤盘上有一只装了一些水的烧杯，称重为 2.30N。若将悬线吊起的一金属块完全浸入水中(但不接触杯底)，这时称重为 2.75N。求该金属块的体积。

解 水对金属块的浮力向上，按作用与反作用定律，金属块也对水施加向下的、同样大小的力。正是这个力使秤的读数从 2.30N 增加到 2.75N。即金属块受到的浮力为

$$F_{浮}=2.75-2.30=0.45\text{N}$$

$$F_{浮}=排开水的重量=\rho_{水}gV$$

$$=(1000\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)V$$

所以金属块排开水的体积，也即它自身的体积为

$$V=\frac{0.45\text{N}}{9810\text{kg/m}^2\cdot\text{s}^2}=46\times10^{-6}\text{m}^3=46\text{cm}^3$$

13.22 金的密度为 19.3g/cm³。一块金在空气中重量为 38.25g，在水中为 36.22g。它内部有空洞吗？占多大体积？

解 由 $\rho=m/V$，

$$其体积V=\frac{0.03825\text{kg}}{19300\text{kg/m}^3}=1.982\times10^{-6}\text{m}^3$$

$$排开水的体积 = \frac{(38.25-36.22)\times 10^{-3}\text{kg}}{1000\text{kg/m}^3} = 2.030\times 10^{-6}\text{m}^3$$

$$内部空洞体积 = (2.030-1.982)\text{cm}^3 = 0.048\text{cm}^3$$

13.23 一个圆柱型木块质量为 m、底面积为 A。木块轴线竖直地漂浮在水中。给它一个竖直方向的初始位移。试证明这以后它作简谐振动，并求其频率。

解答　当向下轻推木块使其位移量为 y，它就多排开体积为 Ay 的水。而这部分水的质量为 $Ay\rho_水$，所以浮力也增加了 $Ay\rho_水 g$ 作用于木块。这个力是作用在木块上的恢复力。另外这个力正比于位移，所以符合胡克定律的形式，我们叫它胡克力。由第十一章知识，我们知木块作简谐振动。浮力 $F_B=A\rho_水 gy$，对比胡克定律形式

$F=ky$，其劲度系数为 $k=A\rho_水 g$。所以使质量为 m 的木块作简谐振动的频率为

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{A\rho_水 g}{m}}$$

13.24 5.0kg 的气球囊须充多大体积的氦气($\rho_{He}=0.178\text{kg/m}^3$)才能升起 30kg 的物体？已知 $\rho_{空气}=1.29\text{kg/m}^3$。

解答　空气的浮力 $V\rho_{空气}g$ 必须等于气球囊加重物加所充氦气的重量：

$$V\rho_空 g=(35\text{kg})g+V\rho_{He}g$$

所以

$$V=\frac{35\text{kg}}{\rho_{空气}-\rho_{He}}=\frac{35\text{kg}}{1.11\text{kg/m}^3}=32\text{m}^3$$

13.25 液体在表面处密度为 ρ_0，求深度为 h 处液体的密度 ρ。

解答　如果质量为 m 的液体在表面附近体积为 V_0 的话，在深度为 h 的地方体积就成 $V_0-\Delta V$ 了。在 h 处的密度

$$\rho=\frac{m}{V_0-\Delta V}，而\ \rho_0=\frac{m}{V_0}$$

得到

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{V_0}{V_0-\Delta V}=\frac{1}{1-(\Delta V/V_0)}$$

然而，从第十二章中得知，体积模量 $B=P/(\Delta V/V_0)$，所以 $\Delta V/V_0=P/B$。代入上式得

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1}{1-P/B}$$

若假设 ρ 很接近 ρ_0，则 h 处的压强近似等于 $\rho_0 gh$，所以

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1}{1-(\rho_0 gh/B)}$$

习　题

13.26 截面积为 0.92cm² 的木棍支承着质量为 60kg 的物体且保持平衡。求木棍对地面的压强。

(答　6.4MPa)

13.27 一小镇靠水塔供水。若塔中水面比用户的水龙头高 26.0m，求水龙头处水的压强(忽略其他用水的影响)。

(答　255kPa)

13.28 飞机在 10km 高度飞行。机舱内气压为 760mmHg，而机外仅为 210mmHg。求 600cm² 的舷窗承受的法向力。水银密度为 13600kg/m³。

(答　4.4kN)

13.29 如图 13-7，毛细管与容器相连通。容器底面积为 80cm²。容器和管内为 $\rho=0.72\text{g/cm}^3$ 的油。求容器底面所受的力，(a)若毛细管内油面高为 h_1，(b)油面高为 h_2。

(答　(a) 11N，向下；(b) 20N，向下)

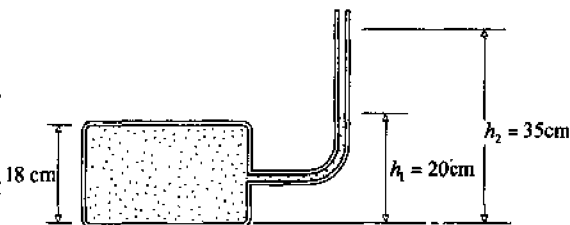


图 13-7

13.30 在上题中求容器顶部所受的力。

（答 (a) 1.1N 向上；(b) 9.6N 向上）

13.31 若供水系统要将水升到竖直 50.0m 的高度，求所需的压强。

（答 490kPa）

13.32 油泵活塞面积为 8.0cm^2。若使油($\rho=0.78\text{g/cm}^3$)上升 6.0m，需对活塞加多大的力(设油面通大气)？

（答 37N）

13.33 水压机的大活塞直径为 20cm，而小活塞的截面积为 0.50cm^2。若对小活塞施加 400N 的力，(a)求对大活塞的作用力，(b)小活塞下的压强增加了多少？(c)大活塞下的压强增加了多少？

（答 (a) 2.5×10^5N；(b) 8.0MPa；(c) 8.0MPa）

13.34 边长为 2.00cm 的金属立方体，其密度为 6600kg/m^3。若完全浸入水中，测得其重量为多少(以 g 为单位)？

（答 44.8g）

13.35 边长 30.0cm 的立方木块，若受到 54.0N 的压力才能完全浸入水中，求其密度。

（答 800kg/m^3）

13.36 一块金属在空气中称重为 26.0g，在水中称重为 21.48g。求其体积和密度。

（答 4.55cm^3，$5.72\times10^3\text{kg/m}^3$）

13.37 一块铝($\rho=2.70\text{g/cm}^3$)在空气中称重为 8.35g。若用线悬挂着浸入油中($\rho=0.75\text{g/cm}^3$)，求线的张力。

（答 0.059N）

13.38 烧杯中油的密度为 0.80g/cm^3。用线悬吊一块边长 1.6cm 的立方体铝块($\rho=2.70\text{g/cm}^3$)浸入油中。求线的张力。

（答 0.076N）

13.39 容器内装了一些比重为 0.80 的油，放在秤上称重为 78.6N。若用细线吊着一块边长为 1.6cm 的立方体铝块浸入油中。求(a)细线的张力和(b)秤的读数(假设油没溢出)。

（答 (a) 4.0N；(b) 80N）

13.40 塑料块的体积为 8000cm^3。若将它压入水中和油中分别需要 45.0N 和 15.0N 的外力。求油的密度。

（答 620kg/m^3）

13.41 铁球半径为 1.5cm，$\rho=7.8\text{g/cm}^3$。将它完全浸入到液体中，求刚刚释放时它所受到的作用力和初始的加速度。如果这液体是(a)水，(b)水银($\rho=13.6\text{g/cm}^3$)。

（答 (a) 0.94N 向下，8.6m/s^2 向下；(b) 0.80N 向上，7.3m/s^2 向上）

13.42 边长 2.0cm 的立方金属块用线吊起来称重。若将金属块浸在水中称重为 47.3g。求将它浸在比重为 1.26 的松节油中称重为多少克？(提示：求密度)

（答 45g）

13.43 气球和吊舱总质量为 2.0×10^2kg。当它充满 900m^3 的氦气($\rho=0.183\text{kg/m}^3$)后，还能携带多少重量上升？空气密度为 1.29kg/m^3。

（答 7.8kN）

13.44 一块金属在空气中称重为 5.00g，在水中为 3.00g，而在苯中为 3.24g。求金属和苯的密度。

（答 $2.50\times10^3\text{kg/m}^3$，$880\text{kg/m}^3$）

13.45 一弹簧可能是青铜材料(比重 8.8)，也可能是黄铜(比重 8.4)。将它放在空气中和水中称重，分别为 1.26g 和 1.11g。请问它究竟是何种材料？

（答 黄铜）

13.46 石英的密度为 2.65g/cm^3，而水银密度为 13.6g/cm^3。石英放在水银里浮出的部分占总体积的多少？

（答 0.195）

13.47 一个立方体木块上放一个 200g 物体后，仍漂在水面。若拿掉这物体，木块则上升 2.40cm。试求木块的体积。

（答 $1.00\times10^3\text{cm}^3$）

13.48 软木塞在空气中称重 5.0g。铅锤在水中称重 86g。将二者连在一起并浸在水中时称重为 71g。求软木的密度。

（答 $2.5\times10^2\text{kg/m}^3$）

13.49　一杯水里漂浮着 $10cm^3$ 的立方体冰块。冰的比重为 0.92。若杯中水已经接近溢出。这时若冰块完全融化，将有多少水溢出？

（答　没有水溢出）

13.50　玻璃 U 型管的一侧为 50.0cm 高的橄榄油与另一侧为 46.0cm 高的水保持平衡。求橄榄油的密度。

（答　$920kg/m^3$）

13.51　某日大气压为 1.000×10^5Pa。化学家通过降低压强的方法分馏某种液体。如果用装满油的压强计来测量分馏罐中的压强，压强计两侧液面高度差为 27cm（油的密度为 $0.78g/cm^3$）。求分馏罐内的压强。（提示：参见例题 13.13 中的图 13－5）

（答　98kPa）

第十四章　运动流体

流量(J)

流体以平均速率 v 在管道中流动，其流量

$$J = Av$$

式中 A 为流体的截面积，若流体充满管道，则 A 就是管道的横截面积。在 SI 中，J 的单位为 m^3/s，在美式习惯上以 ft^3/s 为单位。

连续性方程

假设流体不可压缩(密度不变)并充满管道，管道上某处的截面积为 A_1，在另一处为 A_2，由于流经 A_1 的流量等于流经 A_2 的流量，所以有

$$J = A_1v_1 = A_2v_2 = \text{常数}$$

式中 v_1 和 v_2 分别为流体经过 A_1 和 A_2 时的平均速率。

切变率

流体的切变率为流体中切应变随时间的变化率。因为切应变没有单位，所以切变率的 SI 单位为 s^{-1}。

黏度(即黏性系数)(η)

流体的黏度为度量在流体中产生单位切变率所需切应力大小的物理量。在 SI 制中黏度的单位为 Pa·s，称为泊肃叶(Pl)：1Pl=1kg/m·s=1 Pa·s。还有以泊(P)为单位的，1P=0.1 Pl=0.1 Pa·s；厘泊(cP)1 cP=10^{-3}Pl。黏稠的流体，比如沥青，具有较大的黏度 η。

泊肃叶定律

流体通过截面半径为 R、长度为 L 的圆柱形管道的流量为

$$J = \frac{\pi R^4 (P_i - P_0)}{8\eta L}$$

式中 $P_i - P_0$ 为管道两端的压强差(流入端减流出端)。

活塞作的功

活塞对抗压强 P 使体积为 V 的流体进入汽缸所作的功等于 PV。

压强 P 作的功

压强 P 作用于流体表面，使该面沿其法向移动距离 Δx(即移动体积为 $A\Delta x = \Delta V$)所作的功等于

$$W = PA\Delta x = P\Delta V$$

伯努利方程

对于流体连续不断的稳定流动，我们考察沿其路径上的两点。在第一点的位置，流体的流速、密度、压强以及高度分别为 v_1、ρ_1、P_1 以及 h_1；在第二点的位置则相应为 v_2、ρ_2、P_2 以及 h_2。若流体为不可压缩的，即 $\rho_1 = \rho_2 = \rho$，另外假定没有黏滞性，则有

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g$$

式中 g 为重力加速度。

托里拆利定理

假定容器中的液体顶部是连通大气的，容器上有个小洞，小洞距液面高度为 h。若这种液体服从伯努利方程且容器中的液面几乎可以看成是不变的，则小洞流出液体的速率为$\sqrt{2gh}$。

雷诺数(N_R)

雷诺数是一个无量纲数。若流体的黏滞系数为 η，密度为 ρ，流速为 v，当流经直径为 D 的管道或障碍物时，雷诺数定义为

$$N_R = \frac{\rho v D}{\eta}$$

雷诺数相差不大的流体在相同的条件下，其流动状态也基本相同。在管道中若 N_R 大于 2000，或者遇到障碍物时 N_R 大于 10，就会出现湍流。

例　题

14.1 油管直径 8.0cm，平均流速为 4.0m/s。求油的流量，分别以 m^3/s 和 m^3/h 为单位。

解答

$$J = Av = \pi(0.040m)^2(4.0m/s) = 0.020m^3/s$$
$$= (0.020m^3/s)(3600s/h) = 72m^3/h$$

14.2 在 41s 时间里有 250mL 的流体从内径为 7.0mm 的管中流出。求平均流速。

解答 由 $J=Av$，$1mL=10^{-6}m^3$

$$v = \frac{J}{A} = \frac{(250\times10^{-6}m^3)/(41s)}{\pi(0.0035m)^2} = 0.16m/s$$

14.3 内径 14cm 的主水管向内径为 1.00cm 的支水管供水。若支水管中水流速为 3.0cm/s，求主水管中水的流速。

解答 由连续性方程，主水管和支水管流量相等，所以有

$$J = A_1v_1 = A_2v_2$$

若角标 1 代表支水管，2 代表主水管，代入已知数据得

$$v_2 = v_1\frac{A_1}{A_2} = v_1\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = (3.0cm/s)\left(\frac{1}{14}\right)^2 = 0.015cm/s$$

14.4 毛细管长 200mm，内径 1.50mm，管两端水的压强差为 5.00cm 汞柱，求在 30.0s 内有多少水流出这段毛细管。已知水的黏性系数为 0.801cP，汞的密度为 13600kg/m³。

解答 应用泊肃叶定律：

$$P_i - P_0 = \rho gh = (13600kg/m^3)(9.81m/s^2)(0.0500m) = 6660N/m^2$$

而 $\eta = (0.801cP)\left(10^{-3}\frac{kg/m\cdot s}{cP}\right) = 8.01\times10^{-4}kg/m\cdot s$

所以

$$J = \frac{\pi r^4(P_i - P_0)}{8\eta L} = \frac{\pi(7.5\times10^{-4}m)^4(6660N/m^2)}{8(8.01\times10^{-4}kg/m\cdot s)(0.200m)}$$
$$= 5.2\times10^{-6}m^3/s = 5.2mL/s$$

在 30.0s 内流出的水量为

$$(5.2mL/s)(30.0s) = 1.6\times10^2mL$$

14.5 某人动脉血管沉积物使之血管实际内径减小了一半。若血压尚未改变，求流经动脉的血液量减少到什么程度。

解答 设正常时血液流量为 J_0，病变后为 J_1，

由泊肃叶定律，$J \propto r^4$。所以有

$$\frac{J_1}{J_0} = \left(\frac{r/2}{r}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.0625$$

14.6 水的黏性系数为 0.801cP，SAE10 号机油的黏性系数为 200cP。若在相同的压差下分别流经相同的管道，两种液体的流量比是多少？

解 按泊肃叶定律，$J \propto 1/\eta$ 所以

$$\frac{J_{水}}{J_{油}} = \frac{200\text{cP}}{0.801\text{cP}} = 250$$

即水的流量为这种油的流量的 250 倍。

14.7 假设人每分钟心跳 65 次，每次平均压强为 100mmHg，每心跳一次送出 75mL 的血液。求心脏的输出功率。

解 心脏作功为 $P\Delta V$。在一分钟内 $\Delta V = (65)(75\times10^{-6}\text{m}^3)$。而压强

$$P = (100\text{mmHg})\left(\frac{1.01\times10^5\text{Pa}}{760\text{mmHg}}\right) = 1.33\times10^4\text{Pa}$$

$$功率 = \frac{功}{时间} = \frac{(1.33\times10^4\text{Pa})[(65)(75\times10^{-6}\text{m}^3)]}{60\text{s}} = 1.1\text{W}$$

14.8 如图 14－1 所示，开口容器壁上有一直径为 3.0cm 的开口，每分钟将流出多大体积的水？

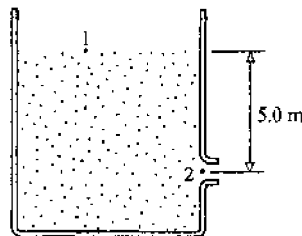


图 14－1

解 应用伯努利方程，用角标 1 表示液体表面处，用 2 表示开口处。则 $P_1 = P_2$。而 $h_1 = 5.0\text{m}, h_2 = 0$。

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g$$

若容器很大，v_1 近似为零。按托里拆利方程

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2(9.81\text{m/s}^2)(5.0\text{m})} = 9.9\text{m/s}$$

流量

$$J = v_2A_2 = (9.9\text{m/s})\pi(1.5\times10^{-2}\text{m})^2 = 7.0\times10^{-3}\text{m}^3/\text{s}$$
$$= 0.42\text{m}^3/\text{min}$$

14.9 图 14－2 所示的水箱箱壁 2 处有一小洞，此处的水压为 500kPa。求水流经洞口时的速率。

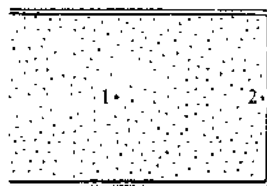


图 14－2

解 应用伯努利方程，$P_1 - P_2 = 5.00\times10^5\text{Pa}, h_1 = h_2$，而 $v_1 \approx 0$。所以有

$$(P_1 - P_2) + (h_1 - h_2)\rho g = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(5.00\times10^5\text{N/m}^2)}{1000\text{kg/m}^3}} = 31.6\text{m/s}$$

14.10 在水深 4.0m 的容器底部有一开口，水正以 30mL/s 的速率流失。若此时对容器中水面施加 50kPa 的压强，水的流失速率为多少？

解 从伯努利方程出发，此时 $v_1 = 0$

$$(P_1 - P_2) + (h_1 - h_2)\rho g = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

以下分别列出对水面加压前后的方程：

$$(P_1 - P_2)_{前} + (h_1 - h_2)\rho g = \frac{1}{2}\rho(v_2^2)_{前}$$

$$(P_1 - P_2)_{后} + (h_1 - h_2)\rho g = \frac{1}{2}\rho(v_2^2)_{后}$$

若加压前环境为大气压，则有

$$(P_1 - P_2)_{前} = 0$$

两式相除得

$$\frac{(v_2^2)_{后}}{(v_2^2)_{前}} = \frac{5 \times 10^4\,N/m^2 + (h_1 - h_2)\rho g}{(h_1 - h_2)\rho g}$$

而$(h_1 - h_2)\rho g = (4.0m)(1000kg/m^3)(9.81m/s^2) = 3.9 \times 10^4\,N/m^2$

所以

$$\frac{(v_2)_{后}}{(v_1)_{前}} = \sqrt{\frac{8.9 \times 10^4\,N/m^2}{3.9 \times 10^4\,N/m^2}} = 1.51$$

由于 $J = Av$,所以有

$$\frac{J_{后}}{J_{前}} = 1.51 \quad 或\ J_{后} = (30mL/s)(1.51) = 45mL/s$$

14.11 水泵将 5.00m³ 的水提升至 20.0m 高的主水管,管内水压为 150kPa。问水泵作功多少。

解 功=升高水作功+将水压入水管的功$= mgh + P\Delta V$

$$W = (5.00m^3)(1000kg/m^3)(9.81m/s^2)(20.0m) + (1.50 \times 10^5\,N/m^2)(5.00m^3) = 1.73 \times 10^6\,J$$

14.12 变口径水管如图 14-3 所示。在位置 1 处直径为 6.0cm,在 2 处为 2.0cm,在 1 处 $v_1 = 2.0m/s$,$P_1 = 180kPa$。求 v_2 和 P_2。

解 求两个未知数,所以需要两个方程。由伯努利方程,$h_1 = h_2$,所以有

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad 或$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = P_2$$

而从连续性方程得到

$$v_2 = v_1\frac{A_1}{A_2} = (2.0m/s)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = (2.0m/s)(9.0) = 18m/s$$

所以有

$$1.80 \times 10^5\,N/m^2 + \frac{1}{2}(1000kg/m^3)[(2.0m/s)^2 - (18m/s)^2] = P_2$$

解得 $P_2 = 0.20 \times 10^5\,kPa = 20kPa$

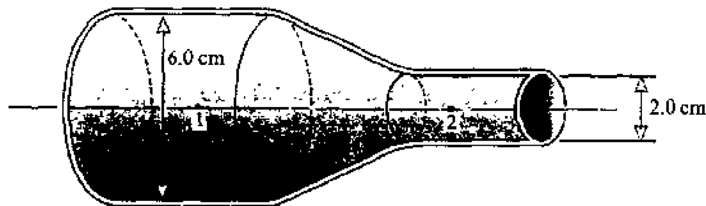


图 14-3

14.13 消防水龙要将水竖直喷到 30.0m 高处。求所需水压,设水管直径比喷嘴大得多。

解 要将水射到高处,喷射速率应为 $\sqrt{2gh}$(这里利用了$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$ 公式)。对于喷嘴内外的水流写出伯努利方程有

$$P_{内} + \frac{1}{2}\rho v_{内}^2 + h_{内}\rho g = P_{外} + \frac{1}{2}\rho v_{外}^2 + h_{外}\rho g$$

式中 $h_{内} \approx h_{外}$,又由于水管比喷嘴直径大得多,所以 $v_{内} \approx 0$,上式简化为

$$P_{内} - P_{外} = \frac{1}{2}\rho v_{外}^2$$

代人 $v_{外} = \sqrt{2gh}$ 得

$$P_{内} - P_{外} = \rho g h = (1000kg/m^3)(9.81m/s^2)(30.0m) = 294kPa$$

问,你如何从托里拆利定理直接得到后边的方程?

14.14 若水压为 200kPa，问水从内径为 0.80cm 的龙头中流出的流量为多少。

解 对于水龙头内外应用伯努利方程

$$P_{内}+\frac{1}{2}\rho v_{内}^2+h_{内}\rho g=P_{外}+\frac{1}{2}\rho v_{外}^2+h_{外}\rho g$$

取 $h_{外}=h_{内}$，$P_{内}-P_{外}=200\text{kPa}$，代入得

$$v_{外}^2-v_{内}^2=(200\times10^3\,\text{Pa})\frac{2}{\rho}$$

由于 $v_{内}^2\ll v_{外}^2$，解得 $v_{外}=20\text{m/s}$。则流量为

$$J=Av=(\pi r^2)v=\pi(0.16\times10^{-4}\,\text{m}^2)(20\text{m/s})=1.0\times10^{-3}\,\text{m}^3/\text{s}$$

14.15 图 14-4 为一变口径油管。在 1、2 处管径分别为 16cm 和 10cm。位置 2 高出位置 1h=6.0m。已知位置 1 处压强为 200kPa。密度为 800kg/m³ 的油，其流量为 0.030m³/s。求 2 处的压强(忽略黏性的影响)。

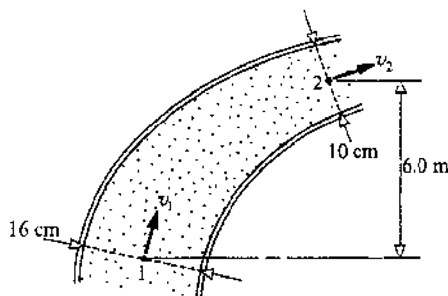


图 14-4

解 由 $J=v_1A_1=v_2A_2$ 有

$$v_1=\frac{J}{A_1}=\frac{0.030\text{m}^3/\text{s}}{\pi(8.0\times10^{-2}\text{m})^2}=1.49\text{m/s}$$

$$v_2=\frac{J}{A_2}=\frac{0.030\text{m}^3/\text{s}}{\pi(5.0\times10^{-2}\text{m})^2}=3.82\text{m/s}$$

写出伯努利方程：

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g(h_1-h_2)=P_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

代入 $P_1=2.00\times10^5\,\text{N/m}^2$，$h_2-h_1=6.0\text{m}$，$\rho=800\text{kg/m}^3$ 得

$$P_2=200\times10^5\,\text{N/m}^2+\frac{1}{2}(800\text{kg/m}^3)[(1.49\text{m/s})^2-(3.82\text{m/s})^2]$$

$$-(800\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(6.0\text{m})=1.48\times10^5\,\text{N/m}^2=1.5\times10^5\,\text{kPa}$$

14.16 汶杜里流量计配备了一个示差水银压强计，如图 14-5 所示。位置 1 是进口，直径为 12cm，位置 2 为腰部，直径为 6.0cm。若水银压强计中两侧水银高度差为 22cm，求液体的流量。水银密度为 13.6g/cm³。

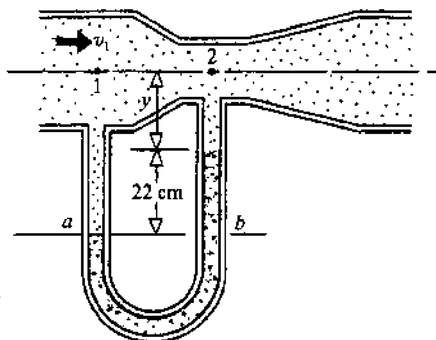


图 14-5

解 由压强计读数得知

$$P_1-P_2=\rho gh$$
$$=(13600\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(0.22\text{m})$$
$$=2.93\times10^4\,\text{N/m}^2$$

由于 $J=v_1A_1=v_2A_2$，有 $v_1=J/A_1$ 和 $v_2=J/A_2$。

应用伯努利方程，注意到 $h_1=h_2$，有

$$(P_1-P_2)+\frac{1}{2}\rho(v_1^2-v_2^2)=0$$

$$2.93\times10^4\,\text{N/m}^2+\frac{1}{2}(1000\text{kg/m}^3)\left(\frac{1}{A_1^2}-\frac{1}{A_2^2}\right)J=0$$

式中 $A_1=\pi r_1^2=\pi(0.060)^2\text{m}^2=0.01131\text{m}^2$

$A_2=\pi r_2^2=\pi(0.030)^2\text{m}^2=0.0028\text{m}^2$

代入得 $J=0.022\text{m}^3/\text{s}$

14.17 将 20cm 高的汽车模型放入风洞中以研究 550cm 高的汽车以 15m/s 速率行驶的情况。试问风洞中风速应多大？气流可能是湍流吗？

解 我们希望实际情况和风洞中情况近似，气流的雷诺数应相同。即

$$N_R=\left(\frac{\rho vD}{\eta}\right)_{风洞}=\left(\frac{\rho vD}{\eta}\right)_{实际}$$

由于 ρ 和 η 是相同的，所以有

$$(vD)_{风洞} = (vD)_{实际}$$

代入已知数据得风洞中风速为(15m/s)(550/20)=0.41km/s

为研究是否湍流，代入 ρ=1.29kg/m³，η=1.8×10⁻⁵ Pa·s(空气)。得到 N_R=5.9×10⁶，比湍流的雷诺数大得多。所以风洞中气流为湍流。

习　题

14.18 油以 2.5m/s 的速率流经内径为 4.0cm 的管道。求流量，分别以 m³/s 和 cm³/s 为单位。

(答　3.1×10⁻³ m³/s=3.1×10³ cm³/s)

14.19 从内径为 5.0cm 的水管中每小时淌出 2.5m³ 的水。求平均流速。

(答　0.35m/s)

14.20 松节油在内径 5.0cm 的管内流速为 0.54m/s。若有内径为 3.0cm 的管子与上述粗管连通，试求在细管中的流速。

(答　1.5m/s)

14.21 水的黏性系数为 0.80cP。若内径为 3.0mm、长度为 15cm 的水管两端压差为4.0kPa，通过这段水管流出 500mL 的水需多长时间?

(答　7.5s)

14.22 熔化了的塑料以 13cm³/min 的速率流经长度为 8.0cm、内径为 1.30mm 的细管。已知管两端压强差为 18cmHg。求其黏性系数。已知水银密度为 13.6g/cm³。

(答　0.097kg/m·s=97cP)

14.23 一段内径 4.0mm、长 20cm 的管水平地与内径 5.0mm、长 30cm 的管连接。若以稳定的速率不断地把某种黏性液体注入管内，求 20cm 管两端的压强差与 30cm 管两端压强差之比。

(答　1.6)

14.24 用长度 3.0cm、内径 0.45mm 的注射针头抽血。已知血液黏性系数为 η=4.0mPl，并假设针头两端压差为 80cmHg。要想抽出 15mL 血，需多长时间?

(答　17s)

14.25 给病人输血时，血液瓶挂在比病人静脉血管高 95cm 处，而病人静脉压强比环境的大气压高出 20mmHg。针头长 3.0cm，内径为 0.45mm。已知血液 η=0.0040Pa·s，ρ=1005kg/m³。问每分钟能输入多少血?

(答　3.4cm³)

14.26 液压系统中液体压强为 50kPa，活塞截面积为 0.75cm²。求活塞行程 2.0cm 所作的功。

(答　75mJ)

14.27 大的敞口容器中有黏性很小的液体。器壁上低于液面 4.5m 处有一个截面积为 0.25cm² 的小洞。求流出洞口液体的理论速率，又一分钟内能流出多少?

(答　9.4m/s，0.0141m³)

14.28 敞口容器中有黏性很小的液体，液面以下 2.5m 处的器壁上有一截面积 0.50cm² 的洞。求通过洞口的流量，以 L/s 为单位。

(答　0.35L/s)

14.29 一个大敞口水槽，在比水面低 8.0m 处有一开口。若对水面加 140kPa 的压强，求开口处的理论流速。

(答　21m/s)

14.30 每分钟要把 8.0m³ 的水注入到压强为 220kPa 的主水管中去，需多少马力的功率?

(答　39hp)

14.31 水泵通过内径 5.0 cm 的水管以 9.0 L/s 的速率将湖水抽出并排到湖面以上 16m 的高处。求(a)出水口的水速的理论值和(b)泵的功率。

(答　(a) 4.6m/s；(b) 2.0hp)

14.32 水平稳地流经水平放置的粗细不匀的水管。在某处水压为 130kPa，流速为 0.60m/s，而在另一处流速为 9.0m/s。求这里的水压。

(答　90kPa)

14.33 水在粗细不匀的管内流动。在 A 处内径为 20cm，水压为 130kPa。在 B 处内径为 30cm，且 B 点比 A 点高 4.0m。若流量为 0.080m^3/s。求 B 点处水压。

（答　93kPa）

14.34 参见图 14－5，密度为 820kg/m^3 的燃料油流经汶杜里流量计。流量计的进口直径为 8.0cm，而腰部直径为 4.0cm。进口与腰部的压差为 16cmHg。求流量。已知水银密度为 13600kg/m^3。

（答　9.3×10^{-3}m^3/s）

14.35 在 20℃时水的黏性系数为 $\eta=1.0\times10^{-3}$Pa·s。求在不产生湍流条件下，每分钟流经内径为 3.0cm 的管道的最大水流量。不致产生湍流的雷诺数为 2000。

（答　0.0028m^3）

14.36 空气的密度为 $\rho=1.29$kg/m^3，黏性系数 $\eta=1.8\times10^{-5}$Pa·s。半径 $r=1.5$mm 的雨滴在空气中下落时，空气近似为湍流，即雷诺数 $N_R=10$。求雨滴下落速率。

（答　4.6cm/s）

第十五章 热膨胀

温度

用摄氏温标测量温度，将水的冰点定为 0℃，将沸点（在标准状态下）定为 100℃。开尔文温标（或称绝对温标）将摄氏温标读数增加 273.15，这样水的冰点就是 273.15K，而沸点就为 373.15K。第十六章将进一步讨论绝对零度 0K（或 −273.15℃）。仍在使用的华氏温标与摄氏温标的关系为

$$\text{华氏温度} = \frac{9}{5}(\text{摄氏温度}) + 32$$

固体线膨胀

原来长度为 L_0 的固体，温度增加 ΔT，则长度增加 ΔL，ΔL 近似正比于 L_0 与 ΔT 的乘积：

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$$

式中比例常数 α 叫线胀系数。α 的大小取决于物质的性质。就我们的讨论而言，α 是与 T 无关的常数，然而并非绝对的无关。

从上述公式中可以看到，α 是单位初始长度的物体当温度改变一个单位时长度的改变量。如 1.000000cm 的黄铜物体当温度增加 1.0℃时变成 1.000019cm，则其线胀系数为

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0 \Delta T} = \frac{0.000019\text{cm}}{(1.0\text{cm})(1.0℃)} = 1.9 \times 10^{-5}℃^{-1}$$

面膨胀

如果增加温度 ΔT，使面积由 A_0 增至 $A_0 + \Delta A$，则

$$\Delta A = \gamma A_0 \Delta T$$

γ 为面胀系数。对于各向同性的固体（即在所有方向膨胀系数相同），近似有 $\gamma = 2\alpha$。

体膨胀

体积为 V_0 的物体当温度改变 ΔT 后，体积变化 ΔV，则

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T$$

式中 β 为体胀系数。对相同的 ΔT，ΔV 可能增加，也可能减小。对于各向同性固体，近似有 $\beta = 3\alpha$。

例题

15.1 在 15℃时长度为 80cm 的铜棒，加热至 35℃，长度增加多少？已知铜的线膨胀系数为 $1.7 \times 10^{-5}℃^{-1}$

解答 $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T = (1.7 \times 10^{-5}℃^{-1})(0.80\text{m})[(35-15)℃] = 2.7 \times 10^{-4}\text{m}$

15.2 在 30℃时钢板上有一个直径为 0.99970cm 的洞。要将 30℃时直径为 1.00000cm 的销钉插入钢板上的洞中，需将钢板加热到什么温度？钢的线胀系数 $\alpha = 1.1 \times 10^{-5}℃^{-1}$。

解答 钢板受热膨胀与它是否有洞毫无关系。因此，洞的膨胀与一块填满它的钢质圆板的膨胀相同。我们希望洞直径膨胀

$$\Delta L = (1.00000 - 0.99970)\text{cm} = 0.00030\text{cm}$$

应用 $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$ 得

$$\Delta T=\frac{\Delta L}{\alpha L_0}=\frac{0.00030\text{cm}}{(1.1\times10^{-5}\text{℃}^{-1})(0.99970\text{cm})}=27\text{℃}$$

所以板必须加热到 30+27=57(℃)。

15.3 钢卷尺在 20℃条件下定标。求在 15℃条件下钢卷尺的相对误差。已知其线胀系数 $\alpha=1.1\times10^{-5}$℃。

解 温度从 20℃变到−15℃，变化量 $\Delta T=-35$℃。

$$\frac{\Delta L}{L_0}=\alpha\Delta T=(1.1\times10^{-5}\text{℃}^{-1})(-35\text{℃})=-3.9\times10^{-4}$$
$$=-0.039\%$$

15.4 铜棒($\alpha=1.70\times10^{-5}$℃$^{-1}$)比铝棒($\alpha=2.20\times10^{-5}$℃$^{-1}$)长 20cm。若要铜棒和铝棒的长度差与温度无关，铜棒应多长？

解 若使铜棒和铝棒的长度差不随温度改变，即对于相同的温度改变，两棒长度变化 ΔL 应当相等。即

$$(\alpha L_0\Delta T)_{Cu}=(\alpha L_0\Delta T)_{Al}$$
$$(1.70\times10^{-5}\text{℃}^{-1})L_0\Delta T=(2.20\times10^{-5}\text{℃}^{-1})(L_0-0.20\text{m})\Delta T$$

式中 L_0 为铜棒长，而 ΔT 是相同的。解之得 $L_0=0.88$m

15.5 在 20.0℃时钢球($\alpha=1.10\times10^{-5}$℃$^{-1}$)直径为 0.9000cm，而铝板($\alpha=2.20\times10^{-5}$℃$^{-1}$)上的洞的直径为 0.8990cm。问钢球和铝板同处什么温度，球才能刚好通过孔洞？

解 设比 20.0℃高出 ΔT，使钢球与铝板上的洞具有相同直径：

$$0.9000\text{cm}+(0.9000\text{cm})(1.10\times10^{-5}\text{℃}^{-1})\Delta T$$
$$=0.8990\text{cm}+(0.8990\text{cm})(2.20\times10^{-5}\text{℃}^{-1})\Delta T$$

解得 $\Delta T=101$℃。由于原来为 20.0℃，所以最终温度应为 121℃。

15.6 同在 10℃，用刚校准的钢卷尺测得一铜棒长度为 90.00cm。若都处在 30℃环境中，再用这把尺测这个铜棒，读数将是多少呢？已知 $\alpha_{Fe}=1.1\times10^{-5}$℃$^{-1}$，$\alpha_{Cu}=1.7\times10^{-5}$℃。

解 在 30℃时，铜棒长度为

$$L_0(1+\alpha_{Cu}\Delta T)$$

而卷尺上相邻“厘米”刻度之间的距离将改变

$$(1.000\text{cm})(1+\alpha_{Fe}\Delta T)$$

所以尺上读出的“厘米”数为

$$\frac{L_0(1+\alpha_{Cu}\Delta T)}{(1\text{cm})(1+\alpha_{Fe}\Delta T)}=\frac{(90.00\text{cm})[1+(1.7\times10^{-5}\text{℃}^{-1})(20\text{℃})]}{(1.000\text{cm})[1+(1.1\times10^{-5}\text{℃}^{-1})(20\text{℃})]}=90.00\frac{1+3.4\times10^{-4}}{1+2.2\times10^{-4}}$$

利用 $\frac{1}{1+x}\approx1-x$ （当 $x\ll1$ 时）

$$\text{则有 }90.00\frac{1+3.4\times10^{-4}}{1+2.2\times10^{-4}}\approx90.00(1+3.4\times10^{-4})(1-2.2\times10^{-4})$$
$$\approx90.00(1+3.4\times10^{-4}-2.2\times10^{-4})$$
$$=90.00-0.0108=90.01(\text{cm})$$

即这时卷尺读数将为 90.01cm。

15.7 在 18℃时将水银注入玻璃烧瓶直至 50.00cm³ 的刻度线。若将烧瓶以及瓶中水银都加热到 38℃，问将有多少水银超过那条刻度线。$\alpha_{玻}=9.4\times10^{-6}$℃$^{-1}$，$\alpha_{Hg}=182\times10^{-6}$℃$^{-1}$。

解 取 $\beta_{玻}=3\alpha_{玻}$，这是一个很好的近似。烧瓶容积的胀缩与同体积同形状的整块玻璃的情况一样。所以

超过刻度部分的水银体积$=(\Delta V_{Hg})-(\Delta V_{玻})=\beta_{Hg}V_0\Delta T-\beta_{玻}V_0\Delta T=(\beta_{Hg}-\beta_{玻})V_0\Delta T$

$$=[(182-27)\times10^{-6}\text{℃}^{-1}](50.00\text{cm}^3)[(38-18)\text{℃}]=0.15\text{cm}^3$$

15.8 0℃时水银的密度准确地等于 13600kg/m³，其体胀系数为 1.82×10^{-4}℃$^{-1}$。求 50.0℃时水银的密度。

解 $\rho_0=0℃$时水银密度

$\rho_1=50℃$时水银密度

$V_0=m$kg 水银在 0℃时的体积

$V_1=m$kg 水银在 50℃时的体积

由质量守恒，有

$$m=\rho_0V_0=\rho_1V_1\text{，所以}$$

$$\rho_1=\rho_0\frac{V_0}{V_1}=\rho_0\frac{V_0}{V_0+\Delta V}=\rho_0\frac{1}{1+(\Delta V/V_0)}$$

而$\frac{\Delta V}{V}=\beta\Delta T=(1.82\times10^{-4}℃^{-1})(50.0℃)=0.00910$

代入第一式有

$$\rho_1=(13600\text{kg/m}^3)\frac{1}{1+0.00910}=13.5\times10^3\text{kg/m}^3$$

15.9 试证明：液体或固体的密度与温度的关系为 $\Delta\rho=-\rho\beta\Delta T$

解 考察质量为 m 的液体，体积为 V_0，密度 $\rho_0=m/V_0$。温度改变 ΔT 以后，体积为

$$V=V_0+V_0\beta\Delta T$$

相应地密度为

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{V_0(1+\beta\Delta T)}=\rho_0\frac{1}{1+\beta\Delta T}$$

即

$$\rho(1+\beta\Delta T)=\rho_0$$

所以有

$$\Delta\rho=\rho-\rho_0=-\rho\beta\Delta T$$

实际上 ρ 和 ρ_0 差别很小，所以 $\Delta\rho\approx-\rho_0\beta\Delta T$。

15.10 用上题的结论做 15.8 题。

解 我们有

$$\Delta\rho=-(13600\text{kg/m}^3)(182\times10^{-6}℃^{-1})(50.0℃)=-124\text{kg/m}^3$$

所以 $\rho_{50℃}=\rho_{0℃}-124\text{kg/m}^3=13.5\times10^3\text{kg/m}^3$

15.11 截面为 2.0mm² 的钢丝捋直后(但不要有张力)，在 30℃时将相距 1.50m 的两处固定。当温度降到－10℃时，钢丝中的张力有多大？已知 $\alpha=1.1\times10^{-5}℃^{-1}$，$Y=2.0\times10^{11}$ N/m²。

解 如果钢丝没被固定，冷却后会缩短 ΔL：

$$\Delta L=\alpha L_0\Delta T=(1.1\times10^{-5}℃^{-1})(1.5\text{m})(40℃)=6.6\times10^{-4}\text{m}$$

但钢丝两端固定不动，其固定端的力等效于把钢丝拉长同样的长度 ΔL。由

$Y=(F/A)(\Delta L/L_0)$ 有

$$\text{张力}=F=\frac{YA\Delta L}{L_0}=\frac{(2.0\times10^{11}\text{N/m}^2)(2.0\times10^{-6}\text{m}^2)(6.6\times10^{-4}\text{m})}{1.50\text{m}}=176\text{N}=0.18\text{kN}$$

严格地讲，我们本应用$(1.5-6.6\times10^{-4})$m 的 L_0 值代入求张力的式中，但不减这个差值所产生的误差实在可以忽略不计。

15.12 某建筑物是在－10℃条件完工的。截面积 45cm² 的钢梁两端被混凝土牢牢地固定在立柱上。问温度达 25℃时，钢梁内的压力有多大。已知 $\alpha=1.1\times10^{-5}℃^{-1}$，$Y=2.0\times10^{11}$N/m。

解 过程与上题相似：

$$\frac{\Delta L}{L_0}=\alpha\Delta T=(1.1\times10^{-5}℃^{-1})(35℃)=3.85\times10^{-4}$$

所以 $F=YA\frac{\Delta L}{L_0}=(2.0\times10^{11}\text{N/m}^2)(45\times10^{-4}\text{m}^2)(3.85\times10^{-4})=3.5\times10^5\text{N}$

习 题

15.13 试计算温度从 12℃增加到 32℃，原来 50m 长的铜线将增加多长？已知 $\alpha=1.7\times10^{-5}℃^{-1}$。

（答　1.7cm）

15.14　一个 3.0m 长的棒由于温度升高了 60℃ 而伸长了 0.091cm。求其线胀系数。

（答　5.1×10^{-6}℃$^{-1}$）

15.15　在 15℃ 时轮子直径为 30.000cm，钢箍的内径为 29.930cm。若想将钢箍套在轮了上，需将钢箍加热到多少度？已知钢箍的线胀系数 $\alpha=1.10\times10^{-5}$℃$^{-1}$。

（答　227℃）

15.16　在 30℃，直径为 6cm 的铁球比黄铜板上的洞的直径大 0.010mm，问它们同处在什么温度，铁球刚好可以通过铜板上的洞。已知铁和黄铜的线胀系数分别为 1.2×10^{-5}℃$^{-1}$和 1.9×10^{-5}℃$^{-1}$。

（答　54℃）

15.17　(a)在 5.0℃ 定标的铝制量具，在 35.0℃ 时测得某长度为 88.42cm。求由于自身热膨胀而产生的误差。(b)若在 35.0℃ 时用它测某钢制物体的长度为 88.42cm。这物体的实际长度为多少？已知铝的线胀系数为 22×10^{-6}℃$^{-1}$。

（答　(a) 0.058cm，(b) 88cm）

15.18　质量为 m、半径为 r 的实心球绕中心轴转动的角速率为 ω_0。加热升温 ΔT，其角速率变为 ω_0。若物质的线胀系数为 α，求 ω_0/ω 的比值。

（答　$1+2\alpha\Delta T+(\alpha\Delta T)^2$）

15.19　已知水银的体胀系数为 0.00018℃$^{-1}$。体积为 100cm^3 的水银从 10℃ 升温至 35℃ 时体积增加了多少？

（答　0.45cm^3）

15.20　玻璃的线胀系数为 9.0×10^{-6}℃。求 15℃ 时容积为 50.000mL 的比重瓶在 25℃ 时的容积。

（答　50.014mL）

15.21　铸铁的线胀系数为 0.000010℃$^{-1}$，在 15℃ 时体积为 5.0cm×10cm×6.0cm 的铸铁升温到 47℃ 时，体积增加了多少？

（答　0.29cm^3）

15.22　玻璃容器在 20℃ 时刚好装满 1L 松节油。若温度升至 86℃，会有多少松节油溢出？已知玻璃的线胀系数为 9.0×10^{-6}℃$^{-1}$，松节油的体胀系数为 97×10^{-5}℃$^{-1}$。

（答　62mL）

15.23　在 20.0℃ 时金的密度为 19.30g/cm^3。求在 90.0℃ 时的密度。已知金的线胀系数为 14.3×10^{-5}℃$^{-1}$。

（答　19.2g/cm^3）

第十六章 理想气体

理想气体

服从理想气体定律的气体叫理想气体。在压强不高、温度不太低的情况下，空气、氮、氧、氦、氢以及氖气等，都服从理想气体定律（见下文），这样的气体都可以看成理想气体。几乎所有化学稳定的气体，当条件远未达到液化或固化条件时，它们的行为都与理想气体相近似。换句话说，当气体的原子或分子相距较远，彼此间没有明显相互作用时，实际气体就与理想气体相近似。

摩尔(mol)

一摩尔物质所含有的粒子数与12g(0.012kg)（精确值）同位素碳12所含有的原子数相等。因此，一千摩尔(1kmole)物质的质量（以kg为单位）在数字上就等于这种物质的分子量（或原子量）m。比如，1kmol的H_2质量为2kg，记为2kg/kmol；1 kmol的O_2为32kg；1 kmol的N_2为28kg等。我们计算时，总是采用kmol和kg的单位*。人们有时说分子（或原子）的重量，而非质量。然而分子（或原子）的质量的说法是正确的。

理想气体定律

n千摩尔气体，其体积V、绝对压强P与绝对温度T之间的关系为

$$PV = nRT$$

式中$R=8314\text{J/kmol}\cdot\text{K}$，称为气体普适常数。如果气体质量为$m$ kg，而气体的分子质量（或原子质量）**为M，则$n=m/M$。

几种特殊过程

对于一定量气体（n不变）的等温过程，理想气体定律成为波意耳定律：

$$PV = \text{常数}$$

对于一定量气体的等压过程，有查理氏定律：

$$\frac{V}{T} = \text{常数}$$

对子一定量气体的等容过程，有盖·吕萨克定律：

$$\frac{P}{T} = \text{常数}$$

绝对零度

对于查理定律，n与P不变，体积随T线性减小，当$T=0$时，体积也为零。同样，对子盖·吕萨克定律，n与V不变，压强随T一直减小到零（如果气体还能算是理想的）。在这个独特的温度下，气体的压强和体积都为零。这个温度就叫绝对零度。

标准状态(S.T.P.)

所谓的标准状态规定为

$$T = 273.15\text{K} = 0℃ \qquad \text{以及}$$

---

* 在我国多采用g/mol的单位。显见这与以kg/kmol为单位时，数值是相同的——译注。

** 这里的分子（或原子）质量即千摩尔质量——译注。

$$P = 1.013 \times 10^5 \mathrm{Pa} = 1\mathrm{atm}(\text{大气压})$$

在标准状态下，1kmol 理想气体占体积 22.4m³。所以在标准状态下，2kg 的 H_2 与 32kg 的 O_2 或 28kg 的 N_2 都占有相同的体积：22.4m³。

道尔顿分压定律

气体混和物中一种气体的分压强，等于假定这种气体单独存在并占据这种混合气体的体积时所具有的压强。所以理想的、且彼此不发生反应的混合气体的总压强就等于其中所有气体组分分压强之和。气体定律的习题涉及条件的变化：从(P_1, V_1, T_1)到(P_2, V_2, T_2)，通常靠列出气体定律就很容易求解：

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad (n\text{ 为常数})$$

例　题

16.1 一定质量的氧气，在 5.0℃、大气压为 101kPa 时体积为 0.0200m³。求在 30℃和 108kPa 条件时的体积。

解 由

$$\left(\frac{P_1V_1}{T_1}\right) = \left(\frac{P_2V_2}{T_2}\right)$$

$$V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$T_1 = 5 + 273 = 278(\mathrm{K}), \qquad T_2 = 30 + 273 = 303(\mathrm{K}),$$

所以

$$V_2 = (0.0200\mathrm{m}^3)\left(\frac{101}{108}\right)\left(\frac{303}{278}\right) = 0.0204\mathrm{m}^3$$

16.2 某日气压为 76cmHg。某容器在 4℃时其压强计读数为 400cmHg。当容器被太阳加热到 31℃时，压强计读数为多少？假设容器内气体无泄漏。

解

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad \text{或 } P_2 = P_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

通常压强计读数为容器内外的压强差。因此有

$$P_1 = 76\mathrm{cmHg} + 400\mathrm{cmHg} = 476\mathrm{cmHg}$$

而 $V_1 = V_2$，所以

$$P_2 = (476\mathrm{cmHg})\left(\frac{273+9}{273+31}\right)(1.00) = 513\mathrm{cmHg}$$

压强计读数为 513cmHg－76cmHg＝437cmHg。

16.3 设大气压强为 101kPa。某汽车轮胎在 15℃时，压强计测得其气压为 305kPa。当汽车高速行驶后，轮胎变热，因而测得压强为 360kPa。求轮胎内气体的温度。

解

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad \text{或 } T_2 = T_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

而 $P_1 = 305\mathrm{kPa} + 101\mathrm{kPa} = 406\mathrm{kPa}$

$P_2 = 360\mathrm{kPa} + 101\mathrm{kPa} = 461\mathrm{kPa}$

所以

$$T_2 = (273 + 15)\left(\frac{461}{406}\right)(1.00) = 327(\mathrm{K})$$

最终轮胎的温度为 327－273＝54(℃)

16.4 初始时汽缸内气体与外界气体的压强、温度相同，$P_1 = 740\mathrm{mmHg}$。推动活塞使汽缸体

积减小到原体积的八分之一，而温度也恢复到室温。用压强计测量，汽缸内的压强为多少 kPa?

解答

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}\qquad 或\ P_2=P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

但 $T_1=T_2$，$P_1=740\text{mmHg}$，代入得

$$P_2=(740\text{mmHg})(8)(1)=5920\text{mmHg}$$

压强计读数为容器内外压强差，即为

$$5920\text{mmHg}-740\text{mmHg}=5180\text{mmHg}$$

由于 760mmHg=101kPa，所以换算成 kPa 为

$$(5180\text{mmHg})\left(\frac{101\text{kPa}}{760\text{mmHg}}\right)=690\text{kPa}$$

16.5　在−20℃和 1.00 atm 下，某理想气体精确体积为一升。在 40℃条件下，需要多少大气压的压强才能使其体积减半?

解答

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}\qquad 或\ P_2=P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

所以

$$P_2=(1.00\text{atm})\left(\frac{1.00\text{L}}{0.500\text{L}}\right)\left(\frac{273\text{K}+40\text{K}}{273\text{K}-20\text{K}}\right)=2.47\text{atm}$$

16.6　一定质量的氢气在 16℃和 150kPa 条件下体积为 370mL。求在−21℃和 420kPa 条件下它的体积。

解答

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}\qquad 或\quad V_2=V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$V_2=(370\text{mL})\left(\frac{150\text{kPa}}{420\text{kPa}}\right)\left(\frac{273-21}{273+16}\right)=115\text{mL}$$

16.7　在标准状况下，氮的密度为 1.25kg/m³。求其在 42℃和 730mmHg 条件下的密度。

解答　由于 $\rho=m/V$，有 $\rho_1=m/V_1$，$V_2=m/\rho_2$，

所以

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}\qquad 可写成\frac{P_1}{\rho_1T_1}=\frac{P_2}{\rho_2T_2}$$

标准状况即 760mmHg 和 273K，代入上式得

$$\rho_2=\rho_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right)=(1.25\text{kg/m}^3)\left(\frac{730\text{mmHg}}{760\text{mmHg}}\right)\left(\frac{273\text{K}}{273\text{K}+42\text{K}}\right)=1.04\text{kg/m}^3$$

注意，这里可以用 mmHg 作为压强的单位，因为计算 P_2/P_1 时相消了。

16.8　一个容积为 3.0L 的容器内装有氧气，其温度为 20℃，压强计读数为 25×10^5Pa。求气体的质量。已知氧气的分子量为 32，即 32kg/kmol。假设大气压强为 1×10^5Pa。

解答　气体的绝对压强为压强计读数与大气压强之和：

$$P=(25+1)\times10^5\text{N/m}^2=26\times10^5\text{N/m}^2$$

应用气体定律，$M=32\text{kg/kmol}$

$$PV=\left(\frac{m}{M}\right)RT$$

得　$$(26\times10^5\text{N/m}^2)(3.0\times10^{-3}\text{m}^3)=\left(\frac{m}{32\text{kg/kmol}}\right)\left(8314\frac{\text{J}}{\text{kmol}\cdot\text{K}}\right)(293\text{K})$$

解得　$m=0.10\text{kg}$

16.9　求在标准状况下 4.0g 氧气所占的体积。($M=32\text{kg/kmol}$)

解答　方法一

直接应用气体定律

$$PV=\left(\frac{m}{M}\right)RT$$

$$V=\left(\frac{1}{P}\right)\left(\frac{m}{M}\right)RT=\frac{(4.0\times10^{-3}\text{kg})(8314\text{J/kmol}\cdot\text{K})(273\text{K})}{(1.01\times10^{5}\text{N/m}^2)(32\text{kg/kmol})}=2.8\times10^{-3}\text{m}^3$$

方法二

在标准状况下,1 kmol 气体占体积 22.4m³。因此 32kg 占 22.4m³。所以 4g 占有

$$\left(\frac{4.0\text{g}}{32000\text{g}}\right)(22.4\text{m}^3)=2.8\times10^{-3}\text{m}^3$$

16.10 2.0mg 的液氮在极低温度下滴入容积为 30mL 的试管内，并且立即密封。求在室温 20℃条件下，试管内氮的压强，用大气压(atm)表示。对于氮，$M=28$kg/kmol。

解 应用 $PV=(m/M)RT$ 有

$$P=\frac{mRT}{MV}=\frac{(2.0\times10^{-6}\text{kg})(8314\text{J/kmol}\cdot\text{K})(293\text{K})}{(28\text{kg/kmol})(30\times10^{-6}\text{m}^3)}$$

$$=5800\text{N/m}^2=(5800\text{N/m}^2)\left(\frac{1.0\text{atm}}{1.01\times10^5\text{N/m}^2}\right)=0.057\text{atm}$$

16.11 容积为 590L 的容器贮存氧气。已知温度为 20℃，压强为 5.0atm。求氧的质量，$M=$ 32kg/kmol。

解 用 $PV=(m/M)RT$ 得

$$m=\frac{PVM}{RT}=\frac{(5\times1.01\times10^5\text{N/m}^2)(0.59\text{m}^3)(32\text{kg/kmol})}{(8314\text{J/kmol}\cdot\text{K})(293\text{K})}=3.9\text{kg}$$

16.12 在 18℃和 765mmHg 条件下，1.29L 的某理想气体质量为 2.71g。求其分子量 M。

解 用 $PV=(m/M)RT$ 和 1atm=760mmHg 得到

$$M=\frac{mRT}{PV}=\frac{(0.00271\text{kg})(8314\text{J/kmol}\cdot\text{K})(291\text{K})}{[(765/760)(1.01\times10^5\text{N/m}^2)](0.00129\text{m}^3)}=50.0\text{kg/kmol}$$

16.13 求 8.0g 氦($M=4.0$kg/kmol)在 15℃和 480mmHg 条件下的体积。

解 用 $PV=(m/M)RT$ 有

$$V=\frac{mRT}{MP}=\frac{(0.0080\text{kg})(8314\text{J/kmol}\cdot\text{K})(288\text{K})}{(4.0\text{kg/kmol})[(480/760)(1.01\times10^5\text{N/m}^2)]}=0.075\text{m}^3=75\text{L}$$

16.14 求甲烷($M=16$kg/kmol)在 20℃和 5.0atm 条件下的密度。

解 用 $PV=(m/M)RT$ 和 $\rho=m/V$ 得

$$\rho=\frac{PM}{RT}=\frac{(5.0\times1.01\times10^5\text{N/m}^2)(16\text{kg/kmol})}{(8314\text{J/kmol}\cdot\text{K})(293\text{K})}=3.3\text{kg/m}^3$$

16.15 鱼在水面下 15m 处吐出 2.0mm³ 的气泡。设水中温度到处相同。求气泡到达水面时的体积。

解 初始时气泡内绝对气压为 $P=\rho gh+$大气压

而 $\rho=1000$kg/m³，1atm≈100kPa，在水下 15m 处，

$$P_1=(1000\text{kg/m}^3)(9.8\text{m/s}^2)(15\text{m})+100\text{kPa}=247\text{kPa}$$

在表面，$P_2=100$kPa，所以

$$V_2=V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)=(2.0\text{mm}^3)\left(\frac{247}{100}\right)(1.0)=4.9\text{mm}^3$$

16.16 15cm 长的粗细均匀的试管开口朝下放入湖中。若要使试管中三分之一体积进水，问试管必须在湖面下多深的距离。

解 令试管中的水面到湖面的距离为 h。试管中气体的压强一定等于大气压 P_0 与水深 h 处水压强之和：

$$P_2=P_0+\rho gh$$

气体定律为

$$P_2=P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)=(1.01\times10^5P_0)\left(\frac{3}{2}\right)(1.00)=1.50\times10^5\text{Pa}$$

由 P_2 与 h 的关系得

$$h = \frac{P_2 - P_0}{\rho g} = \frac{0.50 \times 10^5 \text{Pa}}{(1000\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)} = 5.1\text{m}$$

这里取大气压 P_0 为 100kPa。

16.17 一容器盛有 18kg 氮气，压强为 4.50atm。问它能盛多少压强为 3.50atm 的氢气，已知对于 N_2 和 H_2 有 $M_{N_2}=28\text{kg/kmol}$，$M_{H_2}=2\text{kg/kmol}$。

解答 对氮和氢分别写出气体定律方程：

$$P_N V = n_N RT \quad 和 \quad P_H V = n_H RT$$

相除消去 V、R 和 T 得

$$\frac{n_H}{n_N} = \frac{P_H}{P_N} = \frac{3.50\text{atm}}{4.50\text{atm}} = 0.778$$

但 $n_N = \frac{m}{M_N} = \frac{18\text{kg}}{28\text{kg/kmol}} = 0.643\text{kmol}$

所以 $n_H = (n_N)(0.778) = (0.643\text{kmol})(0.778) = 0.500\text{kmol}$

又由 $n = m/M$，所以有

$$m_H = (0.500\text{kmol})(2.0\text{kg/kmol}) = 1.0\text{kg}$$

16.18 在 20℃时某气体混合物中各组分的分压强为：氢，200mmHg；二氧化碳，150mmHg；甲烷(CH_4)，320mmHg；乙烯(C_2H_6)，105mmHg。求(a)混合气体总压强和(b)氢占混合气体的质量比。(已知 $M_H = 2.0\text{kg/kmol}$，$M_{CO_2} = 44\text{kg/kmol}$，$M_{CH_4} = 16\text{kg/kmol}$，$M_{C_2H_6} = 30\text{kg/kmol}$)

解答 (a) 按道尔顿定律，总压强等于各组分压强之和 = (200 + 150 + 320 + 105)mmHg = 775mmHg

(b)按气体定律：$PV = \frac{m}{M}RT$ 有

$$m = M(PV/RT) \quad 所以$$

对于氢有

$$m_H = M_H P_H \left(\frac{V}{RT}\right)$$

混合气体总质量为各组分质量之和：

$$m_{总} = (M_H P_H + M_{CO_2} P_{CO_2} + M_{CH_4} P_{CH_4} + M_{C_2H_6} P_{C_2H_6})\left(\frac{V}{RT}\right)$$

所以

$$\frac{m_H}{m_{总}} = \frac{M_H P_H}{M_H P_H + M_{CO_2} P_{CO_2} + M_{CH_4} P_{CH_4} + M_{C_2H_6} P_{C_2H_6}}$$

$$\begin{aligned}\frac{m_H}{m_t} &= [(2.0\text{kg/kmol})(200\text{mmHg})]/[(2.0\text{kg/kmol})(200\text{mmHg}) \\ &\quad + (44\text{kg/kmol})(150\text{mmHg}) + (16\text{kg/kmol})(320\text{mmHg}) \\ &\quad + (30\text{kg/kmol})(105\text{mmHg})] \\ &= 0.026\end{aligned}$$

习　题

16.19 一定量理想气体在 758mmHg 压强下体积为 4.00m^3。温度不变，压强变为 635mmHg 时其体积为多少？

(答 4.77m^3)

16.20 一定量理想气体在 20℃时体积为 38mL。若压强不变，求 45℃时气体的体积。

(答 41mL)

16.21 某日气压为 75.83cmHg，容器内气压计读数为 258.5cmHg。求容器内绝对气压，分别以大气压和 kPa 为单位。

(答 334.3cmHg=4.398atm=445.6kPa)

16.22 密封容器内气压为 1.00atm，温度为 20℃。求温度降至−35℃时，容器内压强，分别以 kPa 和 mmHg

为单位。

（答　$82kPa=6.2\times10^2mmHg$）

16.23　定量的氮在 15℃和 763mmHg 时体积为 1000mL。求在－6℃和 420mmHg 条件下的体积。

（答　1.68×10^3mL）

16.24　1 kmol 理想气体在 0℃和 1 atm 下体积为 $22.4m^3$。(a)要把 1.00kmol 在 100℃条件下压缩成 $5.00m^3$ 需多大压强？(b)若把 1.00kmol 气体密封在 $5.00m^3$ 的容器内，而容器只能承受气压计读数为 3.00atm 的压强，求容器内气体温度的上限，超过此限度容器将开裂。

（答　(a) 6.12atm；(b) －30℃）

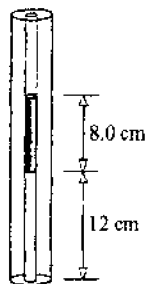


图 16－1

16.25　如图 16－1 所示，上端开口而下端密封的毛细管中有一段水银柱将一些空气密封在管的底部。开始时温度为 14℃，大气压强为 740mmHg。若温度变到 30℃，大气压强升至 760mmHg，求管底部空气柱的高度。

（答　12.4cm）

16.26　仍参见图 16－1。取大气压 $P_0=76cmHg$。开始时毛细管内气柱(12cm 长)和水银柱(8.0cm 长)处于平衡态。现将毛细管倾斜 65°角，求这时空气柱的长度。

（答　0.13m）

16.27　某日，气压计指示为 75.23cmHg，反应罐内装 250mL 的理想气体，温度为 20℃。用一个以油($\rho=810kg/m^3$)为工作物质的压强计测量，罐内气压比大气压要低 41.0cm 油柱的高度。求在标准状况下气体将有多大体积。(参见 13.13 题中图13－5)

（答　233mL）

16.28　容积为 $5000cm^3$ 的容器内有某理想气体($M=40kg/kmol$)，温度为 25℃时气压计读数为 530kPa。假设大气压为 100kPa。求容器内气体的质量。

（答　0.051kg）

16.29　压强为 $2.0\times10^{-5}mmHg$ 就已算高真空了。求在这种压强下 250mL 的气体在 25℃时的质量。取 $M=28kg/kmol$。

（答　$7.5\times10^{-12}kg$）

16.30　若把 $M=64.1kg/kmol$ 的 SO_2 气体当成理想气体，求在 18.0℃，755mmHg 条件下，1.216g 气体所占的体积。

（答　457mL）

16.31　若把 $M=34.1kg/kmol$ 的 H_2S 气体当成理想气体，求在 27℃、2.00atm 下，这种气体的密度。

（答　$2.76kg/m^3$）

16.32　容积为 30mL 的管内密封有 0.25g、温度为 340℃的水蒸气。若作为理想气体处理，求其压强。已知 $M=18kg/kmol$。

（答　2.4MPa）

16.33　有一种基于理想气体定律的估算太阳中心处温度的方法。假设太阳中心由平均分子量 $M=0.70kg/kmol$ 的气体组成，其密度和压强分别为 $90\times10^3kg/m^3$ 和 $1.4\times10^{11}atm$。试计算其温度。

（答　1.3×10^7K）

16.34　容积为 500mL 的烧瓶中密封有氮气，压强为 76.00cmHg。瓶内底部有一容积为 0.50mL、内装 4.5atm氢气的小玻璃瓶。若小瓶打破，氢气将充满大瓶。问烧瓶中压强为多少。

（答　76.34cmHg）

16.35　如图 16－2 所示，大小不同的两个容器，一个容积为 250mL，内装氮气，压强为 500mmHg。另一个 450mL，内装氩，压强为 950mmHg。两容器间原有阀门是关死的。若打开阀门，两种气体混合后最终

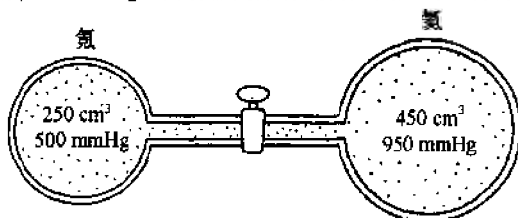


图 16－2

压强是多少？假设整个过程是等温的。

（答　789mmHg）

16.36 体积为V_0的气泡从湖底11.0m处释放。求它升高到水面时体积有多大。假设湖底温度为4℃，水面附近水温为12℃，大气压强为75cmHg，而水密度为1000kg/m^3。

（答　2.1V_0）

16.37 高度为12.0m的圆柱形潜水钟（竖直的偶筒，顶部密封，而底部敞开）向湖底下降，直到潜水钟内的水位为8.0m（从钟底部量起）。求湖面到潜水钟顶部的距离。湖面处气压为1.00atm。

（答　20.6－4.0＝16.6(m)）

第十七章　分子运动论

分子运动论认为物质是由不断运动着的独立的原子或分子组成的。在气体中，分子作随机运动，其速率分布在从零到很大的一个范围内。

阿伏伽德罗常数(N_A)

1 kmol 物质中所含有的粒子(分子或原子)数为阿伏伽德罗常数。

$$N_A = 6.022 \times 10^{26}/\text{kmol}$$

比如，对子氢气，$M=2\text{kg/kmol}$，而氧气，$M=32\text{kg/kmol}$。所以 2kg 的氢或 32kg 的氧都有 6.02×10^{26} 个分子。

单个分子(或原子)的质量

某种物质单个分子(或原子)的质量可以从该物质的千摩尔质量 M 以及阿伏伽德罗常数求得。由于 M kg 物质中有 N_A 个粒子，所以每个粒子的质量 m_0 为

$$m_0 = \frac{M}{N_A}$$

平均平动动能

气体分子的平均平动动能为 $3k_BT/2$，式中 T 是气体的绝对温度，而 $k_B=R/N_A=1.381\times10^{-23}\text{J/K}$，称为玻尔兹曼常数。换句话说，质量为 m_0 的分子的平均平动动能为

$$\left(\frac{1}{2}m_0v^2\right)_{平均} = \frac{3}{2}k_BT$$

注意，在文献中玻尔兹曼常数也常去掉下角标，而只写成 k。

方均根速率

求气体分子的方均根速率先要对某一个气体分子速率的平方值 v^2 在一段时间内取平均值，再对这个平均值开平方。或者等价地，对所有气体分子在给定时刻的 v^2 取平均，然后开方求平方根。

从平均平动动能的表达式可以求得气体分子的方均根速率 v_{rms}

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}}$$

绝对温度

解 $\frac{1}{2}mv_{rms}^2=\frac{3}{2}k_BT$ 可以得到理想气体绝对温度的意义：

$$T = \left(\frac{2}{3k_B}\right)\left(\frac{1}{2}m_0v_{rms}^2\right)$$

可见，理想气体的绝对温度是其每个分子平均平动动能大小的度量。

压强

在第十六章中我们以 $PV=(m/M)RT$ 的形式引出了压强。注意，$m=Nm_0$，此处 N 为在体积 V 中的分子数。将上述关于绝对温度 T 的表达式代入理想气体方程得到

$$PV = \frac{1}{3}Nm_0v_{rms}^2$$

又，$Nm_0/V=\rho$，ρ 为气体密度，所以得

$$P = \frac{1}{3}\rho v_{rms}^2$$

平均自由程(m. f. p.)

气体分子的平均自由程为一个分子平均在两次碰撞之间所走过的路程。对于半径为 b 的球形分子而言，有

$$\text{m. f. p.} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}b^2(N/V)}$$

式中 N/V 为单位体积中的分子数。

例　题

17.1 通常氮气由氮分子 N_2 组成。其千摩尔质量 M 为 28kg/kmol，求一个分子的质量。

解

$$m_0=\frac{M}{N_A}=\frac{28\text{kg/kmol}}{6.02\times10^{26}\text{kmol}^{-1}}=4.7\times10^{-26}\text{kg}$$

17.2 氦气由单个的氦原子，而不是氦分子组成的。已知氦的千摩尔质量 $M=4.0$kg/kmol，2.0g 的氦气有多少个氦原子 He?

解 方法一

1 kmol He 质量为 4.0kg，有 N_A 个原子。而 2.0g 占

$$\frac{0.0020\text{kg}}{4.0\text{kg/kmol}} = 0.00050\text{kmol}$$

所以 2.0g 氦气中有氦原子数为

$$(0.00050\text{kmol})N_A=(0.00050\text{kmol})(6.02\times10^{26}\text{kmol}^{-1})=3.0\times10^{23}$$

方法二

单个氦原子质量 m_0 为

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{4.0\text{kg/kmol}}{6.02\times10^{26}\text{kmol}^{-1}} = 6.64\times10^{-27}\text{kg}$$

所以 2.0g 中氦原子数为

$$\frac{0.00020\text{kg}}{6.64\times10^{-27}\text{kg}} = 3.0\times10^{23}$$

17.3 已知水银的 $M=202$kg/kmol，$\rho=13600\text{kg/m}^3$。半径为 0.50mm 的水银液滴中有多少个水银分子?

解

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{4\pi}{3}\right)(5.0\times10^{-4}\text{m})^3 = 5.24\times10^{-10}\text{m}^3$$

液滴的质量为

$$m = \rho V = (13600\text{kg/m}^3)(5.24\times10^{-10}\text{m}^3) = 7.1\times10^{-6}\text{kg}$$

水银原子的质量为

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{202\text{kg/kmol}}{6.02\times10^{26}\text{kmol}^{-1}} = 3.36\times10^{-25}\text{kg}$$

所以液滴中的原子数为

$$\frac{m}{m_0} = \frac{7.1\times10^{-6}\text{kg}}{3.36\times10^{-25}\text{kg}} = 2.1\times10^{19}$$

17.4 已知苯的 $\rho=0.88\text{g/cm}^3$，$M=78$kg/kmol，求 70mL 苯中有多少分子。

解 70cm³ 苯的质量 $m=\rho V=(880\text{kg/m}^3)(70\times10^{-6}\text{m}^3)=0.0616\text{kg}$

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{78\text{kg/kmol}}{6.02\times10^{26}\text{kmol}^{-1}} = 1.30\times10^{-25}\text{kg}$$

所以 70mL 中分子数为

$$\frac{m}{m_0}=\frac{0.0616\text{kg}}{1.30\times10^{-25}\text{kg}}=4.8\times10^{23}$$

17.5 求氮(M=28kg/kmol)在0℃时分子的方均根速率。

解 已知$\frac{1}{2}m_0v_{rms}^2=\frac{3}{2}k_BT$　所以

$$v_{rms}=\sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}}$$

而　$m_0=\frac{M}{N_A}=\frac{28\text{kg/kmol}}{6.02\times10^{26}\text{kmol}^{-1}}=4.65\times10^{-26}\text{kg}$

所以　$v_{rms}=\sqrt{\frac{3(1.38\times10^{-23}\text{J/K})(273\text{K})}{4.65\times10^{-26}\text{kg}}}=0.49\text{km/s}$

17.6 某气体分子在地球表面恰巧具有该气体分子在0℃时的方均根速率。假设分子竖直向上运动，且不与其他分子碰撞。它能上升多高?

解 这个分子的初始动能KE为

$$\text{KE}=\frac{1}{2}m_0v_{rms}^2=\frac{3}{2}k_BT$$

分子向上运动，当动能全部转化为重力势能PE_G时停止。设此时高度为h，则有

$$\text{KE}=\frac{1}{2}m_0v_{rms}^2=m_0gh$$

解之得

$$h=\left(\frac{1}{m_0}\right)\left(\frac{3k_BT}{2g}\right)=\left(\frac{1}{m_0}\right)\left[\frac{(3)(1.38\times10^{-23}\text{J/K})(273\text{K})}{2(9.81\text{m/s}^2)}\right]=\frac{5.76\times10^{-22}\text{kg}\cdot\text{m}}{m_0}$$

此处m_0是以kg为单位的。上升的高度h与分子质量成反比。对于N_2，$m_0=4.65\times10^{-26}$kg(见17.5题)，h=12.4km。

17.7 空气在室温下的密度为1.29kg/m³。假设只有一种气体，求其分子的方均根速率。

解 由$P=\frac{1}{3}\rho v_{rms}^2$ 得

$$v_{rms}=\sqrt{\frac{3P}{\rho}}=\sqrt{\frac{3(100\times10^3\text{Pa})}{1.29\text{kg/m}^3}}\approx480\text{m/s}$$

这里我们假设大气压为100kPa。

17.8 求0℃条件下，一摩尔任意理想气体的平动能。

解 一摩尔包含$N_A\times10^{-3}$个分子。对理想气体有$\frac{3}{2}k_BT=\frac{1}{2}m_0v_{rms}^2$，即平均每个分子的平动能。所以每摩尔*分子的总平动动能为

$$\text{KE}_{总}=(N_A\times10^{-3})\left(\frac{3}{2}k_BT\right)=3\times10^{-3}\frac{RT}{2}=3.4\text{kJ}$$

这里我们取T=273K，同时应用了$k_BN_A=R$。

17.9 在外太空中每立方厘米中差不多有一个氢原子。太空中温度为3.5K(阴影中)。求这些分子的方均根速率以及它们产生的压强。

解

$$v_{rms}=\sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}}=\sqrt{\frac{3k_BT}{M/N_A}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}\approx295\text{m/s}=0.30\text{km/s}$$

式中M=1.0kg/kmol，T=3.5K。

我们应用$P=\rho v_{rms}^2/3$来求压强。因为氢原子质量m_0=(1.0kg/kmol)/N_A，由题意，外太空分子数密度为$10^6/\text{m}^3$。所以有

$$\rho=\frac{Nm_0}{V}=\left(\frac{N}{V}\right)m_0=10^6\left(\frac{1}{N_A}\right)\quad\text{kg/m}^3$$

而　$P=\frac{1}{3}\rho v_{rms}^2=\frac{1}{3}\left(\frac{10^6}{6.02\times10^{26}}\right)(295)^2=5\times10^{-17}(\text{Pa})$

---

* 原书为"每克摩尔"——译注。

17.10 对于氢($M=2.0$kg/kmol)和氮($M=28$kg/kmol),求以下比值:(a)$(KE)_H/(KE)_N$,(b)$(v_{rms})_H/(v_{rms})_N$(在相同温度下)。

解答 (a)分子的平均平动动能 $KE=\frac{3}{2}k_BT$,只与温度有关,所以比值为1。

(b)由 $m_0=M/N_A$,所以

$$\frac{(v_{rms})_H}{(v_{rms})_N}=\sqrt{\frac{M_N}{M_H}}=\sqrt{\frac{28}{2.0}}=3.7$$

17.11 某种理想气体分子的行为像半径为 3.0×10^{-10} m 的小球,求标准状况下(S.T.P.)分子的平均自由程。S.T.P.即温度为0℃,压强 $P=1$atm。

解答 方法一

在S.T.P.下1.00kmol的气体的体积为 22.4m^3。单位体积内的分子数可以由 22.4m^3 中有 $N_A=6.02\times10^{26}$ 个分子的关系求得。分子平均自由程:

$$\text{m.f.p.}=\frac{1}{4\pi\sqrt{2}b^2(N/V)}=\frac{1}{4\pi\sqrt{2}(3.0\times10^{-10}\text{m})^2}\left(\frac{22.4\text{m}^3}{6.02\times10^{26}}\right)=2.4\times10^{-8}\text{m}$$

方法二

因为 $M=m_0N_A=m_0(R/k_B)$,而 $m=Nm_0$

$$PV=\left(\frac{m}{M}\right)RT\qquad 或\ PV=Nk_BT$$

得 $\frac{N}{V}=\frac{P}{k_BT}=\frac{1.01\times10^5\text{N/m}^2}{(1.38\times10^{-23}\text{J/K})(273\text{K})}=2.68\times10^{25}\text{m}^{-3}$

然后再用方法一中的m.f.p.公式求得。

17.12 假设理想气体在20℃条件下,分子平均自由程为50cm,其分子为半径 3.0×10^{-10} m 的小球。求压强。

解答 由平均自由程表达式得

$$\frac{N}{V}=\frac{1}{4\pi\sqrt{2}b^2(\text{m.f.p.})}$$

与理想气体方程 $PV=Nk_BT$ 比较(见上题)得

$$P=\frac{k_BT}{4\pi\sqrt{2}b^2(\text{m.f.p.})}=\frac{(1.38\times10^{-23}\text{J/K})(293\text{K})}{4\pi\sqrt{2}(3.0\times10^{-10}\text{m})^2(0.50\text{m})}=5.1\text{mPa}$$

习　题

17.13 已知氖的千摩尔质量 $M=20.2$kg/kmol,求氖原子的质量。

(答　3.36×10^{-26}kg)

17.14 聚乙烯中典型的聚合物的分子量为 15×10^3。(a)求一个分子的质量。(b)多少个这样的分子组成2g的聚合物。

(答　(a) 2.5×10^{-23}kg;(b) 8×10^{19})

17.15 一种烟草黄斑病的病毒,$M=4.0\times10^7$kg/kmol。问每mL含0.10mg病毒的溶液中,每1.0mL中有多少个病毒分子。

(答　1.5×10^{12})

17.16 生产条件为27℃和 1.2×10^{-7}mmHg时,对真空电子管进行封装,其容积为 100cm^3。(a)管内压强用Pa表示为多少?(b)管内有多少气体分子?

(答　(a) 1.6×10^{-5}Pa;(b) 3.8×10^{11})

17.17 管内氦气在20℃时,压强为0.200mmHg。求氦气的密度。已知 $M=4.0$kg/kmol。

(答　$4.4\times10^{-5}\text{kg/m}^3$)

17.18 理想气体分子在什么温度下,其方均根速率比在20℃时快一倍?

(答　1170K≈900℃)

17.19 物体要逃出地球引力场其速率至少要达到11.2km/s。H_2 在什么温度下其 v_{rms} 才达到这个逃逸速率?对于 N_2 呢?

（答　1.0×10^4K；1.4×10^5K）

17.20　在太空里某些区域，每立方厘米平均有 5 个分子，那里的温度为 3K。这样稀薄的气体的压强为多少？

（答　2×10^{-16}Pa）

17.21　已知铝的 $M=108$kg/kmol。一个铝质立方体的体积为 1.0cm^3，质量为 2.7g。(a)铝块中有多少铝原子？(b)每个铝原子占据多大体积？(c)若每个铝原子均能看成为立方体，求其边长。

（答　(a) 1.5×10^{22}；(b) 6.6×10^{-29}m^3；(c) 4.0×10^{-10}m）

17.22　在标准状况(0℃，1 atm)下，空气中氮分子的 v_{rms}等于 490m/s。求其平均自由程以及它连续两次碰撞之间的时间间隔。氮分子可以看成是半径为 2.0×10^{-10}m 的小球。

（答　5.2×10^{-8}m，1.1×10^{-10}s）

17.23　某理想气体分子的半径为 2.5×10^{-10}m，求在 500℃和 7.0×10^{-6}mmHg 条件下它的分子平均自由程。

（答　10m）

第十八章 热 量

热能

系统的热能就是构成该系统的粒子(通常是电子、离子、原子和分子)的无规则运动的动能。

热量

热量即从具有较高温度的体系(或是电子、离子和原子的集合)向与之接触的具有较低温度的体系传递的热能。在 SI 制中热量的单位为焦耳(J),其他单位如卡路里(卡),简记作 cal,1 cal=4.184J。在英制中一热量单位(1 Btu)等于 1054J。营养学家所称的"大卡路里"叫作"大卡",实际上是千卡(1 car=1 kcal=10^3 cal)

比热(或比热容 c)

单位质量的物质温度改变一度所需的热量叫该物质的比热。

如果使质量为 m 的物质的温度改变 ΔT 所需热量为 ΔQ,叫比热为

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T} \qquad 或者 \qquad \Delta Q = cm\Delta T$$

在 SI 制中,c 的单位为 J/kg·K,它等价于 J/kg·℃;也常应用 cal/g·℃,1 cal/g·℃=4184J/kg·℃。

每种物质都有其特有的比热值,比热随温度略有变化;水的比热值为 c=4184 J/kg·℃=1.00cal/g·℃。

一个未发生相变的物体温度改变 ΔT 时所获得或损失的热量为

$$\Delta Q = mc\Delta T$$

熔解热(L_f)

单位质量的结晶形态固体在一个确定温度下熔解所需要的热量叫熔解热。它也等于单位质量的液态物质在不变的温度下晶化成为固体所放出的热量。水在 0℃条件下的熔解热为 335kJ/kg 或 80cal/g。

汽化热(L_v)

单位质量的液体在一个确定温度下汽化(蒸发)所需要的热量叫汽化热。水在 100℃条件下的汽化热为 2.26MJ/kg 或 540cal/g。

升华热

单位质量的固态物质在一个确定的温度下转变成汽态物质所需的热量叫升华热。

量热学问题

量热学问题涉及冷热物体间的热能分配。由于能量守恒,我们可以写出下述方程:

所有物体热量改变的总和=0

从高温物体流出的热量($\Delta Q<0$)数值上等于流入到低温体的热量($\Delta Q>0$),这样其总和等于零。当然,这里假设这个系统与外界没有能量交换。

绝对湿度

单位体积的气体(通常指大气)中所含水蒸气的质量叫绝对湿度,其单位为 kg/m^3 或 g/cm^3。

相对湿度(R. H.)

单位体积空气中所含水蒸气的质量与同温度下单位体积空气中饱和水蒸气的质量之比,叫作相对湿度。如果用百分数表示,这个比值要乘以 100。

露点

温度较低的空气中饱和水蒸气含量比温度较高的空气中饱和水蒸气要少。当空气冷却到一定程度时就会使水蒸气达到饱和。这个温度叫作露点。温度低于露点，空气中的水蒸气就会凝结成水。

例　题

18.1 (a)将250mL的水从20.0℃升高到35.0℃需要多少热量？(b)这些水又冷却到20.0℃会损失多少热量？

解答 250mL的水质量为250g　而 $c=1.00\text{cal/g}\cdot℃$，所以有

(a) $\Delta Q=mc\Delta T=(250\text{g})(1.00\text{cal/g}\cdot℃)(15.0℃)=3.75\times10^3\text{cal}=15.7\text{kJ}$

(b) $\Delta Q=mc\Delta T=(250\text{g})(1.00\text{cal/g}\cdot℃)(-15.0℃)=-3.75\times10^3\text{cal}=-15.7\text{kJ}$

18.2 已知铝的比热 $c=880\text{J/kg}\cdot℃$，25g铝从100℃冷却到20℃放出多少热量？

解答

$$\Delta Q=mc\Delta T=(0.025\text{kg})(880\text{J/kg}\cdot℃)(-80°)$$
$$=-1.8\text{kJ}=-0.42\text{kcal}$$

18.3 一定热量使铝($c=0.21\text{cal/g}\cdot℃$)升高57℃，这些热量能使质量与铝相同的铜($c=0.093\text{cal/g}\cdot℃$)升高多少度？

解答 由于对于铝和铜，热量相同，所以有

$$mc_{\text{Al}}\Delta T_{\text{Al}}=mc_{\text{Cu}}\Delta T_{\text{Cu}}$$

$$\Delta T_{\text{Cu}}=\left(\frac{c_{\text{Al}}}{c_{\text{Cu}}}\right)(\Delta T_{\text{Al}})=\left(\frac{0.21}{0.093}\right)(57℃)=1.3\times10^2℃$$

18.4 两个相同的金属板(质量为 m，比热为 c)，一个初始温度为20℃，另一个为90℃，若两板接触在一起，最终它们的温度为多少？

解答 因为两板相同，我们可以猜测它们接触后最终温度在20℃和90℃中间，即55℃。这是正确的，但要从数学上来证明它。由能量守恒定律，一个板放出的热量等于另一板得到的热量。系统总的热量变化为零。即

$$\text{高温板热量改变}+\text{低温板热量改变}=0$$
$$mc(\Delta T)_{\text{热}}=mc(\Delta T)_{\text{冷}}$$

注意，ΔT 是系统的最终温度(记作 T_f)减去初始温度。于是上述方程为

$$mc(T_f-90℃)+mc(T_f-20℃)=0$$

消去 mc，解得 $T_f=55℃$，正是我们预期的结果。

18.5 保温瓶有250g 90℃的咖啡。现又加入20g 5℃的牛奶。当热平衡后，牛奶咖啡的温度为多少？假设保温瓶没有散热。

解答 水、咖啡以及牛奶的比热相等，都等于100g/g·℃。能量守恒告诉我们

$$(\text{咖啡热量变化})+(\text{牛奶热量变化})=0$$
$$(cm\Delta T)_{\text{咖啡}}+(cm\Delta T)_{\text{牛奶}}=0$$

设牛奶咖啡的最终温度为 T_f，则

$$\Delta T_{\text{咖啡}}=T_f-90℃,\Delta T_{\text{牛奶}}=T_f-5℃$$

代入并消去 c 得到

$$(250\text{g})(T_f-90°)+(20\text{g})(T_f-5℃)=0$$

解得　$T_f=84℃$

18.6 保温瓶中有150g 4℃的水。现加入90g 100℃的金属。热平衡后，水和金属都是21℃。求金属的比热。假设保温瓶没有散热。

解答

$$(\text{金属热量改变})+(\text{水热量改变})=0$$

$$(cm\Delta T)_{金} + (cm\Delta T)_{水} = 0$$

$$c_{金}(90g)(-79℃) + (1.00cal/g \cdot ℃)(150g)(17℃) = 0$$

解得 $c_{金} = 0.36cal/g \cdot ℃$,

注意,$\Delta T_{金} = 21 - 90 = -79(℃)$

18.7 量热器铜质圆筒质量为 200g,内有 150g 的油,初始温度为 20℃。向油里加入 80g、温度为 300℃的铝。问系统平衡以后最终达到什么温度。已知 $c_{Cu} = 0.093\ cal/g \cdot ℃$,$c_{Al} = 0.21cal/g \cdot ℃$,$c_{油} = 0.37cal/g \cdot ℃$

解答

$$(铝的热量改变) - (铜筒和油的热量改变) = 0$$

$$(cm\Delta T)_{铝} + (cm\Delta T)_{铜} + (cm\Delta T)_{油} = 0$$

代入具体数据得

$$\left(0.21\frac{cal}{g \cdot ℃}\right)(80g)(T_f - 300℃) + \left(0.093\frac{cal}{g \cdot ℃}\right)(200g)(T_f - 20℃)$$

$$+ \left(0.37\frac{cal}{g \cdot ℃}\right)(150g)(T_f - 20℃) = 0$$

解得 $T_f = 72℃$

18.8 铜质量热器中的 3.0g 碳燃烧成为 CO_2。已知量热器质量为 1500g,内装 2000g 水,初始温度为 20℃,最终温度为 31℃。试求每克碳所释放出来的热量。不计碳以及二氧化碳本身很小的热容量。铜的比热为 0.093cal/g · ℃。

解答 能量守恒告诉我们

(碳的热量改变)+(量热器热量改变)+(水的热量改变)=0

(碳的热量改变)+(0.093cal/g · ℃)(1500g)(11℃)

+(1cal/g · ℃)(2000g)(11℃)=0

所以(碳的热量改变)=−23500cal

每克碳燃烧所释放的热量为$\frac{23500cal}{3.0g} = 7.8kcal/g$

18.9 150g、0℃的冰与 300g、50℃的水混合,求最终温度 T_f。

解答 从能量守恒

(冰的热量改变)+(水的热量改变)=0

即

$$(使冰熔解的热量)+(使冰水变暖的热量)+(水热量的改变)=0$$

$$(mL_f)_{冰} + (cm\Delta T)_{冰水} + (cm\Delta T)_{水} = 0$$

$$(150g)(80cal/g \cdot ℃) + (1.00cal/g \cdot ℃)(150g)(T_f - 0)$$

$$+ (1.00cal/g \cdot ℃)(300g)(T_f - 50℃) = 0$$

解得 $T_f = 6.7℃$

18.10 求 100℃的蒸汽 20g 冷却成 20℃过程中释放的热量。

解答

$$(热量改变) = (冷凝的热量改变) + (水冷却过程中热量改变)$$

$$= mL_v + cm\Delta T$$

$$= (20g)(-540cal/g \cdot ℃) + (1.00cal/g \cdot ℃)(20g)$$

$$(20℃ - 100℃) = -12400cal = -12kcal$$

18.11 初始温度为 90℃的铝 200g 丢入一大块 0℃的冰中间的腔内,求有多少冰熔化。(已知铝的 $c = 0.21cal/g \cdot ℃$)

解答

(铝块冷却到 0℃热量改变)+(质量为 m 的冰熔解的热量)=0

即

$$(mc\Delta T)_{铝} + (L_f m)_{冰} = 0$$

$$(20g)(0.21cal/g \cdot ℃)(0℃ - 90℃) + (80cal/g)m = 0$$

解得　$m=4.7\text{g}$。

18.12　量热器在热交换过程中等效于 40g 的水，内有 200g 水和 50g 冰，初始温度为 0℃。求向水中加入 30g 90℃的热水，系统平衡后的状况。

解 ☞　先假设系统最终温度 $T_f>0℃$（也可能不对）。于是

（热水的热量改变）+（冰熔解的热量）+（250g 水变暖的热量）+（量热器变暖的热量）=0

$(30\text{g})(1.00\text{cal/g}\cdot℃)(T_f-90℃)+(50\text{g})(80\text{cal/g})+(250\text{g})(1\text{cal/g}\cdot℃)(T_f-0)+(40\text{g})(1.00\text{cal/g}\cdot℃)(T_f-0℃)=0$

解得 $T_f=-4.1℃$。这与我们当初的假设（$T_f>0$）不符。显然，并非所有的冰都熔化了。所以 $T_f=0℃$。

为了求熔化了多少冰，写出

$$\text{热水放出的热}=\text{熔化冰所吸收的热}$$

$$(30\text{g})(1.00\text{cal/g}\cdot℃)(90℃)=(80\text{cal/g})m$$

解得 $m=34\text{g}$。即系统最后还剩下 $50\text{g}-34\text{g}=16\text{g}$ 冰尚未熔化。

18.13　一电热器提供 900W 功率将水变成蒸汽。求三分钟内能使多少 100℃的水转变成蒸汽。已知水的汽化热 $L_v=2.26\times10^6\text{J/kg}$。

解 ☞　电热器每秒钟提供 900J 热能。故三分钟内提供热量为

$$\Delta Q=(900\text{J/s})(180\text{s})=162\text{kJ}$$

要将质量为 m 的 100℃的水转变成蒸汽需要

$$\Delta Q=mL_v=m(2.26\times10^6\text{J/kg})$$

将上述两式联立解得　$m=0.0717\text{kg}=71.7\text{g}$。

18.14　质量为 3.00g 的子弹（$c=0.0305\text{cal/g}\cdot℃=128\text{J/kg}\cdot℃$）以 180m/s 的速率射入沙袋而停止。假设所有动能都转化为子弹的热能，子弹温度升高多少？

解 ☞　子弹损失的动能为

$$\text{KE}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(3.00\times10^{-3}\text{kg})(180\text{m/s})^2=48.6\text{J}$$

这导致了子弹增加热能。由于 $\Delta Q=mc\Delta T$，所以有

$$\Delta T=\frac{\Delta Q}{mc}=\frac{48.6\text{J}}{(3.00\times10^{-3}\text{kg})(128\text{J/kg}\cdot℃)}=127℃$$

注意，比热的单位应用 J/kg·℃，而不是 cal/g·℃。

18.15　假设 60 kg 的人每日消耗 2500 Cal 的食物。如果这些食物产生的热量完全留在人体内，会使人体温度增加多少？人体比热 $c=0.83\text{cal/g}\cdot℃$，1 Cal=1000 cal。

解 ☞　每天食物产生的热量为

$$\Delta Q=(2500\text{ Cal})(1000\text{ cal/Cal})=2.5\times10^6\text{ cal}$$

应用 $\Delta Q=mc\Delta T$　有

$$\Delta T=\frac{\Delta Q}{mc}=\frac{2.5\times10^6\text{cal}}{(60\times10^3\text{g})(0.83\text{cal/g}\cdot℃)}=50℃$$

18.16　一个 10m×8.0m×4.0m 的房间室温为 22℃，相对湿度（R. H.）为 35%。房间内有多少水蒸气？已知 22℃空气中饱和水蒸气为 19.33g H_2O/m^3。

解 ☞

$$\%\text{R. H.}=\frac{\text{每立方米空气中水的质量}}{\text{每立方米空气中饱和水蒸气质量}}\times100$$

$$35=\frac{\text{质量}/\text{m}^3}{0.01933\text{kg/m}^3}\times100$$

解得质量/$\text{m}^3=6.77\times10^{-3}\text{kg/m}^3$。

房间容积为 $10\text{m}\times8.0\text{m}\times4.0\text{m}=320\text{m}^3$

所以房间内水的总质量为

$$(320\text{m}^3)(6.77\times10^{-3}\text{kg/m}^3)=2.2\text{kg}$$

18.17　某日气温为 28℃。如果冷饮杯温度在 16℃或以下，杯外壁便有水汽凝结。求这时空

气的相对湿度 R. H. 。28℃时水蒸气达饱和的空气中含水量为 26.93g/m^3，而在 16℃时为 13.50g/m^3。

解 由题意，16℃时开始有水汽凝结，即 16℃为露点。即水蒸气达饱和的空气中有 13.50g/m^3 水分。所以

$$\text{R. H.} = \frac{\text{单位体积空气中水分含量}}{\text{单位体积空气中饱和水蒸气的含量}} = \frac{13.50}{26.93} = 0.50 = 50\%$$

18.18 中央空调器将室外 5℃、相对湿度为 20%的空气加热到 20℃、相对湿度为 50%的舒适程度。问要在每立方米室外空气中加多少克的水汽？已知 5℃时水蒸气饱和的空气中水分含量为 6.8g/m^3，而在 20℃时为 17.3g/m^3。

解 每立方米 5℃的空气中含水分 $=0.20\times6.8\text{g/m}^3=1.36\text{g/m}^3$

每立方米 20℃的空气若令人感到舒适，其含水量应为 $0.50\times17.3\text{g/m}^3=8.65\text{g/cm}^3$。又，$1\text{m}^3$ 5℃的空气升至 20℃时体积膨胀为 $(293/273)\text{m}^3=1.054\text{m}^3$。

而这 1.054m^3 20℃的空气中含水量为

$$1.054\text{m}^3\times8.65\text{g/cm}^3=9.12\text{g}$$

所以每立方米 5℃的空气中需加入水的质量为 $(9.12-1.36)\text{g}=7.8\text{g}$。

习 题

18.19 将下面三种物体从 15℃加热至 65℃需多少卡热量？(a) 3.0g 的铝，(b) 5.0g 的硼硅酸玻璃，(c) 20g 的铂。已知铝、硼硅酸玻璃和铂的比热分别为 0.21，0.20 和 0.032，单位均为 cal/g · ℃。

(答 (a) 32cal；(b) 50cal；(c) 32cal)

18.20 燃烧 50g 煤可使 1000mL 的水从 10℃升温到 47℃。每克煤产生多少热量？忽略煤自身的很小的热容量。

(答 7.4kcal/g)

18.21 某种燃油的燃烧值为 44MJ/kg。假设只有 70%的热量被利用，欲将 2000kg 的水从 20℃升温至 99℃需多少千克的燃油？

(答 22kg)

18.22 向 50g 恰好是 0℃的冷水中加入 250g、90℃的热水，求最终温度。

(答 75℃)

18.23 50g 的某种金属初温为 95℃，丢入 250g、温度为 17.0℃的水中，最后达到 19.4℃。求这种金属的比热。

(答 0.16 cal/g · ℃)

18.24 一个功率为 2.50W 的加热器要将 400g 已经达到沸点 4.2K 的液氦变成气体，要花多长时间。已知氦的汽化热为 $L_v=5.0\text{cal/g}$。

(答 56 分)

18.25 质量为 55g 的铜质量热器内装 250g 水，温度为 18.0℃。丢入 75g 温度为 100℃的合金后，最后达到 20.4℃。求这种合金的比热。已知铜的比热为 0.093 cal/g · ℃。

(答 0.10cal/g · ℃)

18.26 质量 1.0kg 正好是 0℃的冰与 9.0kg，温度为 50°的水混合，求最终温度。

(答 37℃)

18.27 将 10g 正好是 0℃的冰转变成 100℃的蒸汽需要多少热量？

(答 7.2kcal)

18.28 10kg 的 100℃的蒸汽凝结到 500kg、初始温度为 40.0℃的水中。求最终温度。

(答 51.8℃)

18.29 乙烷的燃烧值为 373kcal/kg。假设只有 60%热量被利用，若将 50.0kg 初温为 10.0℃的水全部转变成 100℃的蒸汽，需要烧多少升乙烷？(在标准状况下的体积，即温度为 0℃，压强为 1atm，这时每摩尔气体体积为 22.4L。)

(答 $3.15\times10^3\text{L}$)

18.30 用以下数据计算冰的熔解热，将正好 0℃的冰加入量热器中的水里：

量热器质量 60g，

量热器加水的质量 460g，

量热器加水加冰的质量 618g，

水的初始温度 38.0℃，

混合物最终温度 5.0℃，

量热器材料的比热 0.10cal/g·℃

（答 80cal/g）

18.31 一个量热器在热交换过程中等效于 30g 的水。开始时量热器中有 200g 水和 20g 冰，初始温度精确等于 0℃。向水中通入 100g 温度为 100℃的水蒸气。求系统最终状况。

（答 最终温度仍为 100℃，有 49g 水蒸气冷凝成水）

18.32 量热器在热交换过程中等效于 50g 的水。初始时量热器内有 400g 水和 100g 冰，温度精确地等于 0℃。向水中通入 10g 温度为 100℃的水蒸气。求系统最终的状况。

（答 80g 冰熔化，但终温仍为 0℃）

18.33 假设某人通过食物每天获得 2500Cal 热量。这些热量都通过人体蒸发水分而消耗。求每天要蒸发多少水？在人体温度条件下，水的蒸发热 L_v 为 600cal/g。

（答 4.17kg）

18.34 一个 500W 的热水器要把 400g 水从 15.0℃加热至 98.0℃，需花多长时间？

（答 278s）

18.35 一个功率为 0.250hp 的电钻在硬木上钻孔。由于钻头很钝，有 75.0%摩擦消耗的能量转化成钻头加热的能量。已知钻头质量为 50.0g，钢质钻头的比热为 450J/kg·℃。20.0s 内钻头温度变化多少。

（答 124℃）

18.36 某日气温为 20℃，而露点为 5℃。求空气的相对湿度。已知在 20℃和 5℃时空气中饱和水蒸气含量分别为 17.12g/m^3 和 6.80g/m^3。

（答 40%）

18.37 房间容积为 105m^3，室温为 20℃，室内相对湿度为 32%。室内空气中有多少水蒸气？已知在 20℃时空气中饱和水蒸气的含量为 17.12g/m^3。

（答 0.58kg）

18.38 30℃、相对湿度为 90%的空气被空调器冷却到 20℃，相对湿度也降至 50%。空调器从每立方米 30℃的空气中去除了多少克水分？已知在 30℃和 20℃时空气中饱和水蒸气含量分别为 30.4g/m^3 和 17.1g/m^3。

（答 19g）

第十九章　热能迁移

热能迁移

热能迁移有三种形式：热传导、热对流和热辐射。记住，热量是两个相接触的系统之间能量从温度较高的系统传到温度较低的系统，热能传递是由于组成系统的粒子的碰撞实现的。

热传导

组成物质的自由电子、离子、原子和分子在运动中发生碰撞而使热能迁移的过程叫热传导。当相互接触的两种物质存在温差时，它们的粒子间发生碰撞，从而使高温物质中具有较高动能的粒子将能量迁移到低温物质中动能较低的粒子，于是热量从热的物质流到冷的物质。

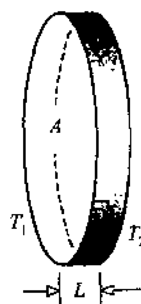


图 19-1

考察图 19-1 所示的一个片状物，其厚度为 L，横截面积为 A，两端面的温度分别为 T_1 和 T_2，即片状物两边的温差为 $\Delta T = T_1 - T_2$。$\Delta T/L$ 称为温度梯度，它是温度随距离的变化率。

在 Δt 时间内从端面 1 迁移到端面 2 的热量 ΔQ 由下式给出：

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_T A \frac{\Delta T}{L}$$

式中 k_T 称为材料的热导率，取决于这个片状物体的材料性质。在 SI 制中 k_T 的单位为 W/m·K，而 $\Delta Q/\Delta t$ 的单位为 J/s(即瓦，W)。有时也用其他单位表示 k_T，这些单位与 W/m·K的关系为

$$1\ \text{cal/s}\cdot\text{cm}\cdot{}^\circ\text{C} = 418.4\text{W/m}\cdot\text{K}$$

$$1\ \text{Btu}\cdot\text{in/h}\cdot\text{ft}^2\cdot{}^\circ\text{F} = 0.144\text{W/m}\cdot\text{K}$$

热阻(R 值)

从片状物体的热流方程定义热阻

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A\Delta T}{R}$$

式中 $R = \frac{L}{k_T}$。在 SI 制中，R 的单位为 $\text{m}^2\cdot\text{K/W}$。热阻在英国和美国的习惯单位为 $\text{ft}^2\cdot\text{h}\cdot{}^\circ\text{F/Btu}$，$1\ \text{ft}^2\cdot\text{h}\cdot{}^\circ\text{F/Btu} = 0.176\ \text{m}^2\cdot\text{K/W}$。相信大家不太可能把热阻与理想气体常数相混淆。

一系列横截面积相同的片状物组合起来的热阻为

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$$

式中 R_1，…为各个片状物的热阻。

热对流

流体中温度较高的部分流向温度较低的部分使得热能迁移的过程叫作热对流。暖汽装置造成的热空气的流动以及墨西哥湾的温暖水流等都是热对流的实例。

热辐射

热辐射是原子之间电磁能量的迁移方式，它可以跨越真空和外太空而无需接触。辐射能与热能是不同的，尽管它们都对应能量的迁移过程。不要混淆热和电磁辐射。

物体如果能够全部吸收辐照到它的电磁能量，我们就称它为黑体。处在热平衡态中的物体也辐射能量，辐射出去的能量与所吸收到的能量相等，所以一个良好的辐射能吸收体也必然是一个良好的辐射能发射体。

假设一个物体的表面积为 A，绝对温度为 T，它所辐射的能量只是同样面积、同样温度的黑体所辐射的能量的一部分 ϵ，ϵ 称为这个表面的辐射系数。物体表面单位时间(s)所辐射的能量，即功率，由斯特藩-玻尔兹曼定律给出：

$$P = \epsilon A\sigma T^4$$

式中 $\sigma=5.67\times10^{-8}\mathrm{W/m^2\cdot K^4}$，称为斯特藩-玻尔兹曼常数，$T$ 为绝对温度。黑体的辐射系数等于 1。

所有温度高于绝对零度的物体都辐射能量。若物体的绝对温度为 T，它所处环境的绝对温度为 T_e，则该物体每秒净辐射的能量为

$$P = \epsilon A\sigma(T^4 - T_e^4)$$

例　　题

19.1　一块 2cm 厚的铁板，截面积为 5000cm²。一面温度为 150℃，另一面为 140℃。每秒钟有多少热量流过铁板？已知铁的导热率 $k_T=80\mathrm{W/m\cdot K}$。

解

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_T A\,\frac{\Delta T}{L} = (80\mathrm{W/m\cdot K})(0.50\mathrm{m^2})\left(\frac{10℃}{0.02\mathrm{m}}\right) = 20\mathrm{kJ/s}$$

19.2　一块厚度为 4.00mm 的金属板，两表面温差 32.0℃。已知通过 5.00cm² 的传热功率为 200kJ/h，求这种金属的热导率，以 W/m · K 为单位。

解

$$k_T = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\,\frac{L}{A(T_1-T_2)} = \frac{(2.00\times10^5\mathrm{cal})(4.184\mathrm{J/cal})}{(1.00\mathrm{h})(3600\mathrm{s/h})}$$

$$\frac{4.00\times10^{-3}\mathrm{m}}{(5.00\times10^{-4}\mathrm{m^2})(32.0\mathrm{K})} = 58.5\mathrm{W/m\cdot K}$$

19.3　两块金属板焊接在一起，如图 19－2 所示。已知 $A=80\mathrm{cm^2}$，$L_1=L_2=3.0\mathrm{mm}$，$T_1=100℃$，$T_2=0℃$。对于左边的板，$k_{T_1}=48.1\mathrm{W/m\cdot K}$，对于右边的板，$k_{T_2}=68.2\mathrm{W/m\cdot K}$。求单位时间流经它们的热量以及焊接处的温度。

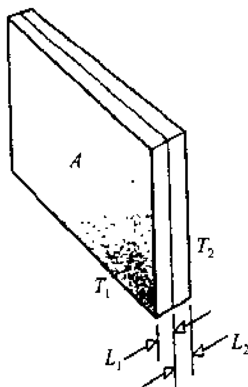


图 19－2

解　假设板处于热平衡态，这样通过板 1 的热量必然等于通过板 2 的热量：

$$k_{T_1}A\,\frac{T_1-T}{L_1} = k_{T_2}A\,\frac{T-T_2}{L_2}$$

由于 $L_1=L_2$，上式简化为

$$k_{T_1}(100℃ - T) = k_{T_2}(T - 0℃)$$

所以

$$T = (100℃)\left(\frac{k_{T_1}}{k_{T_1}+k_{T_2}}\right) = (100℃)\left(\frac{48.1}{48.1+68.2}\right) = 41.4℃$$

热流速率为

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_{T_1}A\,\frac{T_1-T}{L} = (48.1\mathrm{W/m\cdot K})(0.0080\mathrm{m^2})\,\frac{(100-41.4)\mathrm{K}}{0.0030\mathrm{m}} = 7.5\mathrm{kJ/s}$$

19.4　边长为 42cm 的立方体饮料保温箱，其 3.0cm 厚的箱壁由塑料制成，$k_T=0.050\mathrm{W/m\cdot K}$。若箱外温度为 20℃，箱内的冰每小时熔化多少？

解　箱子有 6 个面，每个面的面积约为(0.42m)²。由 $\Delta Q/\Delta t=k_T A\Delta T/L$，箱内的冰为 0℃，

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=(0.050\mathrm{W/m\cdot K})(0.42\mathrm{m})^2(6)\left(\frac{20℃}{0.030\mathrm{m}}\right)=35.3\mathrm{J/s}=8.43\mathrm{cal/s}$$

一小时流入的热量为(3600)(8.43)=30350(cal)

熔化 1.0g 冰,需要 80cal,所以一小时熔化冰的质量

$$m=\frac{30350\mathrm{cal}}{80\mathrm{cal/g}}=0.38\mathrm{kg}$$

19.5 长 3.0m,内径 1.500cm,外径 1.700cm 的铜管浸入一个大循环水箱,箱内保持水温为 20℃。管内通过 100℃的蒸汽。(a)求蒸汽到水箱传热的速率。(b)每分钟管内有多少蒸汽冷凝成水?已知铜的热导率为 $k_T=1.0\mathrm{cal/s\cdot cm\cdot ℃}$。

解析 由于管的厚度比起其半径要小得多,管的内表面面积为

$$2\pi r_{内}L=2\pi(0.750\mathrm{cm})(300\mathrm{cm})=1410\mathrm{cm}^2$$

管的外表面积为

$$2\pi r_{外}L=2\pi(0.850\mathrm{cm})(300\mathrm{cm})=1600\mathrm{cm}^2$$

二者相差不大,我们可以近似地认为铜管为一厚度为 0.100cm、截面积为 A 的板,而

$$A=\frac{1}{2}(1410\mathrm{cm}^2+1600\mathrm{cm}^2)=1500\mathrm{cm}^2$$

(a) $\frac{\Delta Q}{\Delta t}=k_TA\frac{\Delta T}{L}=\left(1.0\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{s\cdot cm\cdot ℃}}\right)\frac{(1500\mathrm{cm}^2)(80℃)}{(0.100\mathrm{cm})}=1.2\times10^6\ \mathrm{cal/s}$

(b)一分钟里通过铜管传递的热量为

$$\Delta Q=(1.2\times10^6\mathrm{cal/s})(60\mathrm{s})=72\times10^6\mathrm{cal}$$

由于 100℃的蒸汽转化为 100℃的水需要 540cal 热量,所以每分钟凝结蒸汽的质量为

$$\frac{72\times10^6\mathrm{cal}}{540\mathrm{cal/g}}=13.3\times10^4\mathrm{g}=1.3\times10^2\mathrm{kg}$$

实际上,由于多种因素的影响,凝结量比理论值小得多。

19.6 (a)求下列三层结构组成的墙的热阻(R 值):混凝土层($R=1.93$),1.0in 的隔热板($R=4.3$)和 0.50in 的石板($R=0.45$)。以英美习惯单位表示。(b)如果墙的截面积为 $15\mathrm{m}^2$,墙内外温度差为 20℃时,每小时迁移多少热量?

解析 (a) $R=R_1+R_2+R_3=1.93+4.3+0.45=6.7$

1 个英美习惯单位 R 值 $=0.176\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K/W}$,换算得 $R=1.18\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K/W}$

(b) $\Delta Q=\frac{A\Delta T}{R}(\Delta t)=\frac{(15\mathrm{m}^2)(20℃)}{1.18\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K/W}}(3600\mathrm{s})=0.915\mathrm{MJ}=2.2\times10^2\mathrm{kcal}$

19.7 直径为 2.0cm 的球体保持在 600℃。若它是黑体,它辐射能量的速率是多少(以瓦为单位)?

解析 表面积 $A=4\pi r^2=4\pi(0.01\mathrm{m})^2=1.26\times10^{-3}\mathrm{m}^2$

$$P=A\sigma T^4=(1.26\times10^{-3}\mathrm{m}^2)(5.67\times10^{-8}\mathrm{W/m^2\cdot K^4})(873\mathrm{K})^4=41\mathrm{W}$$

19.8 人体的表面积为 $1.40\mathrm{m}^2$,辐射系数为 0.85。若不穿衣服时皮肤温度为 37℃,而室温为 20℃,每分钟这个人要损失多少能量?

解析 由 $P=\varepsilon A\sigma(T^4-Te^4)$ 所以一分钟辐射能量为

$$\varepsilon A\sigma(T^4-Te^4)\Delta t=(0.85)(1.40\mathrm{m}^2)(\sigma)(T^4-Te^4)(60\mathrm{s})$$

代入 $\sigma=5.67\times10^{-8}\mathrm{W/m^2\cdot K^4}$,$T=273+37=310(\mathrm{K})$,

$Te=273+20=293(\mathrm{K})$得每分钟辐射能为

$$7.6\mathrm{kJ}=1.8\mathrm{kcal}$$

习 题

19.9 一个铝棒,每秒钟通过每平方厘米截面迁移 8.0cal 的热量.铝棒上温度梯度等于多少?对于铝,$k_T=210\mathrm{W/K\cdot m}$。

(答 16℃/cm)

19.10 对于只有单层玻璃窗的建筑物，玻璃板两边的空气层也起到了保温隔热的作用。如果不考虑这两层空气的作用，试计算每小时透过 80cm×40cm×3.0mm 的玻璃迁移的热量。已知室外温度精确地为 0℃，室内为 18℃，玻璃的 $k_T=0.84$ W/K·m。

（答　1.4×10^3 kcal/h）

19.11 0.20cm 厚的钢板两侧温差为 100℃，一侧为 100℃的水。试求透过钢板上每平方厘米面积，在一小时内迁移的热量能使多少水变成蒸汽？

（答　0.33kg/h·cm^2）

19.12 某房间是双层窗玻璃，每层玻璃均为 80cm×80cm×0.30cm，玻璃之间有 0.30cm 的空气层。室内为 20℃，室外精确地为 0℃。每秒钟有多少热量透过窗户？已知玻璃 $k_T=0.84$W/K·m，而空气 $k_T=0.080$W/K·m。

（答　69cal/s）

19.13 炉子上的小洞就像黑体表面，其温度同炉内温度 1727℃。设洞截面积为 1.00cm^2，每秒钟从小洞辐射出多少卡热量？

（答　21.7cal/s）

19.14 白炽灯的灯丝表面积为 50mm^2，工作温度为 2127℃。假设供给灯泡的全部能量都是从灯丝辐射出去。已知灯丝的辐射系数为 0.83。亮灯时要给灯泡提供多大功率？

（答　78W）

19.15 一个半径为 3.0cm 的球，其性质像黑体。当它与外界处于热平衡态时，它从外界的辐射中吸收功率为 30kW。试计算球的温度。

（答　2.6×10^3K）

19.16 一块厚 2.0cm 的黄铜板（$k_T=105$W/K·m）与一块面积相同的玻璃板黏结在一起，玻璃的 $k_T=0.80$W/K·m。若黄铜板外表面为 80℃，玻璃板外侧为 20℃，而它们的黏结面温度为 65℃，试求玻璃板的厚度。

（答　0.46mm）

第二十章　热力学第一定律

热量

相互接触的物体或系统，由于温度不同而迁移的热能叫热量。热量总是从高温物体流向低温物体。若两个相互接触的物体处于热平衡态，即没有净的热量迁移，它们的温度必然相等。如果两个物体各自与第三个物体处于热平衡态，那么这两个物体也处于热平衡态。这个事实常常被称为热力学第零定律。

内能(U)

系统所具有的全部能量为其内能。它是系统内所有原子、分子所具有的各种形式的能量总和。

系统作功(ΔW)

如果系统向外界释放了能量，系统作功就是正的；如果外界对系统作功，将能量传递给系统，则系统作功就是负的。流体在常压下体积膨胀了一个小量 ΔV，则作功为

$$\Delta W = P\Delta V$$

热力学第一定律

热力学第一定律是能量守恒定律的一种陈述。即系统获得的热量 ΔQ 等于系统内能的增加 ΔU 以及系统对外界作功 ΔW 之和。热力学第一定律的方程为

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

等压过程

系统在压强不变条件下的过程为等压过程。

等容过程

系统在体积不变条件下的过程为等容过程。气体的等容过程中

$$\Delta W = P\Delta V = 0$$

所以这时热力学第一定律就变成

$$\Delta Q = \Delta U$$

一切流入系统的热量都体现为系统内能的增加。

等温过程

温度不变的过程即等温过程。在理想气体的等温过程中，分离的原子或分子彼此没有相互作用，系统的内能不变，即 $\Delta U=0$。然而许多其他系统并不是这样。比如，0℃的冰熔化成0℃的水，尽管是等温过程，却 $\Delta U\neq 0$。

理想气体的等温过程中 $\Delta U=0$，所以热力学第一定律就变成

$$\Delta Q = \Delta W$$

理想气体等温过程从(P_1,V_1)变到(P_2,V_2)，且 $P_1V_1=P_2V_2$，有

$$\Delta Q = \Delta W = P_1V_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 2.30P_1V_1\lg\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

这里 ln 和 lg 分别是以 e 为底和以 10 为底的对数，即自然对数和常用对数。

绝热过程

在绝热过程中，没有热量进入或流出系统。即绝热过程中的 $\Delta Q=0$，所以热力学第一定律就变成

$$0=\Delta U+\Delta W$$

这时系统作功就要消耗系统的内能。而对系统作功就增加系统的内能。

理想气体经绝热过程从(P_1,V,T_1)变到(P_2,V_2,T_2)，有

$$P_1V_1^\gamma=P_2V_2^\gamma$$

和

$$T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_2^\gamma$$

式中 $\gamma=c_p/c_v$，待以下讨论。

气体的比热容

气体若受热而保持体积不变，这些热量就增加气体分子的内能。但在压强不变的情况下气体受热，这些热量不仅增加气体分子的内能，而且使气体膨胀，反抗外界压力而作机械功。所以等压过程的比热容 c_p 就大于等容过程的比热容 c_v。对于千摩尔质量为 M 的理想气体，可以证明

$$c_p-c_v=\frac{R}{M}$$

式中 R 为普适气体常数。在 SI 制中，$R=8314\text{J/kmol}\cdot\text{K}$，而 M 的单位为 kg/kmol。这样 c_p 和 c_v 的单位就是 J/kg · K=J/kg · ℃。有时取 $R=1.98\text{cal/mol}\cdot℃$，$M$ 取 g/mol 为单位，这时 c_p 和 c_v 的单位为 cal/g · ℃。

比热容$(\gamma=c_p/c_v)$

如上所述，对于气体，有热容比 $\gamma>1$。气体分子运动论指出，在通常温度下，单原子气体（如氦、氖、氩）$\gamma=1.67$；对双原子气体（如氮、氧）$\gamma=1.40$。

***P-V* 图**

作功与 P-V 图中的面积有关。流体膨胀作功等于 P-V 图中曲线下的面积。

在循环过程中，流体每个循环对外作功等于 P-V 图上表示循环过程的封闭曲线内的面积。

热机效率

效率定义为对外作功与输入的热量之比。卡诺循环是热机能实现的效率最高的循环。在一个高温(T_h)热源和一个低温(T_c)热源之间循环运转的热机，其效率最大：

$$\text{eff}_{\max}=1-\frac{T_c}{T_h}$$

方程中温度必须用开尔文温标。

例　题

20.1　在某过程中，外界传给系统 8.00kcal 热量，同时系统作了 6.00kcal 的功。过程中系统内能改变了多少？

解 ☞　已知 $\Delta Q=(8000\text{cal})(4.184\text{J/cal})=33.5\text{kJ}$

而　$\Delta W=6.00\text{kJ}$

由热力学第一定律　$\Delta Q=\Delta U+\Delta W$

$$\Delta U=\Delta Q-\Delta W=33.5\text{kJ}-6.00\text{kJ}=27.5\text{kJ}$$

20.2 水的比热为 4184J/kg·K，当 50g 水从 21℃升温到 37℃时，其内能变化了多少焦耳？

解 加到水中的热量为

$$\Delta Q=cm\Delta T=(4184\text{J/kg}\cdot\text{K})(0.050\text{kg})(16℃)=3.4\times10^3\text{J}$$

忽略水的微小的热膨胀，即对外作功 $\Delta W=0$。由热力学第一定律 $\Delta Q=\Delta U+\Delta W$，

$$\Delta U=\Delta Q=3.4\text{kJ}$$

20.3 5.0g 0℃的冰转变为 0℃的水，其内能改变多少？忽略体积的变化。

解 熔化冰需要热量

$$\Delta Q=mL_f=(5.0\text{g})(80\text{cal/g})=400\text{cal}$$

熔化过程未作功，$\Delta W=0$。由 $\Delta Q=\Delta U+\Delta W$，

$$\Delta U=\Delta Q=(400\text{cal})(4.184\text{J/cal})=1.7\text{kJ}$$

20.4 弹簧($k=500$N/m)承挂着 400g 的物体，物体全部浸在 900g 的水中。物体的比热为 450J/kg·K。弹簧开始时拉长 15cm，热平衡后释放物体并开始上下振动。当振动停止后，水温变化了多少？

解 贮存在弹簧中的能量被摩擦作用而消耗，转变成热能使水和物体升温。拉长了的弹簧贮存的势能为

$$\text{PE}_0=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}(500\text{N/m})(0.15\text{m})^2=5.625\text{J}$$

这个能量以热的形式流入了水和物体之中。应用 $\Delta Q=cm\Delta T$ 有

$$5.625\text{J}=(4184\text{J/kg}\cdot\text{K})(0.900\text{kg})\Delta T+(450\text{J/kg}\cdot\text{K})(0.40\text{kg})\Delta T$$

得

$$\Delta T=\frac{5.625\text{J}}{3950\text{J/K}}=0.0014\text{K}$$

20.5 边长为 6.0cm 的立方体铁块，质量为 1700g。在大气压下由 20℃加热到 300℃。求 ΔW 和 ΔU。已知 $c=0.11$cal/g·℃，而铁的体胀系数为 $3.6\times10^{-5}℃^{-1}$。

解

$$\Delta Q=cm\Delta T=(0.11\text{cal/g}\cdot℃)(1700\text{g})(280℃)=52\text{kcal}$$

立方体的体积 $V=(6.0\text{cm})^3=216\text{cm}^3$

由 $(\Delta V)/V=\beta\Delta T$ 得

$$\Delta V=V\beta\Delta T=(216\times10^{-6}\text{m}^3)(3.6\times10^{-5}℃^{-1})(280℃)$$
$$=2.18\times10^{-6}\text{m}^3$$

假设大气压为 1.0×10^5Pa，有

$$\Delta W=P\Delta V=(1.0\times10^5\text{N/m}^2)(2.18\times10^{-6}\text{m}^3)=0.22\text{J}$$

由热力学第一定律

$$\Delta U=\Delta Q-\Delta W=(52000\text{cal})(4.184\text{J/cal})-0.22\text{J}$$
$$=218000\text{J}-0.22\text{J}\approx2.2\times10^5\text{J}$$

注意，热膨胀反抗大气压所作的功与 ΔU 和 ΔQ 相比是多么小。当涉及流体和固体时，ΔW 通常可以忽略。

20.6 电机提供 0.4hp 搅动 5kg 水。假设所有的功均由于摩擦损耗而转变成热。使水升高 6℃需多长时间？

解 加热水所需热量为

$$\Delta Q=mc\Delta T=(5000\text{g})(1\text{cal/g}\cdot℃)(6℃)=30\text{kcal}$$

这是由于摩擦力作功而得，即

$$\text{摩擦力作功}=\Delta Q=(30\text{kcal})(4.184\text{J/cal})=126\text{kJ}$$

它应等于电机所作的功。又在时间 t 内电机作功=(功率)×(时间)=(0.4hp×746W/hp)(t)所以

$$t=\frac{1.26\times10^5\text{J}}{(0.4\times746)\text{W}}=420\text{s}=7\text{min}$$

20.7 求下列三种情况中系统内能的变化，以千焦耳(kJ)为单位：(a)系统吸收 500cal 热量同时对外作功 400J。(b)系统吸收 300cal 热量，同时外界对它作功 420J。(c)在体积不变

条件下，气体损失 1200cal 的热量。

解☞ (a) $\Delta U=\Delta Q-\Delta W=(500\text{cal})(4.184\text{J/cal})-400\text{J}=1.69\text{kJ}$

(b) $\Delta U=\Delta Q-\Delta W=(300\text{cal})(4.184\text{J/cal})-(-420\text{J})=1.68\text{kJ}$

(c) $\Delta U=\Delta Q-\Delta W=(-1200\text{cal})(4.184\text{J/cal})-0=-5.02\text{kJ}$

注意，系统得到热量，ΔQ 为正；而系统对外作功，ΔW 为正。而若相反，ΔQ 和 ΔW 为负。

20.8 求下述绝热过程中系统内能的改变：(a)气体绝热膨胀作功 5J。(b)外界对气体作功 80J 使气体绝热压缩。

解☞ 在绝热过程，系统没有吸热或散热。

(a) $\Delta U=\Delta Q-\Delta W=0-5\text{J}=-5\text{J}$

(b) $\Delta U=\Delta Q-\Delta W=0-(-80\text{J})=80\text{J}$

20.9 5.00kg 的氮气从 10.0℃升高至 130.0℃。如果所经历的是等压过程，求气体内能的改变以及对外作功。氮气的 $c_v=0.177\text{cal/g}\cdot℃$，$c_p=0.248\text{cal/g}\cdot℃$。

解☞ 如果在等容过程中气体受热，作功为零，$\Delta W=0$。按热力学第一定律有 $(\Delta Q)_v=\Delta U$。下角标表示体积不变。因为 $(\Delta Q)_v=c_v-m\Delta T$，所以有

$$\Delta U=(\Delta Q)_v=(0.177\text{cal/g}\cdot℃)(5000\text{g})(120℃)=106\text{kcal}$$
$$=443\text{kJ}$$

内能的改变反映在温度的改变。

在等压过程中气体吸收热量而升高 120℃，气体内能的变化与等容过程是相同的。然而，气体还对外作功。第一定律为

$$(\Delta Q)_p=\Delta U+\Delta W=443\text{kJ}+\Delta W$$

而 $(\Delta Q)_p=c_pm\Delta T=(0.248\text{cal/g}\cdot℃)(5000\text{g})(120℃)$

$=149\text{kcal}=623\text{kJ}$

所以 $\Delta W=(\Delta Q)_p-\Delta U=623\text{kJ}-443\text{kJ}=180\text{kJ}$

20.10 在 100℃和 101kPa 条件下，1 kg 蒸汽占体积 1.68m^3。(a)求水变蒸汽体积膨胀作功占水汽化热的比例。(b)1.00kg 100℃的水变成 100℃蒸汽，内能增加了多少？

解☞ (a) 1kg 水成为蒸汽，其体积由 1000cm^3，膨胀到 1.68m^3，$\Delta V=1.68-0.001\approx1.68\text{m}^3$。所以膨胀作功为

$$\Delta W=P\Delta V=(101\times10^3\text{N/m})(1.68\text{m}^3)=169\text{kJ}$$

水的汽化热为 540 cal/g，即 2.26MJ/kg。所以膨胀作功占汽化热的比例为

$$\frac{\Delta W}{mL_v}=\frac{169\text{kJ}}{(1.00\text{kg})(2260\text{kJ/kg})}=0.0748$$

(b)由第一定律，$\Delta U=\Delta Q-\Delta W$，即

$\Delta U=2.26\times10^6\text{J}-0.169\times10^6\text{J}=2.07\text{MJ}$

20.11 氮气的 $c_v=740\text{J/kg}\cdot\text{K}$，$M=28.0\text{kg/kmol}$。求等压过程的比热容。

解☞ 方法一

$$c_p=c_v+\frac{R}{M}=\frac{740\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}+\frac{8314\text{J/kmol}\cdot\text{K}}{28.0\text{kg/kmol}}=1.04\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$$

方法二

N_2 是双原子气体；$\gamma=c_p/c_v=1.40$，所以

$$c_p=1.40\quad c_v=1.40(740\text{J/kg}\cdot\text{K})=1.04\text{kJ/kg}\cdot\text{K}$$

20.12 理想气体在 20.0atm 下等温膨胀从 3.00L 至 24.0L，求过程中气体对外作的功。

解☞ 理想气体等温膨胀有

$$\Delta W=P_1V_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)=2.30P_1V_1\lg\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$=(2.30)(20.0\times1.01\times10^5\text{N/m}^2)(3.00\times10^{-3}\text{m}^3)\lg\left(\frac{24.0}{3.00}\right)=12.6\text{kJ}$$

20.13 图 20-1 的 PV 图为一活塞-汽缸装置中气体的循环过程。求循环中各阶段气体对外

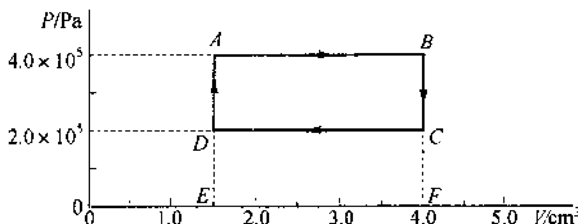


图 20-1

作功:(a)从 A 到 B,(b)从 B 到 C,(c)从 C 到 D,(d)从 D 到 A。

解 气体膨胀作功等于 PV 曲线相应部分下的面积;相反,气体被压缩,对外作功数值上也等于相应曲线下的面积,但为负值。

(a) 功 $=ABFEA$ 的面积

$=[(4.0-1.5)\times10^{-6}\,m^3](4.0\times10^5\,N/m^2)=1.0J$

(b) 功 $=BC$ 下面积 $=0$

过程 B 到 C,体积没变化,$P\Delta V=0$。

(c) C 到 D 是压缩过程,ΔV 是负的,所以功为负值:

$W=-(CDEFC\text{ 面积})=-(2.5\times10^{-6}\,m^3)(2.0\times10^5\,N/m^2)$

$=-0.50J$

(d) $W=0$

20.14 在上题,求(a)热循环过程中气体对外作的净功和(b)外界进入气体的净热量。

解 方法一

(a)由上题知,净功 $=1.0J-0.50J=0.5J$

方法二

净功等于 PV 图上封闭曲线内的面积:

$$W=ABCDA\text{ 的面积}=(2.0\times10^5\,N/m^2)(2.5\times10^{-6}\,m^3)=0.50J$$

(b)假设循环从 A 点开始最后又回到 A 点,所以气体状态没改变。一个循环后,有 $\Delta U=0$。按热力学第一定律有

$$\Delta Q=\Delta U+\Delta W=0+0.50J=0.50J=0.12cal$$

20.15 求图 20-2 中系统每次循环对外作的净功。

解 每个循环系统对外作净功为 PV 图上封闭曲线所包围的面积。图中 $ABCA$ 所包围的面积约为 22 个方格,每方格代表

$$(0.5\times10^5\,N/m^2)(0.1\,m^3)=5kJ$$

所以

曲线包围的面积 $\approx(22)(5kJ)=1\times10^2\,kJ$

即一次循环对外作净功约为 $1\times10^2\,kJ$。

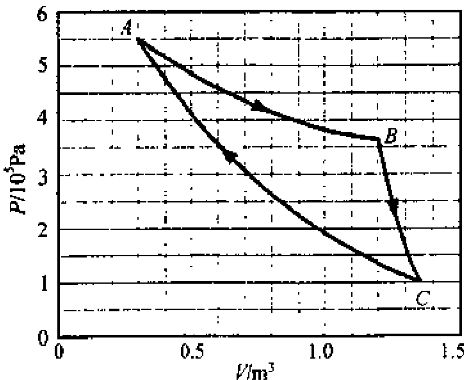


图 20-2

20.16 温度为 12℃,压强为 100kPa,体积为 $20cm^3$ 的单原子气体突然(绝热地)被压缩到 $0.50cm^3$。求这时的压强和温度。

解 理想气体绝热过程方程为

$$P_1V_1^\gamma=P_2V_2^\gamma$$

对于单原子气体,$\gamma=1.67$,所以

$$P_2=P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma=(1.00\times10^5\,N/m^2)\left(\frac{20}{0.5}\right)^{1.67}$$

$$=4.74\times10^7\,N/m^2=47MPa$$

求温度,可以应用 $P_1V_1/T_1=P_2V_2/T_2$,也可应用 $T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_2^{\gamma-1}$

我们用第二个公式计算，并将结果代到第一个公式中验算

$$T_2=T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}=(285\text{K})\left(\frac{20}{0.50}\right)^{0.67}=(285\text{K})(11.8)$$

$$=3.4\times10^3\text{K}$$

将 $T_2=3.4\times10^3$K 代入下式中有

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}$$

$$\frac{(1\times10^5\text{N/m}^2)(20\text{cm}^3)}{285\text{K}}=\frac{(4.74\times10^7\text{N/m}^2)(0.50\text{cm}^3)}{3370\text{K}}$$

得 7000=7000。

20.17 求在 100℃和 400℃之间工作的热机可能的最大效率。

解☞ 效率最高的热机为卡诺热机，效率为

$$1-\frac{T_c}{T_h}=1-\frac{373\text{K}}{673\text{K}}=0.446=44.6\%$$

20.18 一个蒸汽机的锅炉温度为 220℃，冷凝器温度为 35.0℃，输出功率为 8.00hp。其效率为工作在相同温度下卡诺热机的 30%。每秒钟锅炉吸热多少卡？每秒钟排放到冷凝器多少卡？

解☞ 实际效率=(0.30)(卡诺机的效率)

$$=(0.30)\left(1-\frac{308\text{K}}{493\text{K}}\right)=0.113$$

由关系式

$$效率=\frac{对外作功}{吸收热量}$$

有

$$每秒吸收热量=\frac{每秒对外作功}{效率}=\frac{(8.00\text{hp})(746\text{W/hp})\left(\frac{1.00\text{cal/s}}{4.18\text{cal/W}}\right)}{0.113}$$

$$=12.7\text{kcal/s}$$

应用能量守恒可求排放到冷凝器的热量：

$$输入能量=对外作功+排放热量$$

所以

每秒排放热量=每秒输入能量－每秒对外作功

=(每秒输入能量)[1－效率]

=(12.7kcal/s)(1－0.113)=11.3kcal/s

20.19 3000mol(6.00kg)的氢气在标准状况下等压膨胀，体积扩大了一倍。已知 $c_v=10.0$ kJ/kg·K。求(a)气体最后的温度，(b)气体膨胀作功多少？(c)气体内能改变多少？(d)气体吸收了多少热量？

解☞ (a) 由 $P_1V_1/T_1=P_2V_2/T_2$，而 $P_1=P_2$，所以

$$T_2=T_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)=(273\text{K})(2.00)=546\text{K}$$

(b)由于 1kmol 气体在标准状况下体积为 22.4m³，所以有 $V_1=67.2\text{m}^3$。

$$\Delta W=P\Delta V=P(V_2-V_1)=(1.01\times10^5\text{N/m}^2)(67.2\text{m}^3)\doteq6.8\text{MJ}$$

(c)气体等容过程温度升高 273K 需要

$(\Delta Q)_v=c_vm\Delta T=(10.0\text{kJ/kg}\cdot\text{K})(6.00\text{kg})(273\text{K})=16.4\text{MJ}$

这就是 6.00kg 氢气从 273K 升温到 546K 过程中内能的改变量. 所以 $\Delta U=16.4$MJ。

(d)系统按热力学第一定律有

$$\Delta Q=\Delta U+\Delta W=16.4\text{MJ}+6.8\text{MJ}=23.2\text{MJ}$$

20.20 图 20－3 所示系统中，活塞质量为 8.00kg，截面积为 60.0cm²，大气压为 100kPa。当汽缸内气体由 30.0℃升至 100.0℃，活塞上升了 20.0cm。然后固定活塞再将气体冷却到 30.0℃。设加热过程气体吸热为 ΔQ_1，冷却过程气体放热为 ΔQ_2。求 ΔQ_1 与

ΔQ_2 之差。

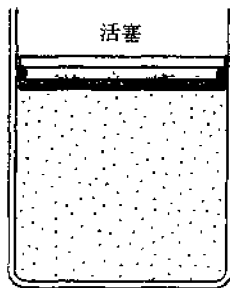


图 20 - 3

解 ☞　在加热过程中气体内能增加 ΔU_1 同时对外作功 ΔW_1。其压强为

$$P=\frac{(8.00)(9.81)\text{N}}{60.0\times10^{-4}\text{m}^2}+1.00\times10^5\text{N/m}^2=1.13\times10^5\text{N/m}^2$$

所以

$$\Delta Q_1=\Delta U_1+\Delta W_1=\Delta U_1+P\Delta V$$

$=\Delta U_1+(1.13\times10^5\text{N/m}^2)(0.200\times60.0\times10^{-4}\text{m}^2)=\Delta U_1+136J$

在冷却过程中，$\Delta W=0$，所以

$$-\Delta Q_2=\Delta U_2$$

注意 ΔQ_2 为放热。最后理想气体又恢复到原来的温度，所以内能相等，故 $\Delta U_2=-\Delta U_1$，或 $\Delta Q_2=\Delta U_1$，即 ΔQ_1 大于 ΔQ_2　136J＝32.5cal。

习　　题

20.21　2.0kg 的金属块(c=0.137 cal/g·℃)从 15℃加热至 90℃。求其内能改变。

(答　86kJ)

20.22　50 g 油(c=0.32 cal/g·℃)由 100℃冷却到 25℃，其内能变化了多少?

(答　－1.2kcal)

20.23　70 g 的金属块初速度为 200cm/s，在桌面上滑动了 83cm 后停止。假设摩擦生成的热量有 75%被金属块吸收，它温度升高多少?（金属的 c=0.106cal/g·℃）

(答　3.4×10^{-3}℃)

20.24　水从 854m 高处落下，若全部能量都用来加热，水温升高多少?

(答　2.00℃)

20.25　功率为 0.250 hp 的电机效率为 75.0%，每小时能产生多少热量?

(答　168kJ)

20.26　质量 100g 的子弹初始温度 20℃，c=0.030cal/g·℃。竖直向上发射，v=420m/s，当它落下来时击中了 0℃的冰。忽略空气阻力，有多少冰熔化?

(答　26 g)

20.27　为测定油的比热容，在量热器中放入 380 g 油，初温 10℃。量热器有加热线圈，消耗 84W 电能并都转化为热能。3.0min 后油温上升到 40℃。若量热器筒以及线圈等效于 20 g 水的热容。求油的比热容。

(答　0.26 cal/g·℃)

20.28　理想气体在恒定压强 2.0 atm 下，体积由 3.0L 膨胀到 30.0L。求对外作的功。

(答　5.5kJ)

20.29　3.0L 的理想气体初始温度为 27℃。由于受热，在常压 2.0 atm 下膨胀，同时温度升高至 227℃。求气体作的功。

(答　0.40kJ)

20.30　理想气体等压膨胀到体积为初始时的三倍，同时对外作功 720 J。(a) 气体吸收了多少热量? (b)求其内能变化。(c) 它的温度如何改变?

(答　(a)零；(b)－720 J；(c) 降低)

20.31　理想气体在常压 P=240 cmHg 下由 250cm³ 膨胀到 780cm³。然后保持体积不变，又冷却至初始温度。求整个过程中净流入系统的热量。

(答　40.4 cal)

20.32　理想气体等温压缩，外界作功 36J，系统散热多少?

(答　8.6 cal)

20.33　空气的定容比热容为 0.175 cal/g·℃。(a) 5.0g 空气从 20℃加热至 400℃，内能变化多少? (b)假设 5.0g 空气绝热压缩，使温度从 20℃升至 400℃，需对它作多少功?

(答　(a) 0.33 kcal；(b) 1.4 kJ，或外界对系统作功为负，记作－1.4kJ)

20.34 水在 1.0 atm 下沸点为 100℃。在这条件下，1.0 g 水的体积为 1.0 cm^3，而 1.0 g 的蒸汽体积为 1670 cm^3。已知汽化热 $L_v=540$ cal/g，求(a)在 100℃下 1.0 g 水转变成蒸汽所作的功和(b)内能增量。

(答 (a) 0.17 kJ；(b) 0.50 kcal)

20.35 3.0 kg 的氦气从－20℃ 升到 80℃。(a)若为等容过程，求气体吸热，作功以及内能增加。(b)若为等压过程呢？已知单原子气体氦，$c_v=0.0357$ cal/g·℃；$c_p=0.0595$ cal/g·℃。

(答 (a) 11kcal，0，45kJ；(b) 18kcal，30kJ，45kJ)

20.36 (a) 单原子气体氩，$c_p=0.125$ cal/g·℃，$\gamma=1.67$，求 c_v。(b)双原子气体一氧化氮 NO，$c_v=0.166$ cal/g·℃，$\gamma=1.40$，求 c_p。

(答 (a) 0.0749 cal/g·℃；(b) 0.232 cal/g·℃)

20.37 初始压强 1.0 atm 的理想气体等温压缩，由 30 L 至 3.0 L。求所作的功。

(答 7.0kJ)

20.38 5 mol 的氖气，$M=20.18$ kg/kmol，$c_v=0.148$ cal/g·℃，$\gamma=1.67$，初始温度 27.0℃，压强 2.00 atm，被绝热压缩到体积只为原来体积的三分之一。求最终的压强、温度以及外界对气体所作的功。

(答 1.27 MPa，626 K，20.4 kJ)

20.39 求图 20－2 中热力学循环中 AB 段气体对外作功。再求 CA 段的情况。只要求一位有效数字。

(答 0.4 MJ，－0.3 MJ)

20.40 求图 20－4 中所示的一个热力学循环中系统作的净功。要求两位有效数字。

(答 2.1 kJ)

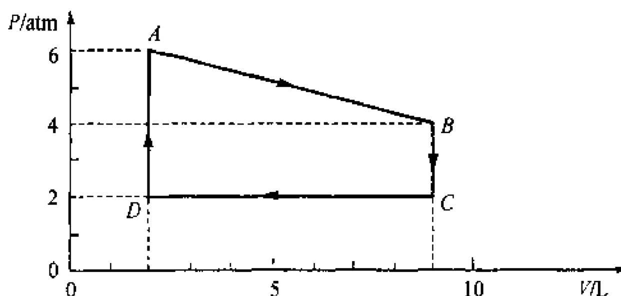


图 20－4

20.41 4 g 气体在汽缸中完成图 20－4 所示的循环。已知在 A 点，气体温度为 400℃。(a)求 B 点处温度。(b)如果从 A 到 B 的过程中气体吸热 2.20 kcal，求 c_v。要求两位有效数字。

(答 (a) 2.0×10^3 K；(b)0.25 cal/g·℃)

20.42 图 20－4 所示的 P-V 图描述了 25.0 g 理想气体的循环。已知在 A 点气体温度为 200℃，$c_v=0.150$ cal/g·℃。求(a) B 点处气体温度，(b) 从 A 到 B 过程中系统内能增量 ΔU，(c)A 到 B 过程对外作功 ΔW 和(d)这一段所吸热量 ΔQ。

(答 (a) 1.42×10^3K；(b) 3.55 kcal＝14.9 kJ；(c) 3.54 kJ；(d)18.4 kJ)

第二十一章　熵与热力学第二定律

热力学第二定律

热力学第二定律的三种等效表述：

(1) 热量自发地从高温物体流向低温物体，反过来却不能。

(2) 连续循环的热机不可能将所吸收的热量全部转化为对外作功。

(3) 如果一个系统发生自发变化，它将按熵增加，至多是熵不变的方式来变化。

热力学第二定律告诉人们系统按什么方式自发地改变状态，而热力学第一定律则是说变化是否可能。第一定律涉及能量守恒，而第二定律涉及能量的耗散。

熵(S)

熵是系统处于平衡态的一种状态变量。这意味着只要系统处于同种平衡态，熵 S 总是相同的。如同 P、V 和 U 一样，熵也是处于平衡态的系统的一种特征。

当热量 ΔQ 进入绝对温度为 T 的系统中，且这个过程是可逆的，则系统的熵改变量为

$$\Delta S=\frac{\Delta Q}{T}$$

在 SI 制中，熵的单位为 J/K。

可逆变化(或过程)是指变化过程中系统的 P、V、T 以及 U 都是完全确定的。如果是可逆过程，当系统回到开始时的状态，P、V、T 以及 U 都恢复至初始值。所谓可逆，过程必须是缓慢的，在整个过程中系统都接近平衡态。

熵的另一种完全等价的定义可以由详细地分析系统中分子的状态得到。如果系统能够有 Ω 种不同的方式(比如不同的分子排列)达到某种状态(即有具体的 P、V、T 和 U)，这个状态的熵就等于

$$S=k_B\ln\Omega$$

式中 ln 为自然对数，k_B 为玻尔兹曼常数。

熵是无序程度的度量

如果只有一种方式达到某种状态(比如只有一种分子排列方式)，这种状态是高度有序的。而通过许多方式都可以达到同一状态，这种状态就比较无序。要把系统的无序程度与一个数字相联系，我们取系统状态的无序度正比于 Ω，Ω 是可以产生这种状态的方式数，因为 $S=k_B\ln\Omega$，所以熵就是无序程度的度量。

由许多分子组成的系统，其自发过程有其方向性，即总是由仅有少数几种方式才能实现的状态到由多种方式均能实现的状态发展。因此，将一个系统孤立起来，它要么保持原来的无序程度不变，要么就增加其无序程度。

最概然状态

最概然状态就是系统熵值最大的状态，即最无序的状态，也即有最多方式可以实现的状态。

例　　题

21.1　20 g 冰熔化为同温度(0℃)的水。熵值变化了多少？

解☞　缓慢加热冰块使之熔化，这是一个可逆的过程。所需热量为

$$\Delta Q = mL_f = (20\text{g})(80\text{cal/g}) = 1600 \text{ cal}$$

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{1600 \text{ cal}}{273\text{K}} = 5.86 \text{ cal/K} = 25 \text{ J/K}$$

注意，熔化使熵（即无序度）增加。

21.2　如图 21-1 所示，汽缸中的理想气体被活塞缓慢压缩，温度保持在 20℃。压缩过程中，活塞对气体作功 730J。求气体熵值的改变。

解☞　由热力学第一定律 $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$

因为是等温过程，系统内能不变，$\Delta U = 0$，所以

$$\Delta Q = \Delta W = -730\text{J}$$

注意，气体被压缩，对外作负功。所以

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{-730\text{J}}{293\text{K}} = -2.49\text{J/K}$$

气体被压缩到较小的体积，无序度减小，所以熵值改变为负值，即熵减小了。

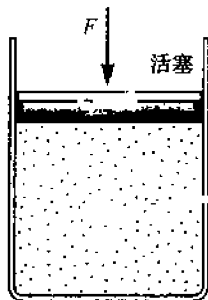


图 21-1

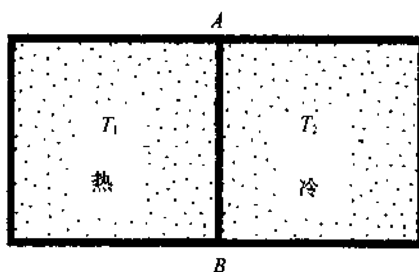


图 21-2

21.3　如图 21-2 所示，容器分为体积相同的两部分。两侧均有质量相等的同种气体，质量均为 0.740 g，$c_v = 745$ J/kg·K。一开始，左侧为 67.0℃，右侧为 20.0℃。容器四壁是绝热的，只有隔板 AB 可以缓慢传热。求左侧气体冷却到 65.0℃时两侧气体的熵变。

解☞　左侧气体失去的热量为

$\Delta Q = mc_v\Delta T = (0.000740 \text{ kg})(745\text{J/kg}\cdot\text{K})(-2.0 \text{ ℃}) = -1.10 \text{ J}$

左侧的气体温度大约为 66℃，所以

$$\Delta S_{左} = \frac{\Delta Q}{T_{左}} \approx \frac{-1.10\text{J}}{(273+66)\text{K}} = -3.2\times10^{-3}\text{J/K}$$

对右侧气体而言，它获得了 1.10J，所以

$$\Delta S_{右} = \frac{\Delta Q}{T_{右}} \approx \frac{1.10\text{J}}{(273+21)\text{K}} = 3.8\times10^{-3}\text{J/K}$$

可见，两侧熵变是不同的，熵增加的量大于熵减少的量。和这个过程的结果相类似，宇宙的总熵值增加了*。

21.4　假设图 21-1 中汽缸内理想气体的 $M = 28$ kg/kmol，质量 $m = 1.5$g，初始条件为 P_1，V_1，T_1。在温度不变情况下气体缓慢膨胀使活塞上升。气体最后达到 P_2，V_2，T_1 的状态，并且 $V_2 = 3V_1$。求气体在膨胀过程中的熵变。

解☞　回忆一下第二十章的内容，理想的气体等温膨胀内能不变，$\Delta U = 0$，所以有

$$\Delta W = \Delta Q = P_1V_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

相应有

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{P_1V_1}{T_1}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{m}{M}R\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

---

* 此观点并没有得到实际观测的证实，也没有被物理学界公认　　中文版责任编辑。

这里我们应用了理想气体方程。代入已知数据得到

$$\Delta S=\left(\frac{1.5\times10^{-3}\text{kg}}{28\text{kg/kmol}}\right)\left(8314\frac{\text{J}}{\text{kmol}\cdot\text{K}}\right)(\ln3)=0.49\text{J/K}$$

21.5 由一金属板隔开的两箱水，一箱87℃，另一箱为14℃。板的传热速率为35 cal/s。求每秒钟系统的熵变。

解 传热过程热水失去熵，冷水得到熵：

$$\Delta S_{热}=\frac{\Delta Q}{T_{热}}=\frac{(-35\text{ cal})(4.184\text{ J/cal})}{360\text{K}}=-0.41\text{J/K}$$

$$\Delta S_{冷}=\frac{\Delta Q}{T_{冷}}=\frac{(35\text{cal})(4.184\text{ J/cal})}{287\text{K}}=0.51\text{J/K}$$

所以每秒钟熵变为0.51 J/K−0.41 J/K=0.10 J/K。

21.6 一个系统由三个硬币组成。每个硬币既可正面朝上，也可反面朝上。求系统有几种不同的方式使得(a)全部正面朝上，(b)两个正面朝上，一个反面朝上，(c)三个反面朝上，(d)两个反面朝上，一个正面朝上。

解 (a)只有一种方式：每个硬币都正面朝上。

(b)三种方式，即硬币反面朝上只有三种选择。

(c)同样只有一种方式。

(d)与(b)类似，三种方式。

21.7 求上题中三硬币系统的熵值：(a)三个正面朝上，(b)两个正面朝上。

解 利用玻尔兹曼关系 $S=k_B\ln\Omega$，Ω 为实现某种状态的方式的数量。$k_B=1.38\times10^{-23}$ J/K

(a) 由于只有一种方式实现状态 a，所以

$$S=k_B\ln1=(1.38\times10^{-23}\text{J/K})(0)=0$$

(b) 由于有三种方式实现状态 b，所以

$$S=(1.38\times10^{-23}\text{J/K})(\ln3)=1.52\times10^{-23}\text{J/K}$$

习　题

21.8 5.00 g 100℃的水，在标准大气压下转变为同温度的蒸汽。求熵变。

(答　7.24 cal/K=30.3J/K)

21.9 300 g的金属($c=0.093$ cal/g·℃) 从90℃冷却到70℃，求熵变。提示：可假设 $T=\frac{1}{2}(T_1+T_2)$。

(答　−6.6 J/K)

21.10 理想气体在不变的温度30℃下体积从2.00 m³ 膨胀到3.00 m³，在这过程中熵增加了47 J/K. (a)在这个过程中气体吸热多少？(b)气体作功多少？

(答　(a) 3.4 kcal; (b) 14 kJ)

21.11 3.0 kg理想气体($M=28$ kg/kmol)，从标准状况开始经历等温压缩过程，使体积为初始时的五分之一。求熵变。

(答　−1.4 kJ/K)

21.12 四张扑克牌都是一面红一面白。(a)只有三张红色朝上和 (b) 只有两张红色朝上，各有几种不同的方式？

(答　(a) 4; (b) 6)

21.13 抛100枚硬币，只有一种方式(即可能性)使得全部正面朝上，有100种可能性为只有一枚反面朝上。而50个正面朝上的可能性约为 1×10^{29}。如果将100枚硬币摆放到一只盒子里，只有一枚为正面朝上。然后摇动盒子，得到有50枚正面朝上的结果。求摆动所产生的硬币系统的熵变。

(答　9×10^{-22} J/K)

第二十二章　波　　动

行波

行波是介质自身维持的扰动，它携带能量与动量从一点传播到另一点。机械波是由所有参与运动的介质粒子所形成的整体现象：波动向前传播，而粒子只在原地附近振动。如图 22-1，手握绳端作正弦振动，而产生的波动沿绳子传播。波又反映出振源位置随时间变化的关系。图中的波动携带能量从振源沿绳子向右传播。能量传播的方向叫作波传播的方向或波线。

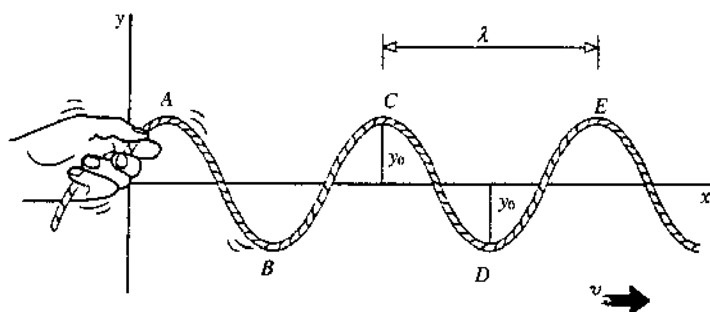


图 22-1

绳上每一点(如 C 点)在垂直于波线的方向作上下振动。振动方向垂直于传播方向的波叫作横波。除了绳子的波动以外，最典型的横波为电磁波——光和无线电波。相反地，声波中介质振动的方向与传播方向平行，这种波叫纵波。有关声波的内容请见下一章。

波动的术语

周期(T)：波动完成一个完整的循环所花的时间叫周期。如图中 A 点处的绳子振动了一个周期又回到 A 点所花的时间。周期即每个循环需要多少秒钟。而频率(f)是每秒钟循环的次数。所以

$$f=\frac{1}{T}$$

若 T 以秒为单位，则 f 以赫[兹](Hz)为单位，$1\text{Hz}=1\text{s}^{-1}$。波动的周期与频率与振动的周期与频率相同。

波动的顶点，如 A 和 C，称为波峰；而最低点，如 B 和 D，则称为波谷。波峰和波谷随时间向右运动，运动的速率 v 即波的速率。

波的振幅为在一个振动周期内粒子扰动的极大值，如图 22-1 中的 y_0。

波长(λ)是波沿传播方向上相应两点间的距离，比如图中的距离 CE。在时间 T 内，波峰以速率 v 向右运动了距离 λ，所以按 $s=vt$，有

$$\lambda=vT=\frac{v}{f}$$

$$v=f\lambda$$

这个关系式对所有波动都成立，并不仅限于绳子的波动。

相位相同和相位相反

波动中介质的两个点如果振动同步调、同方向，就叫作位相相同。如图 22-1 中绳子在 A 点和 C 点的振动就是同步调地上下振动。沿波动方向相距波长的整数倍的点的振动都是同位相的。而绳子的 A、B 两点振动情况则刚好相反，我们说它们的振动相差 180°或相差半个循

环，即为相位相反。

横波的波速

沿一条弦线上传播的横波速率为

$$v=\sqrt{\frac{线的张力}{单位长度线的质量}}$$

驻波

在某些振动频率，系统可能会共振。即系统从振源有效地吸收能量，如图 22-2 所示。与以上所说的行波相比，这些振动模式称为驻波。驻波并不传播能量和动量，所以最好不称之为波动。驻波中稳定不动的点（如 B 和 D）叫波节，而运动最大的点（如 A、C 和 E）叫波腹。相邻波节（或波腹）之间的距离为半个波长 $\frac{1}{2}\lambda$。绳子上相邻波节之间的距离叫一段，一段的长度也是 $\frac{1}{2}\lambda$。

共振的条件

一根绳子要产生共振，其波长必须为一些特定值：即绳长为"段"（即半个波长）的整数倍。波节和波腹的位置受绳的约束，特别是，绳的固定端必须是波节才可以。如图 22-2 所示，要发生共振，绳长 L 与波长 λ 的关系为 $L=n\left(\frac{\lambda}{2}\right)$，$n$ 为整数。由于 $\lambda=vT=v/f$，段长越短，共振频率就越高。图中共振频率 f_1 称为基音频率，而 $f_n=nf_1$ 称为 n 次泛音的频率（或称谐频）。

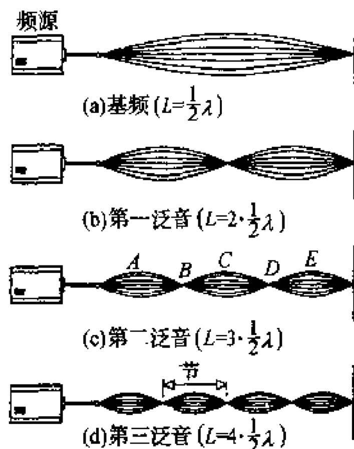


图 22-2

纵波（压缩波）

空气柱，固体棒等沿长度方向的振动会导致纵波。共振时，波节处于固定的位置，如管内空气柱的管底端，棒型物体被夹住的部位等。图 22-2 也用来描述纵波的振动。然而它只图示出波节、波腹的位置而已。分析这类图时，重要的事实是波节和相邻波腹之间的距离为 $\frac{1}{4}\lambda$。

例　　题

22.1 假设图 22-1 中绳子波动频率为 50 Hz，而 $y_0=3.0$ mm，距离 AE 为 40 cm. 求(a)振幅，(b)波长和(c)波速。

解 ☞ (a)由定义，振幅即距离 $y_0=3.0$ mm。

(b) 相邻波峰之间的距离为波长，所以 $\lambda=20$ cm。

(c) $v=\lambda f=(0.20\text{ m})(50\text{ s}^{-1})=10$ m/s

22.2 数据表明，声波在某物质中的波长为 18.0 cm，而频率为 1900 Hz。求声速。

解 ☞ 由 $\lambda=vT=v/f$，所以

$$v=\lambda f=(0.180\text{ m})(1900\text{ s}^{-1})=342\text{ m/s}$$

22.3 质量 1.45 g 的水平杆长度为 5.00 m。已知频率为 120 Hz 的波在杆中传播，波长为 60.0 cm。求杆中的张力。要得到这样大的张力，在杆的端部要加挂多大质量的物体（比如通过滑轮）。

解 ☞　由 $v=\lambda f=(0.600\ \mathrm{m})(120\ \mathrm{s^{-1}})=72.0\ \mathrm{m/s}$

又　　$v=\sqrt{(张力)/(单位长度的质量)}$

所以张力＝(单位长度的质量)v^2

$$=\left(\frac{1.45\times10^{-3}\mathrm{kg}}{5.00\ \mathrm{m}}\right)(72.0\ \mathrm{m/s})^2=1.50\ \mathrm{N}$$

张力应与悬挂端点的物体重力相平衡，即 $F_T=mg$，

$$m=\frac{F_T}{g}=\frac{1.50\mathrm{N}}{9.81\ \mathrm{m/s^2}}=0.153\ \mathrm{kg}$$

22.4　一根 20 m 长的均匀有弹性的缆索竖直悬挂，并从其顶部开始作 7.0 Hz 的振动。若缆索质量为 5.0 kg。求(a)缆索中点横波的速率和(b)那点的波长和频率.

解 ☞　(a) 由 $v=\sqrt{(张力)/(单位长度的质量)}$，缆索中点处承受缆索一半的重量，所以张力为

$$F_T=\frac{1}{2}(5.0\ \mathrm{kg})(9.81\ \mathrm{m/s^2})=24.5\ \mathrm{N}$$

而单位长度质量$=\frac{5.0\ \mathrm{kg}}{20\ \mathrm{m}}=0.25\ \mathrm{kg/m}$

所以

$$v=\sqrt{\frac{24.5\ \mathrm{N}}{0.25\ \mathrm{kg/m}}}=9.9\ \mathrm{m/s}$$

(b) 由于波是沿缆索传播的，波峰不会在某些点聚积起来，所以通过某点的波峰数必然等于通过每一点的波峰波。即频率 7.0 Hz，对缆索每一点都是相同的。

为求中点处的波长，我们应代入刚求得的速率 9.9 m/s，由

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{9.9\ \mathrm{m/s}}{7.0\ \mathrm{Hz}}=1.4\ \mathrm{m}$$

22.5　假设图 22-2 中所示为长度 50.0 cm，质量 0.500 g 的金属丝，其张力为 88.2 N。(a)求丝上横波的波速。(b)求其基音、第一泛音和第二泛音的频率。

解 ☞　(a) $v=\sqrt{\frac{张力}{单位长度的质量}}=\sqrt{\frac{88.2\ \mathrm{N}}{(5.00\times10^{-4}\mathrm{kg})/(0.500\mathrm{m})}}=297\mathrm{m/s}$

(b) 由于驻波的段长为$\frac{\lambda}{2}$，由 $\lambda=vf$ 得到基频：

$\lambda=1.00\mathrm{m}, f=\frac{297\ \mathrm{m/s}}{1.00\ \mathrm{m}}=297\ \mathrm{Hz}$

第一泛音　$\lambda=0.500\mathrm{m}$，

$$f=\frac{297\ \mathrm{m/s}}{0.500\ \mathrm{m}}=594\ \mathrm{Hz}$$

第二泛音　$\lambda=0.333\ \mathrm{m}$

$f=\frac{297\ \mathrm{m/s}}{0.333\ \mathrm{m}}=891\ \mathrm{Hz}$

22.6　一条 2.0 m 的绳子，其末端受振动器驱动，作 240 Hz 的振动，并且形成四段共振。求绳子横波的速率。

解 ☞　由于每个段长为$\frac{\lambda}{2}$，共 4 段，所以有

$$L=4\left(\frac{\lambda}{2}\right),得\ \lambda=\frac{L}{2}=\frac{2.0\ \mathrm{m}}{2}=1.0\ \mathrm{m}$$

由 $\lambda=vT=v/f$　有

$$v=f\lambda=(240\mathrm{s^{-1}})(1.0\ \mathrm{m})=0.24\ \mathrm{km/s}$$

22.7　一根 30 cm 长的琴弦其基频为 256 Hz。若 80 cm 这样的琴弦质量为 0.75 g，求上述琴弦中的张力。

解 ☞　先求速率再求张力。因为在基频条件下，整个琴弦为一段，即

$$\frac{\lambda}{2}=L\ 或\ \lambda=(0.30\ \mathrm{m})(2)=0.60\ \mathrm{m}$$

$$v=f\lambda=(256\ \mathrm{s^{-1}})(0.60\ \mathrm{m})=154\ \mathrm{m/s}$$

单位长度的质量(线密度)为

$$\frac{0.75\times10^{-3}\text{kg}}{0.80\text{ m}}=9.4\times10^{-4}\text{ kg/m}$$

由 $v=\sqrt{(\text{张力})/(\text{线密度})}$ 有

$$F_T=(154\text{ m/s})^2(9.4\times10^{-4}\text{ kg/m})=22\text{ N}$$

22.8 一根绳在频率 460 Hz 时分为五段。(a)求其基频。(b)在什么频率下振动,绳子呈现三段?

解 详细的方法

若绳子分成 n 段,由图 22-2,有 $n\left(\frac{\lambda}{2}\right)=L$,而 $\lambda=v/f_n$,所以 $L=n(v/2f_n)$,即

$$f_n=n\left(\frac{v}{2L}\right)$$

已知 $f_n=460$ Hz,即 460 Hz$=5\left(\frac{v}{2L}\right)$

$$\frac{v}{2L}=92.0\text{ Hz}$$

代入上式得 $f_n=(n)(92.0\text{ Hz})$

(a) $f_1=92.0$ Hz

(b) $f_3=(3)(92.0\text{ Hz})=276$ Hz

另外一种方法

对于两端固定的弦线有 $f_n=nf_1$。已知 $f_5=460$ Hz,所以 $f_1=92.0$ Hz,而 $f_3=276$ Hz。

22.9 一条两端固定的绳子在 420 Hz 和 490 Hz 时产生共振,而其间不发生共振。求这根绳子的基频。

解 一般公式为 $f_n=nf_1$。已知 420 Hz$=f_n$,490 Hz$=f_{n+1}$,所以有

$$420\text{ Hz}=nf_1$$
$$490\text{ Hz}=(n+1)f_2$$

相减得 $f_1=70.0$ Hz。

22.10 一根小提琴弦的基频为 196 Hz。拉琴时若想使其基频变成 440 Hz,请问手指应压在何处。

解 对于基频有 $L=\frac{1}{2}\lambda$,由 $\lambda=v/f$,而 $f_1=v/2L$。初始时弦长 L_1 产生196 Hz基频,即

$$196\text{ Hz}=\frac{v}{2L_1}$$

若使弦的基频为 440 Hz,应有

$$440\text{ Hz}=\frac{v}{2L_2}$$

从两式中消去 v,得到

$$L_1/L_2=196\text{ Hz}/440\text{ Hz}=0.445$$

为了得到 440 Hz 的频率,手指应压在原长度 0.445 的部位。

22.11 一根 60 cm 长的杆,中间夹住,见图 22-3。在其一端有交变力使杆产生纵向振动。其基频为 3.0 kHz。求杆中纵波的波速。

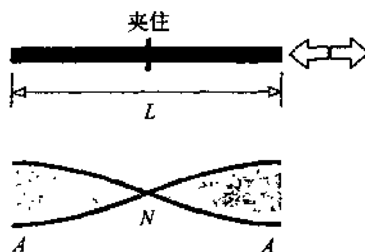


图 22-3

解 由于杆的两端是自由的,所以端面必为波腹,而中点夹紧处为波节。其基频共振图像见图 22-3。而波节到波腹距离为 $\frac{1}{4}\lambda$,可知 $L=2\left(\frac{1}{4}\lambda\right)$。$L=0.60$ m,所以 $\lambda=1.20$ m。

由 $\lambda=v/f$ 有

$$v=\lambda f=(1.20\text{ m})(3.0\text{ kHz})=3.6\text{ km/s}$$

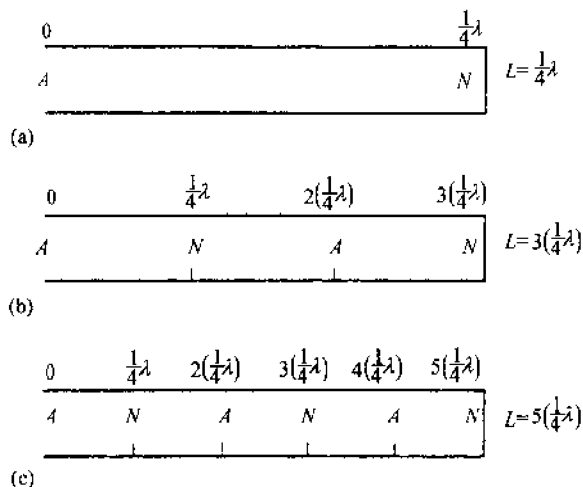


图 22 - 4

22.12 90 cm 长的管子，管底封闭。从管口处输入声波。管内空气有好几个共振频率，其中最低频率为 95 Hz。求空气中的声速。

解 管中气柱共振的示意图见图 22 - 4。波节与相邻波腹之间的距离为 $\lambda/4$。最上边的图对应于共振"段"最长的情况，也即频率最低的情况。所以 $L=\lambda/4$，

$$\lambda=4L=4(0.90\ \text{m})=3.6\text{m}$$

由 $\lambda=vT=v/f$，有

$$v=\lambda f=(3.6\ \text{m})(95\ \text{s}^{-1})=0.34\ \text{km/s}$$

22.13 上题中管中空气柱还有哪些共振频率？

解 图 22 - 4 画出了前几个共振情况。共振时

$$L=n\left(\frac{\lambda_n}{4}\right)$$

式中 $n=1,3,5,7,\cdots$，n 为奇数，而 λ_n 为共振波长。又 $\lambda_n=v/f_n$，即

$$L=n\frac{v}{4f_n}\text{或}\ f_n=n\frac{v}{4L}=nf_1$$

由上题已知 $f_1=95$ Hz，所以相继的共振频率为 0.29 kHz，0.48 kHz，……。

22.14 一根 40 cm 长的金属杆竖直落到木质地板上又弹起，因而杆内产生了包含多种频率的压缩波。若压缩波在杆内的传播速率为 5500 m/s，求杆跳起后产生的压缩波的最低频率。

解 因为杆的两端都是自由的，所以必为波腹所在。其最低共振形态，也即"段"最长的形态，只能有一个波节，在杆的中点，如图 22 - 5 所示。所以有

$$L=2\left(\frac{\lambda}{4}\right)\ \text{或}\ \lambda=2L=2(0.40\ \text{m})=0.80\text{m}$$

由 $\lambda=vT=v/f$

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{5500\ \text{m/s}}{0.80\ \text{m}}=6.9\ \text{kHz}$$

22.15 一根 200 cm 长的杆，在距一端 50 cm 处夹住，见图 22 - 6 所示。在杆的一端用电力驱动，使杆中产生纵波。若驱动频率从很低开始缓慢增加，会发现杆第一次共振的频率为 3 kHz。求杆中声波（压缩波）的速率。

解 由于夹紧点是固定不动的，该处必为波节；而杆的两端都是自由的，必然是波腹。杆以最低的频率共振，其"段"必然为最长。图 22 - 6 就反映出符合这个条件的振动模式。而"段"长为相邻波节间的距离，所以 A 到 N 的距离为半个段长。整个杆为两段的长度。这时的共振模式符合杆振动段长最大的条件，也符合题中对波节和波腹位置的限制。由于一段长为 $\lambda/2$，所以有

$$L=2(\lambda/2)\ \text{或}\ L=\lambda=200\ \text{m}$$

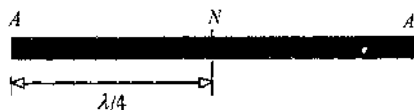


图 22-5

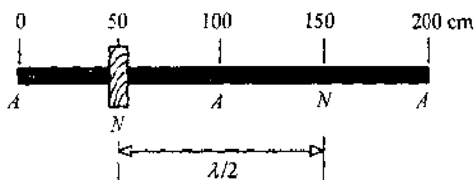


图 22-6

而 $v=\lambda f=(2.00\text{ m})(3\times10^3\text{ s}^{-1})=6\text{ km/s}$

22.16 (a) 一端封闭的管子能对空气中 160 Hz 的振动发生共振，管子最短长度为多少？已知空气中声速为 340 m/s。(b)若管子两端都开口呢？

解 (a) 图 22-4(a)即符合这种情况，管子最短为 $\lambda/4$，即

$$L=\frac{1}{4}\lambda=\frac{1}{4}\left(\frac{v}{f}\right)=\frac{340\text{ m/s}}{4(160\text{s}^{-1})}=0.531\text{ m}$$

(b) 这时管两端开口处为波腹，而中点处为波节，所以

$$L=2\left(\frac{1}{4}\lambda\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{v}{f}\right)=2\,\frac{340\text{ m/s}}{2(160\text{ s}^{-1})}=1.06\text{ m}$$

22.17 有一根 90 cm 长两端开口的管子。另有一根只一端开口的管子。欲使它们具有相同的基频，第二根管子应多长？

解 两根管子以及它们产生共振的模式见图 22-7，可见

$L_o=2\left(\frac{1}{4}\lambda\right)\quad L_c=\frac{1}{4}\lambda$

所以 $L_c=\frac{1}{2}L_0=45\text{ cm}$

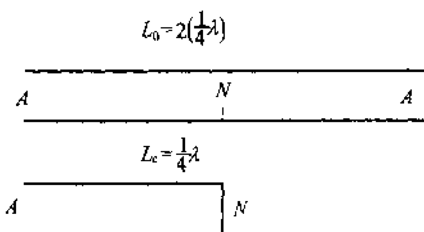


图 22-7

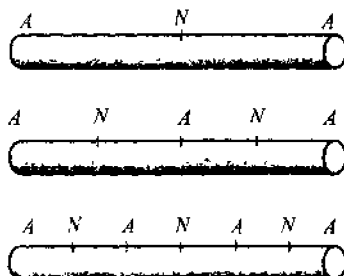


图 22-8

22.18 两端开口的玻璃管长度为 70.0 cm。求什么频率的声波可在管中发生共振？已知空气中声速为 340 m/s。

解 管子的两端开口处必为波腹。空气在管内发生共振的模式由图 22-8 所示。共振波长由下式给出：

$$L=n\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\text{ 或 }\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

式中 n 为整数。又 $\lambda_n=v/f_n$，所以

$$f_n=\left(\frac{n}{2L}\right)(v)=(n)\left(\frac{340\text{ m/s}}{2\times0.700\text{ m}}\right)=243\,n\text{Hz}$$

习 题

22.19 一般人的听觉在 20 Hz 到 20 kHz 之间。试求声波的波长范围，已知空气中声速为 340 m/s。
(答 17 m，1.7 cm)

22.20 某电台广播频率为 760 kHz，无线电波的波速为 3.00×10^8 m/s，求电台无线电波的波长。

(答 395m)

22.21 雷达天线发射波长为 3.4 cm 的无线电波，其速率为 3.00×10^8 m/s。求其频率。

(答 8.8×10^9 Hz＝8.8 GHz)

22.22 一根绳子受到频率为 120 Hz 的驱动而产生波长为 31 cm 的横波．(a)求绳子的波速。(b)若绳子的张力为 1.20 N，长度为 50 cm，求其质量。

(答 (a) 37 m/s；(b) 0.43 g)

22.23 图 22－9 所示的波动是由 60 r/s 的振动器产生的。求波动的(a)振幅，(b)频率，(c)波长，(d)速率和(e)周期。

(答 (a) 3.0 mm；(b)60 Hz；(c) 2.00 cm；(d) 1.2 m/s；(e)0.017 s)

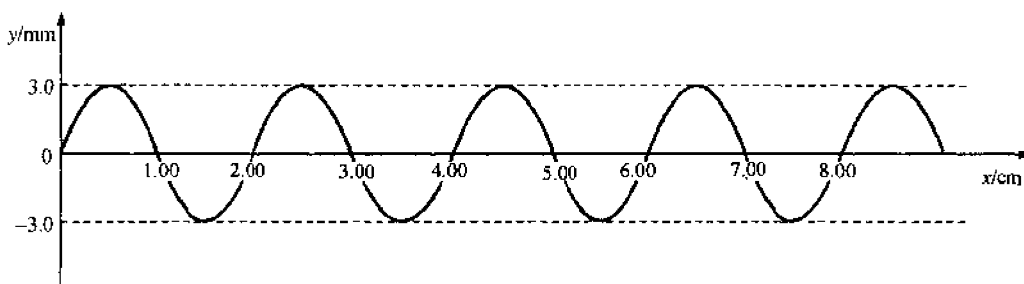


图 22－9

22.24 一根直径 2.4 mm、长 3.0m 的铜线悬挂一 2.0 kg 的物体。如果用铅笔轻轻敲一下铜线使其产生一个横向扰动，求扰动传播的速率。已知铜的密度为 8920 kg/m³。

(答 22 m/s)

22.25 一根 180 cm 长的绳子对应 270 Hz 的横向振动发生共振。整个绳子分为三段。求绳上横波的波速。

(答 32 m/s)

22.26 一根绳子对应 165 Hz 频率发生共振，绳子上出现三段。若要它出现四段，频率应为多少？

(答 220 Hz)

22.27 30 m 长、重量 70 N 的弹性绳固定在两根立柱上，拉力为 2.0 kN。如果横向敲击绳的一端，则会有横波往返于两立柱之间。问往返一次花多长时间？

(答 0.65 s)

22.28 某一根绳在一定张力下振动的基频为 256 Hz。若线长减半，粗细加倍且张力只为原来的四分之一，它的振动基频为多少？

(答 128 Hz)

22.29 钢的密度为 7.80 g/cm³，银的密度为 10.6 g/cm³。有长度、直径和所受张力都相同的一根钢丝和一根银丝，已知钢丝的基频为 200 Hz，银丝的基频为多少？

(答 172 Hz)

22.30 长度 60 cm、质量 3.0 g 的绳子，其横向振动的第一泛音频率为 200 Hz。求绳所受的张力。

(答 72N)

22.31 (a)一根伸展开的弦，要突显其基频，应拨动弦的哪一点？(b)要想突显其第一谐频应先拨动哪一点，然后再按住哪一点？(c)要想突显第二谐频呢？

(答 (a)中点；(b)先拨动距一端四分之一处，然后再按压中心；(c)先拨动距一端六分之一处，然后按压距那端三分之一处)

22.32 一根中点被夹住的铁杆的基频为 320 Hz。它的长度应为多少？已知铁杆内纵向振动的传播速率为 5.00 km/s。

(答 7.81 m)

22.33 一根 120 cm 长的杆中点被夹住，在某处敲击一下发出其第一泛音。请画出示意图并标明波节和波腹的位置，讨论在其他什么位置夹住杆也可产生同样的泛音。

(答 距离任一端 20 cm 处)

22.34 一根 6.0 m 长的金属杆，中点夹住。使其纵向振动，产生的一级谐频与振动频率 1200 Hz 的音叉相一

致。求声音在这金属杆中传播的速率。

（答 4.8 km/s）

22.35 一个圆筒型罐子，要使它显著增强频率为 512 Hz 的音叉的效果，圆筒中空气柱最短应为多少？已知音速为 340 m/s。

（答 16.6 cm）

22.36 一根细长管子内有活塞调节空气柱的长度。缓慢增加空气柱长度，直至管内空气柱为 28 cm 时才与 300 Hz 的音叉共鸣。(a)这时空气中音速是多少？(b)进一步加长气柱长度，下一次又与音叉共鸣时，空气柱应多长？

（答 (a) 0.34km/s; (b) 84 cm）

22.37 一端封闭的风琴管长度为 61.0 cm。若空气中声速为 342 m/s. 该风琴管的前三个泛音的频率是多少？

（答 420 Hz, 700 Hz, 980 Hz）

第二十三章　声　　音

声波

声波是疏密波或称压缩波，在固体、液体或气体中均可产生。当波动物质的疏密变化在 20 Hz 到 20000 Hz 之间时，它们刺激人的耳鼓产生听觉。当频率超过 20000 Hz 时叫作超声，而低于 20 Hz 的声波则叫次声。

声速

对于千摩尔质量为 M 的理想气体，声音传播的速率为

$$v=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

式中 T 为绝对温度，R 为气体常数，而 γ 为气体的比热容比 c_p/c_v。单原子气体 $\gamma=1.67$（如 He、Ne、Ar），双原子气体 $\gamma=1.40$（如 N_2、O_2、H_2）。

在其他介质中压缩波波速为

$$v=\sqrt{\frac{\text{模量}}{\text{密度}}}$$

如果介质呈固体杆的形态，式中为杨氏模量；如果介质呈液态，则为体积模量。

在 0℃的空气中，声速为 331 m/s，且每升高 1℃增加约 0.61 m/s。对应于绝对温度 T_1 和 T_2，声速之间的比值相当精确地由下式给出：

$$\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

声速基本上与压强、频率、波长没有关系。

声强(I)

任何波动的强度都是单位时间通过单位面积的能量。实际上是通过垂直于波传播方向单位面积的功率的平均值。假设 Δt 时间内有能量 ΔE 通过了垂直于传播方向的面积 ΔA，则

$$I=\frac{\Delta E}{\Delta A\Delta t}=\frac{P_{av}}{\Delta A}$$

角标 av 表示平均值。可以证明，如果声波的振幅为 a_0，频率为 f，速率为 v，介质密度为 ρ，则

$$I=2\pi^2 f^2 \rho v a_0^2$$

如果频率以 Hz 为单位，密度以 kg/m^3 为单位，v 的单位为 m/s，a_0（介质分子或原子的最大位移）的单位为 m，则声强 I 的单位为 W/m^2。

响度

引入响度是为了度量人耳对声音大小的感觉。尽管声强大比声强小听起来要觉得更响，但其关系却远非正比例关系。人对声音的感觉大体上正比于声强的对数。然而响度和声强之间的精确关系非常复杂，而且因人而异。

声强级(β)

声强级的规定大体上相当于人耳对声音响度的感觉。其定义有些随意性：声强级为零对应于声强 $I_0=1.00\times10^{-12}\,W/m^2$，是人耳能听到的最微弱的声音。若以分贝为单位，声强级定义为

$$\beta = 10\lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

分贝(dB)为无量纲单位。人耳能分辨出大约相差 1 dB 的声强。

拍

两个频率接近的波动的叠加所产生的强度极大和极小交替分布的现象叫做拍。每秒钟的拍数等于两个叠加波的频率差。

多普勒效应

假设运动着的声源发出声波的频率为 f_s，声波的速率为 v。而声源朝向接收器或观测者运动的速率为 v_s（相对于传播介质而言），再假设观测者朝向声源运动的速率为 v_o（也是相对于介质），则观测者所听到的声音的频率 f_o 为

$$f_o = f_s \frac{v + v_o}{v - v_s}$$

如果声源和观察者向相反方向运动，则公式中的 v_s 和 v_o 要改变符号。

当声源和观测者互相接近时，较之它们静止不动，每秒钟将有较多的波峰到达耳鼓，使耳朵感觉到较声源实际发声更高的频率。当两者远离时，则情况相反，听到声音的频率会偏低。

由于 $v+v_o$ 是波峰相对于观测者的速率，而 $v-v_s$ 为波峰相对于声源的速率，所以上式可表达为

$$f_o = f_s \frac{\text{波峰相对于观测者的速率}}{\text{波峰相对于声源的速率}}$$

干涉效应

两个频率和振幅都相同的波相遇，很容易观察到干涉现象。如果两个波的波峰重合，在重合点就会相互加强而产生更高的强度，我们说这两个波在这点同相。

然而，如果一个波的波峰正好落到另一个波的波谷，两个波刚好相互抵消，在这个点就听不到声音。我们说这两个波在这点反相，或相位差 180°。

如果两个波在某点既不同相，也不反相，而是相差这之间的某一固定的值，也会观察到介于以上两种情况之间的干涉效应。

例　题

23.1 在 6.00 km 处发生的爆炸，要经过多长时间才能听见？设气温为 14.0℃。

解☞ 由于声波每增加 1℃就增加 0.61m/s，所以

$$v = 331\ \text{m/s} + (0.61)(14)\text{m/s} = 340\text{m/s}$$

由 $s=vt$，所以

$$t = \frac{s}{v} = \frac{6000\ \text{m}}{340\ \text{m/s}} = 17.6\ \text{s}$$

23.2 要判断闪电距离我们有多远，有一个粗略的算法：将看到闪电到听见雷声这段时间（以秒为单位）除以 3，这个结果就是闪电到我们之间的距离（以公里为单位）。试证明之。

解☞ 声速 $v \approx 333\ \text{m/s} \approx \frac{1}{3}\ \text{km/s}$，所以距离

$$s = vt = \frac{t}{3}$$

t 为声音传播时间，以 s 为单位，而 s 为距离，以 km 为单位。闪电以光速(3×10^8 m/s)传播是太快了，我们几乎是立即看见闪电。而 t 就等于看见闪电到听见雷声的时间。得证。

23.3 在 27.0℃温度的氖气中声速是多少？已知 $M=20.18$ kg/kmol。

解 氖是单原子气体，$\gamma=1.67$，所以

$$v=\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}=\sqrt{\frac{(1.67)(8314\text{J/kmol}\cdot\text{K})(300\text{K})}{20.18\text{ kg/kmol}}}=454\text{ m/s}$$

23.4 求声音在双原子理想气体中的传播速率。已知气体密度 $\rho=3.50\text{ kg/m}^3$，压强为 215 kPa.

解 已知 $v=\sqrt{\gamma RT/M}$，而 $PV=(m/M)RT$ 所以

$$\frac{RT}{M}=P\frac{V}{m}$$

而 $\rho=m/V$，所以声速为

$$v=\sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}=\sqrt{\frac{(1.40)(215\times10^3\text{Pa})}{3.50\text{ kg/m}^3}}=293\text{ m/s}$$

这里我们应用了双原子气体 $\gamma=1.40$。

23.5 60 cm 长的金属棒被中间夹住。在其基频上与频率为 3.00 kHz 的纵波发生共鸣。已知材料的密度为 8700 kg/m³。求金属的杨氏模量。

解 在题 22.11 中已讨论过这种金属棒，纵波在棒中传播的速率为 3.6 km/s。已知 $v=\sqrt{Y/\rho}$，所以

$$Y=\rho v^2=(8700\text{ kg/m}^3)(3600\text{ m/s})^2=1.1\times10^{11}\text{ N/m}^2$$

23.6 已知水的体积模量为 $2.2\times10^9\text{ N/m}^2$。求水中声速。

解

$$v=\sqrt{\frac{\text{体积模量}}{\text{密度}}}=\sqrt{\frac{2.2\times10^9\text{ N/m}^2}{1000\text{ kg/m}^3}}=1.5\text{ km/s}$$

23.7 某音叉在空气中振动频率为 284 Hz。求在 25℃时音叉发声的波长。

解 由 $v=331\text{ m/s}+(0.61)(25)\text{ m/s}=346\text{ m/s}$

而 $\lambda=vT=v/f$

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{346\text{ m/s}}{284\text{ s}^{-1}}=1.22\text{ m}$$

23.8 当气温为 15℃时，长度不变的风琴管与频率为 224.0 Hz 的声音共鸣。求气温 24℃时其共振频率。

解 在不同温度下其共振波长必定相等，因为它只取决于风琴管的长度。即其波节和波腹的位置必须与管长相配。又 $\lambda=v/f$，所以 v/f 在这两种温度下必须相等。我们有

$$\frac{v_1}{224\text{Hz}}=\frac{v_2}{f_2}\quad \text{即 } f_2=(224\text{Hz})\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

在室温附近，$v=(331+0.61t)\text{m/s}$，t 是摄氏温度。所以

$$f_2=(224.0\text{ Hz})\left[\frac{331+(0.61)(24)}{331+(0.61)(15)}\right]=0.228\text{ kHz}$$

23.9 声强 0.54W/m² 就已令人不悦，求声波中分子的最大位移。已知声音频率为 800 Hz，空气密度为 1.29 kg/m³，声速 340 m/s。

解 由 $I=2\pi^2f^2\rho v a_0^2$

$$a_0=\frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{I}{2\rho v}}=\frac{1}{(800\text{s}^{-1}\pi)}\sqrt{\frac{0.54\text{ W/m}^2}{(2)(1.29\text{ kg/m}^3)(340\text{ m/s})}}$$
$$=9.9\times10^{-6}\text{m}=9.9\mu\text{m}$$

23.10 已知声强为 $3.00\times10^{-8}\text{W/m}^2$。求其声强级为多少分贝(dB)？

解

$$\beta=10\lg\left(\frac{I}{1.00\times10^{-12}\text{ W/m}^2}\right)$$
$$=10\lg\left(\frac{3.00\times10^{-8}}{1.00\times10^{-12}}\right)=10\lg(3.00\times10^4)=10(4+\lg3.00)$$
$$=10(4+0.477)=44.8(\text{dB})$$

23.11 噪声记录仪测得某室内噪音为 85.0 dB。求声强。

解

$$\beta=10\lg\left(\frac{I}{1.00\times10^{-12}\text{W/m}^2}\right)=85.0\text{ dB}$$

$$\lg\left(\frac{I}{1.00\times10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}}\right)=\frac{85.0}{10}=8.50$$

$$\frac{I}{1.00\times10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}}=10^{8.5}=3.16\times10^{8}$$

$$I=(1.00\times10^{-12}\,\mathrm{W/m^2})(3.16\times10^{8})=3.16\times10^{-4}\,\mathrm{W/m^2}$$

23.12 两声波的强度分别 10 和 500 μW/m^2。求它们声强级之差。

解答　设声强为 10 μW/m^2 的为 A，另一个为 B。

$$\beta_A=10\ \lg\left(\frac{I_A}{I_0}\right)=10(\lg I_A-\lg I_0)$$

$$\beta_B=10\ \lg\left(\frac{I_B}{I_0}\right)=10(\lg I_B-\lg I_0)$$

相减得

$$\begin{aligned}\beta_B-\beta_A&=10(\lg I_B-I_0)-10(\lg I_A-I_0)\\&=10\ (\lg I_B-\lg I_A)=10\ \lg\left(\frac{I_B}{I_A}\right)\\&=10\ \lg\left(\frac{500}{10}\right)=10\ \lg 50=(10)(1.70)=17(\mathrm{dB})\end{aligned}$$

23.13 已知一个声源比另一个响 8.0 dB，求它们的强度比。

解答　参见上题，

$$\beta_B-\beta_A=10\ \lg\left(\frac{I_B}{I_A}\right)$$

代入本题数据有

$$8.0=10\ \lg\left(\frac{I_B}{I_A}\right)\quad 或\quad \frac{I_B}{I_A}=10^{0.8}=6.3$$

23.14 一个小型声源均匀地向各方向发出声波。在 2.0 m 以远声强级为 100 dB。求声源的发射功率。

解答　点源发出的能量可以看成通过以点源为中心的球面向外传播的。所以通过一个球面的功率就等于点源的发射功率。已知球面半径为 2.0 m，在这个面上声强级为 100 dB。你可以证明这个声强级对应的声强为 $I=0.010$ W/m^2。即每秒钟通过该球面上每平方米的能量为 0.010 J(译注：原文为 0.010W)。通过整个球面的总功率为 $I(4\pi r^2)$，代入数据得

$$声源总功率=(0.010\ \mathrm{W/m^2})(4\pi)(2.0\mathrm{m})^2=0.50\mathrm{W}$$

注意，即使这样强的声源也只需很小的功率。

23.15 一个打字员在办公室内快速打字所产生的平均声强级为 60.0 dB。若三个打字员同时工作，将产生多少分贝？

解答　设每个打字员打字产生相同的声能，所以三个人工作产生三倍的声能：$I_f=3I_t$

$$\beta_f=\lg\left(\frac{I_f}{I_0}\right)=\lg I_f-\lg I_0$$

$$\beta_t=\lg\left(\frac{I_t}{I_0}\right)=\lg I_t-\lg I_0$$

相减得

$$\beta_f-\beta_t=\lg I_f-\lg I_t$$

$$\beta_f=\beta_t+\lg\left(\frac{I_f}{I_t}\right)=60.0\ \mathrm{dB}+\lg 3=60.5\ \mathrm{dB}$$

可见声强级，由于是对数关系，随打字员人数的增加而缓慢增加。

23.16 汽车以 30 m/s 的速率驶向工厂。工厂汽笛鸣响频率为 500 Hz。(a)若声速为 340 m/s，求司机所听到的汽笛声的频率。(b) 若汽车以相同速率驶离工厂，情况又如何？

解答　(a) $f_o=f_s\dfrac{v+v_o}{v-v_s}=(500\mathrm{Hz})\dfrac{340\mathrm{m/s}+30.0\mathrm{m/s}}{340\ \mathrm{m/s}-0}=544\ \mathrm{Hz}$

(b) $f_o=f_s\dfrac{v+v_o}{v-v_s}=(500\ \mathrm{Hz})\dfrac{340\ \mathrm{m/s}+(-30.0\ \mathrm{m/s})}{340\mathrm{m/s}-0}=456\ \mathrm{Hz}$

23.17 小轿车一边鸣号一边追逐卡车。轿车车速为 20 m/s，鸣号频率为 1200 Hz，卡车车速

为 15 m/s,声速为 340 m/s。求卡车司机所听见的鸣号声的频率。

解☞ $f_o=f_s\frac{v+v_o}{v-v_s}=(1200\ \text{Hz})\frac{340+(-15)}{340-20}=1.22\ \text{kHz}$

23.18 同时敲击两个音叉,会听到每 0.30 s 有一次拍。(a)两音叉频率相差多少?(b)若将一小块口香糖粘在一个音叉的臂上,则每 0.40 s 出现一次拍现象。问这只音叉的频率是比较低的还是比较高的?

解☞ (a) 每秒钟的拍数等于它们的频率差

$$\text{频率差}=\frac{1}{0.30\ \text{s}}=3.3\ \text{Hz}$$

(b) 频率差$=\frac{1}{0.40\ \text{s}}=2.5\ \text{Hz}$

音叉臂上粘上口香糖增加了其质量,从而降低了其振动频率。这又导致了两音叉频率差从 3.3 Hz 降低到 2.5 Hz。所以粘糖这只音叉的频率比另一只要高。

23.19 频率为 400 Hz 的音叉以 2.0 m/s 的速率远离一名观测者同时又朝一面大墙运动。求(a)观测者所听到的未经反射的声音的频率。(b) 所听到经反射后声音的频率。(c)每秒钟能听到几次拍的声音。已知声速为 340 m/s。

解☞ (a) 音叉远离观测者,所以

$$f_o=f_s\frac{v+v_o}{v-v_s}=(400\ \text{Hz})\frac{340\ \text{m/s}+0}{340\ \text{m/s}-(-2.0\ \text{m/s})}=397.7\ \text{Hz}=398\ \text{Hz}$$

(b) 由于音叉向着墙运动,到达墙壁的波峰就彼此更近些。所以反射波听起来好像来自一个正在接近的声源:

$$f_o=f_s\frac{v+v_o}{v-v_s}=(400\ \text{Hz})\frac{340\ \text{m/s}+0}{340\ \text{m/s}-2.0\ \text{m/s}}=402.4\ \text{Hz}=402\ \text{Hz}$$

(c) 每秒钟拍的数目=两声源频率差

$=(402.4-397.7)\ \text{Hz}=4.7\ \text{Hz}$

即每秒钟有 4.7 次拍的声音。

23.20 图 23-1 中 S_1 和 S_2 为两个相同的声源。它们同时发声(同位相)。求 L_1-L_2 为哪些值可在 P 点得到相长干涉,听到较大的声音。

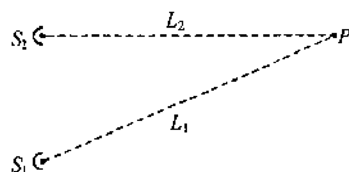


图 23-1

解☞ 如果 $L_1=L_2$,两声源的波到达 P 点所花的时间相等。两个声波的波峰在 P 点重合,得到干涉极大。

如果 $L_1=L_2+\lambda$,S_1 发出的波比 S_2 发出的波落后一个波长。由于波动的周期性,每差一个波长振动完全重复。所以两声波的波峰在 P 点依然重合,得到相长干涉。

推而广之,在 P 点若有 $L_1-L_2=\pm n\lambda$,n 为整数,就得到相长干涉,能听到较大的声音。

23.21 上题中的两声源同相位地振动。当 $L_1=L_2$ 时,在 P 点听到了较大的声音。若随着 L_1 逐渐增加,当 L_1-L_2 为 20.0 cm、60.0 cm 和 100 cm 时,在 P 点听到的声音最弱。求声源的频率。已知声速为 340 m/s。

解☞ 当 S_1 的声波波峰与 S_2 的声波波谷同时到达 P 点时,声音最弱。即 L_1-L_2 等于 $\frac{1}{2}\lambda$、$\lambda+\frac{\lambda}{2}$、$2\lambda+\frac{\lambda}{2}$ 等等。即在 P 点连续两次声音最小时,L_1 增加的距离为 λ。从已知数据得,$\lambda=40.0$ cm。由 $\lambda=v/f$

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{340\ \text{m/s}}{0.400\ \text{m}}=850\ \text{Hz}$$

习 题

23.22 开枪后三秒钟枪手听到回声。求反射物距枪手多远。已知声速为 340 m/s。

(答 510 m)

23.23 求声音在31℃的空气中传播的速率。

(答 0.35 km/s)

23.24 炮弹离膛后5.0 s才听到800 m以远的爆炸声。若温度为20 ℃,求炮弹速率的水平分量。

(答 0.30 km/s)

23.25 在测定声速的实验中,两人A和B相距5.00 km。每人有一个信号枪和一只停表。A见到B的信号后15.5 s听到了枪声。然后A放枪,B在看到信号后14.5 s听到了枪声。求声速以及沿AB连线方向的风速。

(答 334 m/s,11.1 m/s)

23.26 一个圆盘边缘均匀分布着40个洞,盘以1200 r/min的速率旋转。室温为15 ℃,有空气喷嘴对准圆盘喷气。求圆盘发出声音的频率和波长。

(答 0.80 kHz,0.43 m)

23.27 求声音在二氧化碳(M=44 kg/kmol,γ=1.30)中的传播速率。已知压强为0.50 atm,温度为400 ℃。

(答 0.41 km/s)

23.28 声音在某种0℃的气体中传播速率为1260 m/s,已知气体的比热容比γ=1.40,求这种气体的千摩尔质量M。

(答 2.00 kg/kmol,为H_2)

23.29 已知氢气对空气的比重为0.0690,两气体的比热容比γ均为1.40。在标准状况下声音在空气中速率为331 m/s,求氢气中的声速。

(答 1.26 km/s)

23.30 氦是单原子气体,在标准状况下密度为0.179 kg/m^3。求声音在氦气中的传播速率。

(答 970 m/s)

23.31 尺寸为1.00 cm^2×200 cm的杆被中间夹住。它纵向振动的基频与频率为1000 Hz的音叉相一致。当固定其一端,而另一端施加980 N的拉力时,杆被拉长多少?

(答 0.123 m)

23.32 求压缩波在一金属杆中的传播速率。已知材料的杨氏模量为1.20×10^{10} N/m^2,密度为8920 kg/m^3。

(答 1.16 km/s)

23.33 压强增加100 kPa使水的体积减小0.005%。(a)求水的体积模量。(b)水中声速。

(答 (a)2×10^9 N/m^2;(b) 1 km/s)

23.34 声强为5.0×10^{-7} W/m^2。求声强级。

(答 57 dB)

23.35 某人开割草机发出的噪音声强可达2.00×10^{-2} W/m^2。求声强级。

(答 103 dB)

23.36 摇滚乐队在室内演奏很轻易地就高达107分贝。声强是多少?

(答 0.0500 W/m^2)

23.37 耳语的声强级为15 dB。求其声强。

(答 3.2×10^{-11} W/m^2)

23.38 比声强10 μW/m^{2}大3.0 dB的声音,其声强为多少?

(答 20 μW/m^2)

23.39 在标准状况下,若声波的振幅为0.0020 mm,波长为66.2 cm,空气密度为1.293 kg/m^3。求空气中声波的强度。

(答 8.4mW/m^2)

23.40 一个声速发射装置振动频率为8000 Hz,声强级为62 dB,求其振幅。设空气温度为15 ℃,密度为1.29 kg/m^3。

(答 1.7×10^{-9} m)

23.41 一个声音的声强级为75.0 dB,另一个为72.0 dB。将两声音合在一起为多少分贝?

(答 76.8 dB)

23.42 某管风琴发出196.00 Hz的音响。当它与小提琴的G弦合成时,会听到每八秒钟出现十次拍的声音。若将琴弦慢慢拉紧,拍的次数会减少。求琴弦原来的发声频率。

（答　194.75 Hz）

23.43 机车以 30.0 m/s 的速率驶向并经过铁轨旁一行人。汽笛的频率为 2.00 kHz。求(a)机车驶近时，人听到汽笛的频率和(b)远离时的频率。已知声速为 340 m/s。

（答　(a) 2.19 kHz；(b) 1.84 kHz）

23.44 两汽车以同样速率相向而行。一车鸣笛，频率为 3.0 kHz。而另一车的司机却听到 3.4 kHz 的声音。求车速。已知声速为 340 m/s。

（答　21 m/s）

23.45 为检测谐振器振动的速率，将频率为 8000.0 Hz 的声音对准谐振器振动的方向，并接收反射回来的声波。检测器发现反射声波的频率在 8003.1 Hz 和 7996.9 Hz 之间变化。求谐振器振动速率的最大值。已知声速为 340 m/s。

（答　0.132 m/s）

23.46 如图 23-1 所示，两个相同的声源发出同位相的声波，波长为 60 cm。如果 $L_2=200$ cm，当(a)在 P 点听到声音最大或(b)在 P 点听到声音最小时，求 L_1。

（答　(a) $(200\pm60n)$cm，$n=0,1,2,\cdots$ (b) $(230\pm60n)$cm，$n=0,1,2,\cdots$）

23.47 图 23-2 所示，两声源相对发出 $\lambda=80$cm 的声波，并且保持同位相。在 P 点能听到最响的声音。当从 P 走到 Q 时，声音逐渐减弱。(a)若第一次听到最弱的声音，人离 P 多远？(b)若再次听到强音，这时人离 P 有多远？

（答　(a) 20cm；(b) 40cm）

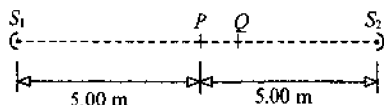


图 23-2

第二十四章 库仑定律和电场

库仑定律

真空中有相距为 r 的两个点电荷 q 和 q'，如果它们的符号相同，就互相排斥；如果符号相反，就互相吸引。这种电荷间的相互作用力就叫库仑力或电场力。库仑定律的形式如下：

$$F_E = k\frac{qq'}{r^2} \quad \text{(在真空中)}$$

在 SI 制中，距离 r 的单位是米，力的单位是牛顿，电荷的单位是库仑(C)。库仑定律中的常数

$$k = 8.988 \times 10^9 \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$$

或者近似等于 $9.0 \times 10^9 \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$。人们经常用 $1/4\pi\varepsilon_0$ 取代 k，其中 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$，叫作真空介电常数。这样，库仑定律的形式就成为

$$F_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2} \quad \text{(在真空中)}$$

如果电荷不在真空中，由于介质极化产生电荷，极化电荷产生的力就会削弱原来两个点电荷之间的作用力。如果介质的相对介电常数为 K，则库仑定律中的 ε_0 就应该代之以 $K_{\varepsilon_0} = \varepsilon$，$\varepsilon$ 叫作介质的介电常数。这时库仑定律就成为

$$F_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qq'}{r^2} = \frac{k}{K}\frac{qq'}{r^2}$$

在真空中，$K=1$，而空气的 $K=1.0006$。

库仑定律也适用于电荷均匀分布的球体或球壳，这时两球心之间的距离 r 应大于这两个球的半径之和。

电荷量子化

人类测量到的电量的最小值记以 e，$e = 1.60218 \times 10^{-19}$ C，称为电荷量子。所有可以分离出来进行测量的自由电荷都是 e 的整数倍。电子带有 $-e$ 的电荷，而质子带有 $+e$ 的电荷。尽管现在有充分的理由相信，夸克带有 $e/3$ 或 $2e/3$ 的电荷。但它们只存在于束缚系统中，而系统的净电荷仍为 e 的整数倍。

电荷守恒

宇宙中的电荷总量(代数和)为一常量。因此，如果产生了一个带 $+e$ 的粒子，在它的附近立即产生了一个带 $-e$ 的粒子；如果一个带 $+e$ 的粒子消失了，在它的附近也立即消失一个带 $-e$ 的粒子。因此，宇宙中的净电量保持不变。

检验电荷

假设一个电荷，其尺寸很小，电量也很小，对周围环境的影响可以忽略，就可以用它来检测系统的电性质。这样的电荷叫检验电荷。

电场

把检验电荷置于空间中某一点，如果它受到电力的作用，就称在这点存在电场。带正电的检验电荷在那点所受电力的方向就是电场在那点的方向。

人们用电场线来形象地描述电场。过某一点的电力线的切线方向即电场在那点的方向。电场线最密集处就表示电场最强。电场线从正电荷发出(因为它排斥带正电的检验电荷)，到负电荷终止(因为它吸引带正电的检验电荷)。

电场强度(E)

空间中某点的电场强度等于带单位正电荷的检验电荷在那点所受到的电场力，因为电场强度是单位正电荷所受到的力。所以它是矢量，其单位为 N/C 或 V/m(见下章)。

如果电荷 q 所在处的电场强度为 $\boldsymbol{E}$，则 q 所受到的力为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}=q\boldsymbol{E}$$

如果 q 为负，则 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{E}}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 方向相反。

点电荷的场强

应用库仑定律可以求点电荷 q 所产生的场强 $\boldsymbol{E}$(其大小和正负)。将点电荷 q' 放在距 q 为 r 的位置，它受到的力为

$$F_{\mathrm{E}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{qq'}{r^2}=q'\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\right)$$

而将点电荷 q' 放在电场为 E 的一点，其受力为

$$F_{\mathrm{E}}=q'E$$

两式相比，可得

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$$

这就是距点电荷 q 为 r 的位置上的电场强度。对于球状电荷也可应用这一公式求它在空间中的电场。如果 q 为正，从 q 径向朝外为 $\boldsymbol{E}$ 的方向；若 q 为负，则相反，$\boldsymbol{E}$ 的方向沿径向指向 q。

叠加原理

一个点电荷受到其他多个电荷的作用力等于所有那些电荷对这一电荷的库仑力的矢量和。同样，若干个电荷在空间某一点产生的电场强度 $\boldsymbol{E}$，等于每个电荷在该点产生的电场强度的矢量和。

例　题

24.1 桌上两硬币相距 1.5m，并带有相同的电荷。若它们各自都受到 2N 的作用力，每个硬币带有多少电量?

解答　由于硬币的直径比起它们之间的距离小得多，可以当成点电荷来处理。按库仑定律

$$F_{\mathrm{E}}=\frac{k}{K}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

式中 K 近似等于 1，所以

$$q_1q_2=q^2=\frac{(2\mathrm{N})(1.5\mathrm{m})^2}{9\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}}=5\times10^{-10}\,\mathrm{C^2}$$

$q=2\times10^{-5}\,\mathrm{C}$　（一位有效数字）

24.2 上题中若两硬币在一个大水槽中相距 1.5 m，而水的相对介电常数为 80，求硬币所带电量。

解答　由库仑定律

$$F_{\mathrm{E}}=\frac{k}{K}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

代人相关数据得

$$q=\sqrt{\frac{F_{\mathrm{E}}r^2K}{k}}=\sqrt{\frac{(2.0\mathrm{N})(1.5\mathrm{m})^2(80)}{9\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}}}=2\times10^{-4}\,\mathrm{C}$$

24.3 氦原子核带电 $+2e$，氖原子核带电 $+10e$，e 为电荷量于。若它们在真空中相距 3.0 纳米($1\ \mathrm{nm}=10^{-9}\ \mathrm{m}$)，求它们之间的相互作用力。

解　原子核的半径在 10^{-10} m 的量级，在本题中可以认为核是点电荷。则

$$F_E=k\frac{qq'}{r^2}=(9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(2)(10)(1.6\times10^{-19}\text{C})^2}{(3.0\times10^{-9}\ \text{m})^2}$$

$$=5.1\times10^{-10}\ \text{N}=0.51\ \text{nN}$$

24.4　按氢原子的玻尔模型，电子($q=-e$)绕质子($q'=e$)在半径 $r=5.3\times10^{-11}$ m 的轨道上旋转。质子对电子的引力提供电子作轨道运动的向心力。求(a)电子与质子间的库仑力和(b)电子的轨道速率。已知电子质量 $m=9.1\times10^{-31}$ kg。

解　(a)　$F_E=k\frac{qq'}{r^2}=(9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(1.6\times10^{-19}\text{C})^2}{(5.3\times10^{-11}\ \text{m})^2}$

$$=8.2\times10^{-8}\ \text{N}=82\ \text{nN}$$

(b) 电子作轨道运动的向心力即(a)中所求的 F_E。所以

$$8.2\times10^{-8}\text{N}=\frac{mv^2}{r}$$

$$v=\sqrt{\frac{(8.2\times10^{-8}\ \text{N})(r)}{m}}=\sqrt{\frac{(8.2\times10^{-8}\ \text{N})(5.3\times10^{-11}\ \text{m})}{9.1\times10^{-31}\ \text{kg}}}$$

$$=2.2\times10^6\ \text{m/s}$$

24.5　三个点电荷在图 24-1 所示的 x 轴上。求作用在$-5\ \mu$C 电荷上的净力。

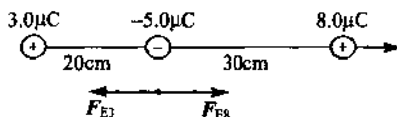


图 24-1

解　$F_{E3}=(9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\cdot\frac{(3.0\times10^{-6}\text{C})(5.0\times10^{-6}\text{C})}{(0.20\text{m})^2}$

$$=3.4\text{N}$$

$$F_{E8}=(9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(8.0\times10^{-6}\text{C})(5.0\times10^{-6}\text{C})}{(0.30\ \text{m})^2}=4.0\ \text{N}$$

在计算中要注意两点：(1)使用正确的单位，如米和库仑；(2)我们只求力的大小，即绝对值，所以没代入电荷的符号。而力的方向标在图中。由图可知，合力大小为

$$F_E=F_{E8}-F_{E3}=4.0\text{N}-3.4\text{N}=0.6\text{N}$$

方向沿 x 轴的正向。

24.6　求真空中两电子之间库仑力与万有引力之比。

解　由库仑定律　$F_E=k\frac{q^2}{r^2}$

由牛顿万有引力定律　$F_G=G\frac{m^2}{r^2}$

所以

$$\frac{F_E}{F_G}=\frac{kq^2/r^2}{Gm^2/r^2}=\frac{kq^2}{Gm}=\frac{(9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.6\times10^{-19}\ \text{C})^2}{(6.67\times10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(9.1\times10^{-31}\ \text{kg})}$$

$$=4.2\times10^{42}$$

可见库仑力比万有引力大得多。

24.7　如图 24-2 所示，质量均为 0.10 g 的两个球携带相等的电量并被长度相等的线悬挂，处在平衡位置。求每个球所带的电量。

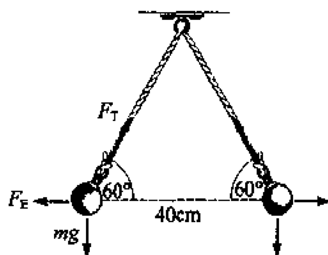


图 24-2

解　先考察左边的球，它在三个力的作用下平衡：(1)线的张力 F_T，(2)重力 mg 和(3)库仑斥力 F_E，小球平衡时有 $\sum F_x=0$ 和 $\sum F_y=0$，即

$$F_T\cos60^\circ-F_E=0 \text{ 和 } F_T\sin60^\circ-mg=0$$

由第二式有

$$F_T=\frac{mg}{\sin 60^\circ}=\frac{(1.0\times10^{-4}\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)}{0.866}=\frac{9.8\times10^{-4}\ \text{N}}{0.866}$$

$$=1.13\times10^{-3}\ \text{N}$$

代入第一式有

$$F_E = F_T\cos 60° = (1.13\times10^{-3}\text{N})(0.50) = 5.7\times10^{-4}\ \text{N}$$

而由库仑定律有

$F_E = k\dfrac{qq'}{r^2}$ 所以

$$q\,q' = q^2 = \frac{F_E r^2}{k} = \frac{(5.7\times10^{-4})(0.40\ \text{m})^2}{9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}$$

解得 $q = 0.10\ \mu\text{C}$

24.8 三个电荷固定在等边三角形的三个顶点上，如图 24 - 3 所示。求作用在 4.0 μC 电荷上的力。

图 24 - 3

解 ☞ 由库仑定律有

$$F_{E2} = k\frac{qq'}{r^2} = (9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\cdot\frac{(2.0\times10^{-6}\text{C})(4.0\times10^{-6}\text{C})}{(0.20\text{m})^2} = 1.8\text{N}$$

$$F_{E3} = k\frac{qq'}{r^2} = (9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\cdot\frac{(3.0\times10^{-6}\text{C})(4.0\times10^{-6}\text{C})}{(0.20\text{m})^2} = 2.7\text{N}$$

作用在 4 μC 电荷上合力的分量为

$$F_{Ex} = F_{E2}\cos 60° - F_{E3}\cos 60° = (1.8-2.7)(0.50)\text{N} = -0.45\text{N}$$

$$F_{Ey} = F_{E2}\sin 60° + F_{E3}\sin 60° = (1.8+2.7)(0.866)\text{N} = 3.9\text{N}$$

$$F_E = \sqrt{F_{Ex}^2 + F_{Ey}^2} = \sqrt{(0.45)^2 + (3.9)^2}\text{N} = 3.9\text{N}$$

合力方向与 y 轴正方向的夹角为

$\arctan(0.45/3.9) = 7°$，所以与 x 轴夹角 $\theta = 97°$。

24.9 两电荷置于 x 轴上：$+3.0\mu\text{C}$ 在 $x=0$ 处，而 $-5.0\mu\text{C}$ 在 $x=40\text{cm}$ 处。问第三个电荷 q 放在什么位置上受力为零？

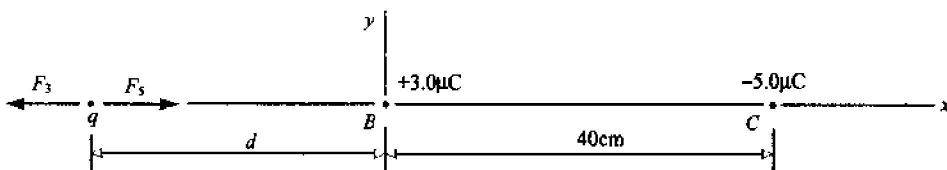


图 24 - 4

解 ☞ 如图 24 - 4 所示，电荷 q 必须放在 x 轴上某处。（为什么?）假设 q 为正电荷。若将它放在两电荷之间的 BC 段，则两电荷对 q 的作用方向相同，不能相互抵消。若把 q 放在 C 点的右侧，则电荷 $-5.0\mu\text{C}$ 的引力总是大于电荷 $+3.0\mu\text{C}$ 的斥力，作用在 q 上的力也不可能为零。只有 q 放在 B 的左侧才可能使 q 受力抵消，合力为零。（你能证明这结论对 q 为负电荷也成立吗?）

将 q 置于如图所示位置，q 受合力为零，有 $F_3 = F_5$。距离以 m 为单位，有

$$k\frac{q(3.0\times10^{-6}\text{C})}{d^2} = k\frac{q(5.0\times10^{-6}\text{C})}{(0.40\text{m}+d)^2}$$

消去 q 和 k 得

$$5d^2 = 3.0(0.40+d)^2 \text{ 或 } d^2 - 1.2d - 0.24 = 0$$

应用二次方程解的公式有

$$d = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1.2\pm\sqrt{1.44+0.96}}{2} = 0.60\pm0.775(\text{m})$$

$d_1 = 1.4\text{m}, d_2 = -0.18\text{m}$。

d_1 为正确解。而对于 d_2，q 要放在 BC 段，两电荷这时对 q 的作用力大小相等，但不能抵消。舍去 d_2 解。

24.10 计算(a)空气中距点电荷 $q_1 = 5.0\times10^{-9}\text{C}$ 为 30cm 处的场强，(b) 置于距 q_1 30cm 处的电荷 $q_2 = 4.0\times10^{-10}\text{C}$ 所受到的力，(c) 置于距 q_1 30cm 处的电荷 $q_3 = -4.0\times$

10^{-10} C 所受到的力(这时没有 q_2).

解答　(a) $E=k\frac{q_1}{r^2}=(9.0\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{5.0\times10^{-9}\text{C}}{(0.30\text{m})^2}=0.50\ \text{kN/C}$

方向从 q_1 指向 q_2。

(b) $F_E=E_{q_2}=(500\text{N/C})(4.0\times10^{-10}\text{C})=2.0\times10^{-7}\text{N}=0.20\mu\text{N}$

方向从 q_1 指向 q_2。

(c) $F_E=E_{q_3}=(500\text{N/C})(-4.0\times10^{-10}\text{C})=-0.20\mu\text{N}$

方向从 q_3 指向 q_1。

24.11　电荷分布如图 24-5 所示。试求(a) P 点处的电场强度,(b) 置于 P 点处电量为 -4.0×10^{-8}C 的电荷所受到的力,(c)在没有 -4.0×10^{-8}C 电荷的情况下,在什么区域内电场为零。

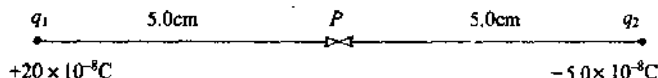


图 24-5

解答　(a) 如果将带正电的检验电荷放在 P 点,带正电的 q_1 向右排斥这个检验电荷;而带负电的 q_2 向左吸引检验电荷。$\boldsymbol{E}_1$ 和 $\boldsymbol{E}_2$ 方向相同,因而可用加法求得合场强的大小:

$$E=E_1+E_2=k\frac{|q_1|}{r_1^2}+k\frac{|q_2|}{r_2^2}=\frac{k}{r_1^2}(|q_1|+|q_2|)$$

代入 $r_1=r_2=0.05$ m,并代入 q_1 和 q_2 的电量绝对值有

$$E=\frac{9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}{(0.050\ \text{m})^2}(25\times10^{-8}\text{C})=9.0\times10^5\ \text{N/C}$$

方向相右。

(b) 置于 P 点的电荷 q 将受 E_q 的作用:

$$F_E=Eq=(9.0\times10^5\text{N/C})(-4.0\times10^{-8}\text{C})=-0.036\text{N}$$

负号表示力指向左。因为电场表示对正电荷的作用,而对于负电荷的作用力当然应与电场方向相反。

(c) 原因分析同题 24.9,因此电场为零的位置应在 -5.0×10^{-8}C 电荷的右侧,令该点到 -5.0×10^{-8}C 电荷的距离为 d,该点处电场为零

$$E_1-E_2=0$$

由于正电荷在这点的电场指向右,负电荷的场指向左,所以有

$$k\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}-\frac{|q_2|}{r_2^2}\right)=(9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\cdot\left[\frac{20\times10^{-8}\text{C}}{(d+0.10\text{m})^2}-\frac{5.0\times10^{-8}\text{C}}{d^2}\right]=0$$

简化得到

$$3d^2-0.2d-0.01=0$$

解得 $d_1=0.10$m 和 $d_2=-0.03$m。只有 d_1 才有意义。即在距负电荷右边 10cm 处的电场为零。

24.12　三个电荷被放置在正方形的三个顶角上,如图 24-6 所示。正方形的边长为 30.0cm。求在第四个顶角处的电场 $\boldsymbol{E}$。在这里若放置一个 6.00μC 的电荷,将受到多大的力?

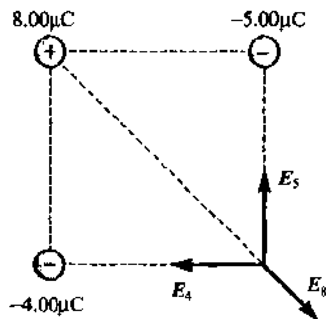


图 24-6

解答　三个电荷在第四个顶角处的电场如图所示。要特别注意它们的方向。它们的大小可由 $E=kq/r^2$ 求得

$$E_4=4.00\times10^5\text{N/C}$$
$$E_8=4.00\times10^5\text{N/C}$$
$$E_5=5.00\times10^5\text{N/C}$$

由于 E_8 矢量与水平方向成 45°角,所以

$$E_x = E_8\cos 45.0° - E_4 = -1.17\times10^5\text{N/C}$$
$$E_y = E_5 - E_8\cos 45.0° = 2.17\times10^5\text{N/C}$$

利用 $E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$ 和 $\tan\theta=E_y/E_x$，得到

$E=2.47\times10^5$N，与 x 轴的角度为 118°。

在这点的电荷受力为 $F_E=E_q$。代入 q 值得 $F_E=1.48$N，方向同电场方向。

24.13 在真空中的两个带电金属板相距 15cm。板间匀强电场 $E=3000$N/C。带负电荷极板表面上 P 点静止释放一电子($q=-e, m_e=9.1\times10^{-31}$kg)。(a)电子到达另一板需多长时间？(b)在到达另一板的瞬间，速率为多少？

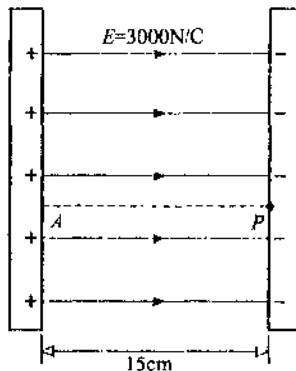


图 24-7

解 图中电场线表明作用在正电荷上的力。即正电荷受带正电的极板的排斥，指向右方的作用，同时又受到带负电极板同样指向右方的吸引力。而电子带负电，受力方向相反，指向左方，其大小为

$F_E=|q|E=(1.6\times10^{-19}\text{C})(3000\text{N/C})=4.8\times10^{-16}$N

由于电场力作用，电子向左作加速运动

$$a=\frac{F_E}{m}=\frac{4.8\times10^{-16}\text{N}}{9.1\times10^{-31}\text{kg}}=5.3\times10^{14}\text{m/s}^2$$

电子在负极板释放朝正极板运动。由运动学：$v_i=0, x=0.15$m，$a=5.3\times10^{14}\text{m/s}^2$。

(a) 由 $x=v_it+\frac{1}{2}at^2$ 有

$$t=\sqrt{\frac{2x}{a}}=\sqrt{\frac{(2)(0.15\text{m})}{5.3\times10^{14}\text{m/s}^2}}=2.4\times10^{-8}\text{s}$$

(b) $v=v_i+at=0+(5.3\times10^{14}\text{m/s}^2)(2.4\times10^{-8}\text{s})=1.30\times10^7\text{m/s}$

在第四十一章，我们将知道，速率高时，相对论效应就逐渐显著了。对高速运动要进行相对论修正。

24.14 假设上题中的电子从 P 点向上射出，速率为 5.0×10^6m/s。当它到达正极板时，竖直向上走了多远？

解 这是抛物问题。由于重力比起电力要小很多，可以忽略。所以惟一作用于电子的力是水平方向的电力。在上题(a)中，我们已经求得电子在电力的作用下运动时间为 $t=2.4\times10^{-8}$s，所以垂直方向位移为

$$(5.0\times10^6\text{m/s})(2.4\times10^{-8}\text{s})=0.12\text{m}$$

即在 A 点上方 0.12m 处击中正极板。

24.15 同样是图 24-7。假设将质子从 A 点射向 P 点，求刚到 P 点的速率。已知质子的电量 $q=+e, m=1.67\times10^{-27}$kg，初速率为 2.00×10^5m/s。

解 $a=\frac{F_E}{m}=\frac{qE}{m}=\frac{(1.60\times10^{-19}\text{C})(3000\text{N/C})}{1.67\times10^{-27}\text{kg}}=2.88\times10^{11}\text{m/s}^2$

这是一个水平运动，$v_i=2.00\times10^5$m/s，$x=0.15$m，$a=2.88\times10^{11}\text{m/s}^2$

由 $v_f^2=v_i^2+2ax$ 有

$v_f=\sqrt{v_i^2+2ax}=\sqrt{(2.00\times10^5\text{m/s})^2+(2)(2.88\times10^{11}\text{m/s}^2)(0.15\text{m})}$

$=356$km/s

24.16 两个相同的金属小球分别带电 q_1 和 q_2。当它们相距 20cm 时，相互之间的斥力为 1.35×10^{-4}N。将小球接触后又分开，同样相距 20cm，这时相互斥力为 1.406×10^{-4}N，求 q_1 和 q_2。

解 由于作用力为斥力，可以肯定 q_1 和 q_2 为同号电荷。两球接触后，电荷重新分布，各自的电荷将为 $\frac{1}{2}(q_1+q_2)$。对接触前后应用库仑定律有

$$0.000135\text{N}=k\frac{q_1q_2}{0.040\text{m}^2}$$

$$0.0001406\text{N}=k\frac{\left[\frac{1}{2}(q_1+q_2)\right]^2}{0.040\text{m}^2}$$

整理得

$q_1q_2=6.00\times10^{-16}\text{C}^2$

$q_1+q_2=5.00\times10^{-8}\text{C}$

解得 $q_1=20\mu\text{C}$ 和 $q_2=30\mu\text{C}$。当然,两个小球也可以都为负电荷。

习　题

24.17 1.0C 的电量相当于多少电子的电量(绝对值)? 这么多电子的总质量为多少?
(答　6.2×10^{18}个,5.7×10^{-12}kg)

24.18 两个各带 1.0C 电量的电荷在空气中相距 1 km。求相互作用力。
(答　9 kN,斥力)

24.19 求相距 1Å(1Å$=10^{-10}$m)的两个自由电子之间的作用力。
(答　23 nN,斥力)

24.20 求相距 1.0nm(10^{-9}m)的两个氩原子核之间的斥力。已知氩原子核带电$+18e$。
(答　75 nN)

24.21 两个带电相等的小球在空气中相距 3cm,其相互斥力为 40μN。求各自的带电量。
(答　2 nC)

24.22 三个点电荷分布在 x 轴上:$+2.0\mu$C,$x=0$;-3.0μC,$x=40$cm;-5.0μC,$x=120$cm。求(a)作用在$-3.0\ \mu$C 上的力和(b)作用在-5.0μC 上的力。
(答　(a) -0.55N; (b) 0.15 N)

24.23 四个电量均为$+3.0\mu$C 的电荷放在边长为 40 cm 的正方形四个顶点。求任一电荷所受的作用力。
(答　0.97N,沿对角线向外的方向)

24.24 四个电量绝对值均为(3.0μC)的电荷放在边长为 40cm 的正方形四个顶点上,一条对角线两端为正电荷,另一对角线两端为负电荷。求作用在负电荷上的电场力。
(答　0.46N,沿对角线向内的方向)

24.25 带电$+2.0\mu$C、$+3.0\mu$C 和-8.0μC 的电荷分别放在边长为 10 cm 的等边三角形的顶点上。求作用在-8.0μC 的电场力的大小。
(答　31N)

24.26 电荷($+5.0\mu$C)放在 $x=0$ 处,另一电荷($+7.0\mu$C)放在 $x=100$cm 处。第三个电荷放在何处,它所受合力为零?
(答　$x=46$cm)

24.27 两个相同的金属小球分别带电+3nC 和−12nC,相距 3m。求(a)电荷之间的吸引力。(b)若将小球接触后又分开 3m*。求这时的相互作用力。
(答　(a) 4×10^{-8}N;(b) 2×10^{-8}N,斥力)

24.28 在 x 轴正向上某点,带电$+6.0\mu$C 的电荷受力 2.0mN。(a)求该电荷所在点的电场(还未放置该电荷时)。(b)若不放$+6.0\mu$C 的电荷,而放-2.0μC 的电荷在该点,电荷受力情况如何?
(答　(a) 0.33 kN/C,沿$+x$方向;(b) 0.67mN,沿$-x$方向)

24.29 点电荷-3.0×10^{-5}C 放在坐标原点。求在 $x=5.0$m 处的电场。
(答　11 kN/C,沿$-x$方向)

24.30 四个绝对值都为(4.0μC)的电荷分布在边长为 20cm 的正方形的四个顶点。求正方形中心处的电场,如果(a)四电荷都带正电,(b)沿周长的顺序依次反号,(c)沿周长顺序依次为正、正、负、负。
(答　(a) 0;(b) 0;(c) 5.1 MN/C,指向两顶点都为负电的那一边)

24.31 质量为 0.200 g 的小球用线悬挂在电场中,电场方向竖直向上,大小为 3.00 kN/C。求小球带电量,如果(a)线的张力为零,(b)为 4.00 mN。

---

*原文为 3cm,这将与答案矛盾——译注。

(答　(a) +653nC; (b) −680 nC)

24.32 质子($q=+e$,$m=1.67\times10^{-27}$kg)放在 0.50 kN/C 的电场中。求质子的加速度为重力加速度的多少倍。

(答　$a=4.8\times10^{10}\mathrm{m/s^2}$,$4.9\times10^9$ 倍)

24.33 质量 0.60 g 的小球带电量为 8.0 μC,用绝缘线悬挂在竖直向下的电场中,$E=300$ N/C。求线的张力,如果小球带(a)正电或(b)带负电。

(答　(a) 8.3mN; (b) 3.5mN)

24.34 如图 24-8 所示,质量 0.60 g 的小球被线悬吊在强度为 $E=700$ N/C 的水平电场中,小球处于平衡状态。求小球带电多少和电性。

(答　−3.1 μC)

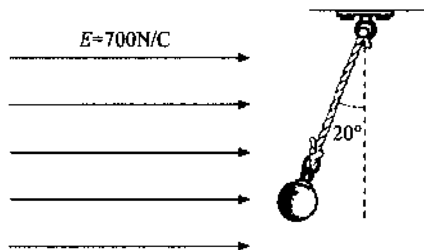


图 24-8

24.35 一电子在匀强电场中沿 x 正方向射出,初速度为 3.0×10^6m/s,运动了 45 cm 后停止。求区域内电场强度的大小和方向。已知电子电量 $q=-e$,质量 $m_e=9.1\times10^{-31}$ kg。

(答　57 N/C,沿 x 正方向)

24.36 在方向朝下的匀强电场区域内,水平地射出一质量为 m、带电量为 $-e$ 的粒子,初速为 v。试求(a)其加速度的水平和竖直分量 a_x 和 a_y。(b)在时间 t 内其水平和竖直方向的位移 x 和 y 以及(c)其运动的轨迹方程。

(答　(a) $a_x=0$,$a_y=Ee/m$;(b)$x=vt$,$y=\frac{1}{2}a_yt^2=\frac{1}{2}(Ee/m)t^2$;(c)$y=\frac{1}{2}(Ee/mv^2)x^2$,为抛物线)

第二十五章　电势和电容

电势差

将单位正电荷从 A 点移动到 B 点，反抗电场力所作的功叫作 A 点与 B 点之间的电势差，记作 V_B-V_A 或 V，其单位称为伏特(V)：

$$1V=1J/C$$

因为功是标量，所以电势差也是标量。和功一样，电势差也有正有负。

将电荷 q 从 A 点移动到 B 所作的功为

$$W=q(V_B-V_A)=qV$$

这里电荷 q 应有适当的正或负的符号。若(V_B-V_A)和 q 符号相同(同为正或同为负)，则所作功为正功。若(V_B-V_A)与 q 符号相反，则功为负。

绝对电势

将单位正电荷从无穷远移动到某一点，反抗电场力所作的功为那一点的绝对电势。所以 B 点的绝对电势即是在无穷远处的 A 点与 B 点之间的电势差。

在真空中距离点电荷 q 为 r 的 P 点，由 q 产生的绝对电势为

$$V=k\frac{q}{r}$$

式中 $k=8.99\times10^9N\cdot m^2/C^2$ 即库仑常数。无限远处($r=\infty$)的绝对电势为零。

根据叠加原理和电势差的标量性质，由若干点电荷在某一点产生的电势为

$$V=k\sum\frac{q_i}{r_i}$$

式中 r_i 为 q_i 到所讨论的那一点的距离。在求和的各项中，正电荷对应项为正值，负电荷对应项为负值。

均匀带电球体在球外或球表面产生的绝对电势为 $V=kq/r$，q 为整个球所带的电量，r 为所讨论的那一点到球心的距离。可见这与全部电量集中在球心时的情况相同。

电势能(PE_E)

将电荷 q 从无穷远移到绝对电势为 V 的某点，必须对这电荷作功，大小为 qV。这个功就好像以电势能(PE_E)的形式贮藏在这个电荷当中了。

同样，在电势差为 V 的两点间移动电荷 q，也必须对它作功，功的大小为 qV。这使得电荷势能改变了 qV。对于正电荷 q，若电势升高，V 为正，则电荷的势能(PE_E)增加；反之，若电势降低，则电荷的势能减少。

电势与电场的关系

假设在某区域存在匀强电场，其方向为 x 的正方向，其大小记为 E_x。由于 E_x 为作用在单位正电荷上的力，所以将单位正电荷移动距离 x 所作的功即为

$$V=E_xx$$

两个大的平行带电金属板之间的电场是匀强电场。因此，相距为 d 的平行板之间的电势差 V 与板间电场强度之间的关系为

$$V=Ed$$

电子伏特

将带电 $+e$（以库仑为单位）的电荷移动到电势升高一伏特的地方所作的功叫一电子伏特（eV）。

$$1\ \mathrm{eV}=(1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C})(1\ \mathrm{V})=1.602\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

等价地

$$\text{功或能(以 eV 为单位)}=\frac{\text{功或能(以 J 为单位)}}{e}$$

电容器

电容器是贮存电荷的装置。它经常（并非绝对）是由两个被绝缘体或电介质分开的导体所组成。电容器的电容量由下式定义

$$\text{电容}=\frac{\text{一个导体带电量的绝对值}}{\text{两导体间的电势差的绝对值}}$$

q 以 C 为单位，V 以 V 为单位，而电容 C 的单位为法拉第（F）。

平行板电容器

两个平行的金属板相距为 d，每个板的面积均为 A，则这个平行板电容器的电容为

$$C=K\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

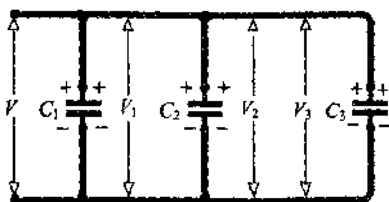
式中 $K=\varepsilon/\varepsilon_0$，为无量纲的介电常数（见上一章），它与极板间的非导体材料性质有关，而

$$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2}=8.85\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

对于真空 $K=1$。所以板间充满电介质时，电容为板间为真空时的 K 倍。这一结论对于任意形状的电容器都成立。

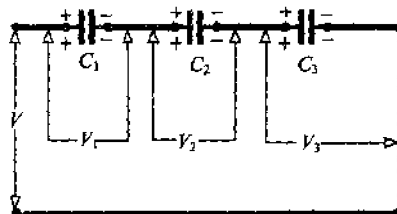
电容器的并联和串联

如图 25－1 所示，电容器并联，总电容为各电容器电容之和。而对于串联，则总电容的倒数为各电容倒数之和。



$$q=q_1+q_2+q_3$$
$$V=V_1=V_2=V_3$$
$$C_{eq}=C_1+C_2+C_3$$

(a)电容器并联



$$q=q_1=q_2=q_3$$
$$V=V_1+V_2+V_3$$
$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}$$

(b)电容器串联

图 25－1

电容器贮能

带电量为 q，电势差为 V，电容为 C 的电容器贮存的电能为

$$\mathrm{PE}_E=\frac{1}{2}qV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

例　题

25.1 在图 25-2 中,金属板间电势差为 40V。(a)哪块板电势较高? (b)将+3.0C 的电量从 B 移动到 A 需作功多少? 从 A 到 B 呢? (c)你怎样确定电场的方向是如图所标出的方向呢? (d)如果板间距离为 5.0mm,求电场 $\boldsymbol{E}$ 的大小。

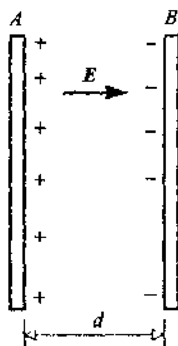


图 25-2

解 (a) 带正电的检验电荷在板间将被 A 板排斥,被 B 板吸引。释放的话,它将从 A 移向 B.所以说 A 板电势较高。

(b) 将电荷 q 在电势差为 V 的两点间移动所作功的大小为 qV,在题中作功为

$$W=(3.0\mathrm{C})(40\mathrm{V})=0.12\mathrm{kJ}$$

由于正电荷受 A 板排斥,所以将+3.0C 的电荷从 B 移动到 A,外力需作正功(−120J);而将它从 A 移动到 B,外力需作负功(−120J)。

(c) 板间的正电荷受力的方向是从 A 指向 B,按定义,这就是电场的方向。

(d) 对于平行板有 $V=Ed$ 所以

$$E=\frac{V}{d}=\frac{40\mathrm{V}}{0.0050\mathrm{m}}=8.0\mathrm{kV/m}$$

注意,在 SI 制中,电场的单位 V/m 和 N/C 是相同的。

25.2 一个电子从一个 12 V 的电池的正极运动到负极需作多少功?

解 从正极到负极经历了电势下降,所以电势差为−12V。于是

$$W=qV=(-1.6\times10^{-19}\mathrm{C})(-12\mathrm{V})=1.9\times10^{-18}\mathrm{J}$$

我们来验证一下,由于电子带负电,一旦被释放,将从负极向正极运动。而题目中是从正极向负极运动,所以外力必须作正功。

25.3 质子在电场中经历了 5 kV 的电势降,损失了多少能量?

解 质子带正电,因此在电场力的作用下时从高电势向低电势运动。当它经历电势差 V 后,势能改变了 Vq。本题中 $V=-5\mathrm{kV}$,所以电势能量改变了

$$Vq=(-5\times10^{3}\ \mathrm{V})(1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C})=-8\times10^{-16}\mathrm{J}$$

25.4 电子由静止开始,经历了 80 V 的电势增加,求最终的速率。

解 正电荷自发地向低电势处运动,而负电荷,如电子,则趋向电势较高的地方。

电势能改变$=Vq=(80\mathrm{V})(-1.6\times10^{-19}\mathrm{C})=-1.28\times10^{-17}\mathrm{J}$

势能的减少量等于动能的增加量

$$1.28\times10^{-17}\mathrm{J}=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}mv_f^2-0$$

$$v_f=\sqrt{\frac{(1.28\times10^{-17}\mathrm{J})(2)}{9.1\times10^{-31}\mathrm{kg}}}=5.3\times10^{6}\mathrm{m/s}$$

25.5 (a)在距带电量为 2.0μC 的点电荷的距离 $r=10\mathrm{cm}$ 和 $r=50\mathrm{cm}$ 处绝对电势是多少? (b)将 0.05μC 的电荷从 $r=50\mathrm{cm}$ 处移动到 $r=10\mathrm{cm}$ 处需作多少功?

解 (a) $V_{10}=k\dfrac{q}{r}=(9.0\times10^{9}\mathrm{N\cdot m^2/C^2})\dfrac{2.0\times10^{-6}\mathrm{C}}{0.10\mathrm{m}}=1.8\times10^{5}\mathrm{V}$

$$V_{50}=\frac{10}{50}V_{10}=36\mathrm{kV}$$

(b) 功$=q(V_{10}-V_{50})=(5\times10^{-8}\mathrm{C})(1.44\times10^{5}\mathrm{V})=7.2\mathrm{mJ}$

25.6 在上题中,假设在 $r=10\mathrm{cm}$ 处释放一个质子,在它经过 $r=50\mathrm{cm}$ 时速率为多少?

解 题意中这两点之间的电势降为

$$1.80\times10^{5}\mathrm{V}-0.36\times10^{5}\mathrm{V}=1.44\times10^{5}\mathrm{V}$$

而质子通过这一电势降所损失的电势能等于所获得的动能 KE,所以

$$\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=qV$$

$$\frac{1}{2}(1.67\times10^{-27}\text{kg})v_f{}^2-0=(1.6\times10^{-19}\text{C})(1.44\times10^5\text{V})$$

解得 $v_f=5.3\times10^6\text{m/s}$。

25.7 在图 25-2 中，令 $E=2.0\text{kV/m}$，$d=5.0\text{mm}$。从 B 板向 A 板以初速率 100km/s 射出一个质子。它即将到达 A 板时速率是多少？

解 由于质子带正电，受到 A 板的排斥，从而运动减速。板间电势差为

$$V=Ed=(2.0\text{kV/m})(0.0050\text{m})=10\text{V}$$

对于质子，由于能量守恒，动能的损失等于电势能的增加：

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2-\frac{1}{2}mv_A{}^2=qV$$

代入 $m=1.67\times10^{-27}\text{kg}$，$V_B=1.00\times10^5\text{m/s}$，$q=1.6\times10^{-19}\text{C}$ 和 $V=10\text{V}$，得到 $v_A=90\text{km/s}$。正如开始分析的那样，质子减速了。

25.8 锡原子核带电 $+50e$。(a)求距核 $r=1.0\times10^{-12}\text{m}$ 处的绝对电势。(b)若一质子从这点释放，当运动到 $r=1.0\text{m}$ 时，质子运动有多快？

解 (a) $V=k\dfrac{q}{r}=(9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\dfrac{(50)(1.6\times10^{-19}\text{C})}{10^{-12}\text{m}}=72\text{kV}$

(b) 质子受到核的斥力作用而朝无穷远处运动。而任一点的绝对电势等于这点与无穷远处的电势差。因此当质子运动到无穷远时电势下降了 72 kV。

通常我们认为离原子核 1.0 m 即为无穷远了。但我们还是代入 $r=1.0$ m 来检验一下：

$$V_{1m}=k\frac{q}{r}=(9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(50)(1.6\times10^{-19}\text{C})}{1.0\text{m}}=7.2\times10^{-8}\text{V}$$

这个值与 72kV 比起来实际上就是零。

当质子运动经历了 72 kV 电势差，所损失的势能等于获得的动能，即

$$\frac{1}{2}mv_f{}^2-\frac{1}{2}mv_i{}^2=qV$$

$$\frac{1}{2}(1.67\times10^{-27}\text{kg})v_f^2-0=(1.6\times10^{-19}\text{C})(72000\text{V})$$

解得 $v_f=3.7\times10^6\text{m/s}$。

25.9 在 x 轴上分布着如下点电荷：$+2.0\mu\text{C}$ 在 $x=20\text{cm}$；$-3.0\mu\text{C}$ 在 $x=30\text{cm}$，$-4.0\mu\text{C}$ 在 $x=40\text{cm}$。求在 $x=0$ 处的绝对电势。

解 电势为标量，所以有

$$V=k\sum\frac{q_i}{r_i}=(9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\cdot\left(\frac{2.0\times10^{-6}\text{C}}{0.20\text{m}}+\frac{-3.0\times10^{-6}\text{C}}{0.30\text{m}}+\frac{-4.0\times10^{-6}\text{C}}{0.40\text{m}}\right)$$

$$=(9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10\times10^{-6}\text{C/m}-10\times10^{-6}\text{C/m}-10\times10^{-6}\text{C/m})=-90\text{kV}$$

25.10 两个等量异号电荷 $+q$ 和 $-q$ 相距为 d。求除了无穷远以外，还有什么地方的绝对电势为零？

解 由题意，绝对电势为零有

$$0=k\frac{q}{r_1}+k\frac{-q}{r_2}\text{或 } r_1=r_2$$

在两电荷的中垂面上的所有位置上都满足上述条件，即绝对电势为零。

25.11 四个点电荷分布在边长 30cm 的正方形的四个顶点。求中心处的电势。(a)若每个电荷都为 $-2.0\mu\text{C}$。(b)两个电荷为 $+2.0\mu\text{C}$，另两个为 $-2.0\mu\text{C}$。

解 (a) $V=k\sum\dfrac{q_i}{r_i}=k\dfrac{\sum q_i}{r}=(9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\dfrac{(4)(2.0\times10^{-6}\text{C})}{(0.30\text{m})(\cos45°)}$

$$=3.4\times10^5\text{V}$$

(b) $V=(9.0\times10^9\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\dfrac{(2.0+2.0-2.0-2.0)\times10^{-6}\text{C}}{(0.30\text{m})(\cos45°)}=0$

25.12 如图 25-3 所示，A 点的电荷为 $+200\text{pC}$，B 点电荷为 -100pC。(a)求 C 点和 D 点处

的绝对电势。(b)将$+500\mu C$的电荷从C迁移到D需作功多少？

解 (a) $V_C=k\sum\frac{q_i}{r_i}=(9.0\times10^9 N\cdot m^2/C^2)$

$$\cdot\left(\frac{2.00\times10^{-10}C}{0.80m}-\frac{1.00\times10^{-10}C}{0.20m}\right)=-2.25V=-2.3V$$

$$V_D=(9.0\times10^9 N\cdot m^2/C^2)\left(\frac{2.00\times10^{-10}C}{0.20m}-\frac{1.00\times10^{-10}C}{0.80m}\right)$$

$$=+7.88V=+7.9V$$

(b) 从C到D电势升高

$$W=Vq=(10.13V)(500\times10^{-6}C)=5.1\ mJ$$

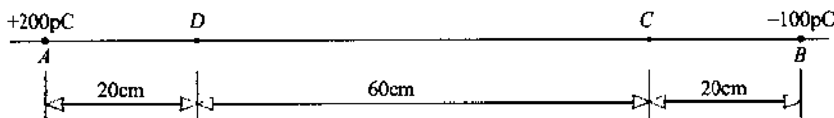


图 25－3

25.13 x轴上有三个点电荷：$+2.0\mu C$，$x=0$；$+3.0\mu C$，$x=20cm$；$+6.0\mu C$，$x=50cm$。求这系统的电势能。取这三个电荷彼此相距很远时，系统的电势能为零。

解 计算将这些电荷由无穷远移到题中规定的位置所作的功，先将$+2.0\mu C$移到$x=0$处。由于周围没有别的电荷，所以这样做不需作功。

然后移动$+3.0\mu C$，它会受到$+2.0\mu C$的排斥。所以将$+3.0\mu C$从无穷远移到它的位置($x=20cm$)就会克服电势差：

$$V_{x=0.2}=k\frac{2.0\mu C}{0.20m}=(9.0\times10^9 N\cdot m^2/C^2)\left(\frac{2\times10^{-6}C}{0.20m}\right)=9.0\times10^4 V$$

所以移动$+3.0\mu C$需作功

$$W_{3\mu C}=qV_{x=0.2}=(3.0\times10^{-6}C)(9.0\times10^4 V)=0.270J$$

最后再将$6.0\mu C$从无穷远移到$x=0.50m$处。由于前两个电荷在该点产生了电势：

$$V_{x=0.5}=k\left(\frac{2.0\times10^{-6}C}{0.50m}+\frac{3.0\times10^{-6}C}{0.30m}\right)=12.6\times10^4 V$$

所以移动$6.0\mu C$所作的功为

$$W_{6\mu C}=qV_{x=0.5}=(6.0\times10^{-6}C)(12.6\times10^4 V)=0.756J$$

将三个电荷都移动到位所作总功即系统贮存的电势能PE_E

$$PE_E=0.270J+0.756J=1.0J$$

你能证明结果与你移动电荷的顺序无关吗？

25.14 开始时两质子相距$5.0\times10^{-12}m$。释放后，它们彼此远离而去。求它们距离很远时的运动速率。

解 初始PE_E将转变成动能KE。按上题的解题程序，距第一个质子为$5.0\times10^{-12}m$处的电势为

$$V=(9.0\times10^9 N\cdot m^2/C^2)\left(\frac{1.60\times10^{-19}C}{5\times10^{-12}m}\right)=288V$$

将第二个质子由无穷远移到这里所作功为

$$W=qV=(1.60\times10^{-19}C)(288V)=4.61\times10^{-17}J$$

这就是系统的初始势能PE_E。由能量守恒初始PE_E=最后KE

$$4.61\times10^{-17}J=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

由于粒子相同，$v_1=v_2=v$，所以当两粒相距很远时，$v=1.7\times10^5 m/s$。

25.15 两个大金属板与一个120V的电池连接，如图25－4所示(金属板在真空中，且实际上比图中所画大得多)。求(a)板间电场E，(b)置于两板间的一个电子所受的力，(c)一电子从B板运动到A板损失的电势能PE_E和(d)电子刚到A板时的速率。

解 (a) E从带正电的A板指向带负电的B板，在板间为匀强分布

$$E=\frac{V}{d}=\frac{120\text{V}}{0.020\text{m}}=6000\text{V/m}=6.0\text{kV/m}$$

方向从左到右。

(b) $F_E=q_E=(-1.6\times10^{-19}\text{C})(6000\text{V/m})$

$=-9.6\times10^{-16}\text{N}$

负号表示 $\boldsymbol{F}_E$ 与 $\boldsymbol{E}$ 方向相反。由于 A 板带正电而吸引电子。电子受力的方向相左。

(c) $\Delta(\text{PE}_E)=Vq=(120\text{V})(-1.6\times10^{-19}\text{C})$

$=-1.92\times10^{-17}\text{J}$

$=-1.9\times10^{-17}\text{J}$

式中 V 是从 B 到 A 的电势增加。

(d) PE_E 损失=KE 增加

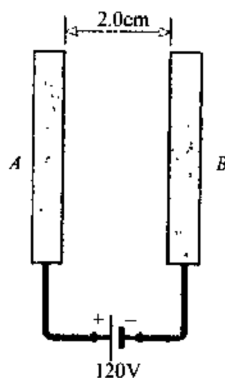


图 25-4

$$1.92\times10^{-17}\text{J}=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$1.92\times10^{-17}\text{J}=\frac{1}{2}(9.1\times10^{-31}\text{kg})v_f^2-0$$

解得 $v_f=6.5\times10^6\text{m/s}$

25.16 两个水平放置的带异号电荷的平行板相距 2.0cm。板间有一质量为 $m=4.0\times10^{-13}\text{kg}$、带电 $q=2.4\times10^{-18}\text{C}$ 的粒子保持静止，如图 25-5 所示。求板间电势差。

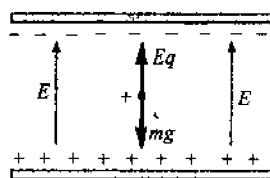


图 25-5

解 由于粒子处于平衡状态，其重力等于向上的电场力。即

$$mg=qE$$

或 $$E=\frac{mg}{q}=\frac{(4.0\times10^{-13}\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)}{2.4\times10^{-18}\text{C}}=1.63\times10^6\text{V/m}$$

对于平行板系统有

$$V=Ed=(1.63\times10^6\text{V/m})(0.020\text{m})=33\text{kV}$$

25.17 一个 α 粒子($q=2e$、$m=6.7\times10^{-27}\text{kg}$)由静止释放经历了 $3.0\times10^6\text{V}$(3.0MV)的电势降。(a)求其动能 KE，以电子伏特为单位。(b)其最终的速率。

解 (a) $\text{KE}=\frac{qV}{e}=\frac{(2e)(3.0\times10^6)}{e}=6.0\times10^6\text{eV}=6.0\text{MeV}$

(b) PE_E 损失=KE 增加

$$qV=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$(2)(1.6\times10^{-19}\text{C})(3.0\times10^6\text{V})=\frac{1}{2}(6.7\times10^{-27}\text{kg})v_f^2-0$$

解得 $v_f=1.7\times10^7\text{ m/s}$

25.18 能量为 400eV 的(a)电子、(b)质子、(c)α 粒子，其速率为多少?

解 粒子的动能为

$$\frac{1}{2}mv^2=(400\text{eV})\left(\frac{1.60\times10^{-19}\text{J}}{1.00\text{eV}}\right)=6.40\times10^{-17}\text{J}$$

分别代人电子、质子和 α 粒子的质量：

$m_e=9.1\times10^{-31}\text{kg}$, $m_p=1.67\times10^{-27}\text{kg}$, $m_\alpha=4(1.67\times10^{-27}\text{kg})$得到它们各自的速率：

(a) 1.186×10^7 m/s, (b) 2.77×10^5 m/s, (c) 1.38×10^5 m/s.

25.19 板间为空气时，电容器 $C=8.0\mu\text{F}$。若板间充以介电常数为 6.0 的介质，其电容 C' 为多少?

解 $C'=KC=(6.0)(8.0\mu\text{F})=48\mu\text{F}$

25.20 一个 300pF 的电容充电到 1.0kV。求这时它的带电量。

解 $q=CV=(300\times10^{-12}\text{F})(1000\text{V})=3.0\times10^{-7}\text{C}=0.30\mu\text{C}$

25.21 绝缘棒上的金属球带电 6.0nC 时，其电势比周围环境高出 200V。求这个球与环境之

间形成的电容器的电容。

解 $C=\frac{q}{V}=\frac{6.0\times10^{-9}\text{C}}{200\text{V}}=30\text{pF}$

25.22 一个 1.2μF 的电容器充电到 3.0kV。求它贮藏的能量。

解 能量$=\frac{1}{2}qV=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}(1.2\times10^{-6}\text{F})(3.0\text{kV})^2=5.4\text{J}$

25.23 如图 25-6，两电容器串联后接 1000V 的电势差。求(a)系统的等效电容 C_{eq}，(b)电容器上带电量，(c)每个电容器上的电势差和(d)系统贮藏的能量。

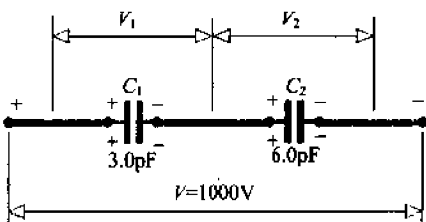


图 25-6

解 (a) $\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{3.0\text{pF}}+\frac{1}{6.0\text{pF}}$

$=\frac{1}{2.0\text{pF}}$

解得 $C_{eq}=2.0\text{pF}$

(b) 电容器串联，每个电容器带电相同，就是串联系统所带的电荷。用(a)的结果有

$$q_1=q_2=q=C_{eq}V=(2.0\times10^{-12}\text{F})(1000\text{V})=2.0\text{nC}$$

(c) $V_1=\frac{q_1}{C_1}=\frac{2.0\times10^{-9}\text{C}}{3.0\times10^{-12}\text{F}}=667\text{V}=0.67\text{kV}$

$V_2=\frac{q_2}{C_2}=\frac{2.0\times10^{-9}\text{C}}{6.0\times10^{-12}\text{F}}=333\text{V}=0.33\text{kV}$

(d) C_1 的能量$=\frac{1}{2}q_1V_1=\frac{1}{2}(2.0\times10^{-9}\text{C})(667\text{V})$

$=6.7\times10^{-7}\text{J}=0.67\mu\text{J}$

C_2 的能量$=\frac{1}{2}q_2V_2=\frac{1}{2}(2.0\times10^{-9}\text{C})(333\text{V})=3.3\times10^{-7}\text{J}=0.33\mu\text{J}$

系统的能量$=(6.7+3.3)\times10^{-7}\text{J}=10\times10^{-7}\text{J}=1.0\mu\text{J}$

最后的结论也可由$\frac{1}{2}qV^2$ 或$\frac{1}{2}C_{eq}V^2$ 得到。

25.24 图 25-7 所示两个电容器并联接到 120V 的电源上，求等效电容 C_{eq}、每个电容器带电量以及系统的带电量。

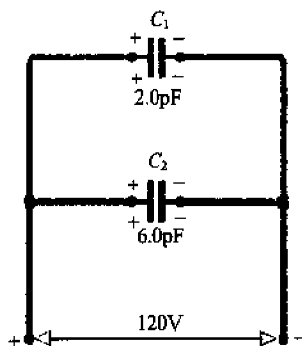


图 25-7

解 对于电容并联有

$C_{eq}=C_1+C_2=2.0\text{pF}+6.0\text{pF}$

$=8.0\text{pF}$

每个电容器两极的电位差均为 120V。所以

$q_1=C_1V_1=(2.0\times10^{-12}\text{F})(120\text{V})$

$=0.24\text{nC}$

$q_2=C_2V_2=(6.0\times10^{-12}\text{F})(120\text{V})$

$=0.72\text{nC}$

而系统带电为 $q_1+q_2=960\text{pC}$，或写作

$q=C_{eq}V=(8.0\times10^{-12}\text{F})(120\text{V})$

$=0.96\text{nC}$

25.25 某平行板电容器的极板面积为 200cm²，间距为 0.40cm，板间介质为空气。(a)求其电容；(b)若电容器接 500V 的电源，求其带电量、贮藏的能量以及板间电场强度；(c)若板间充满介电常数 $K=2.60$ 的液体，电源还要对电容器多充多少电？

解 (a) 对于平行板空气电容器有

$$C=K\epsilon_0\frac{A}{d}=(1)(8.85\times10^{-12}\text{F/m})\frac{200\times10^{-4}\text{m}^2}{4.0\times10^{-3}\text{m}}$$

$$=4.4\times10^{-11}\text{F}=44\text{pF}$$

(b) $$q=CV=(4.4\times10^{-11}\text{F})(500\text{V})=2.2\times10^{-8}\text{C}=22\text{nC}$$

$$能量=\frac{1}{2}qV=\frac{1}{2}(2.2\times10^{-8}C)(500V)=5.5\times10^{-6}J=5.5\mu J$$

$$E=\frac{V}{d}=\frac{500V}{4.0\times10^{-3}m}=1.3\times10^{5}V/m$$

(c) 这时电容值是原来的 $k=2.60$ 倍。所以

$$q=CV=(2.60\times4.4\times10^{-11}F)(500V)=5.7\times10^{-8}C=57nC$$

空气电容器原有电荷 22nC，而 57nC－22nC＝35nC。还有 35nC 的电荷是新增加的。

25.26 两电容器 3.0μF 和 4.0μF 分别由 6.0V 电源充电，然后断开电源，把一个电容器的负极与另一个的正极连接在一起。最后每个电容器上各有多少电荷。

解答 如图 25－8 所示，两电容连接前各自带电为

$$q_3=CV=(3.0\times10^{-6}F)(6.0V)=18\mu C$$

$$q_4=CV=(4.0\times10^{-6}F)(6.0V)=24\mu C$$

当两电容器连到一起时，部分电荷中和，它们最后的电量为

$$q'_3+q'_4=q_4-q_3=6.0\mu C$$

同样，它们两端的电势差也改变了。由

$V=q/C$ 得到

$$\frac{q'_3}{3.0\times10^{-6}F}=\frac{q'_4}{4.0\times10^{-6}F}或\ q'_3=0.75q'_4$$

代入前边的方程有

$$0.75q'_4+q'_4=6.0\mu C\ 或\ q'_4=3.4\mu C$$

解得

$$q'_3=0.75q'_4=2.0\mu C$$

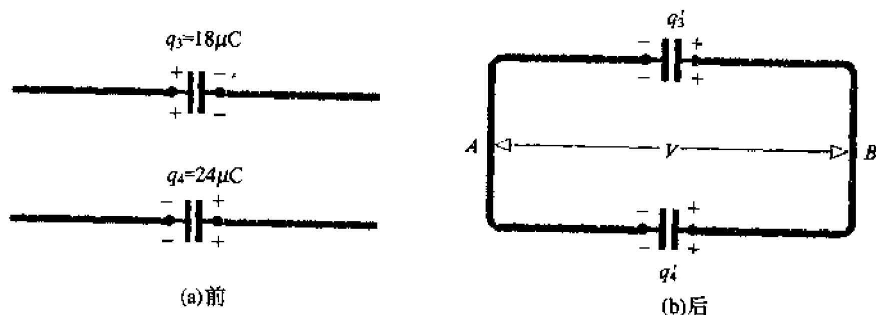


图 25－8

习　题

25.27 两个金属板分别与 1.50V 的电池两极连接。将＋5.0μC 的电荷(a)从负极移到正极或(b)从正极移到负极，需作功多少？

(答　(a)7.5μJ；(b)－7.5μJ)

25.28 上题中的金属板处在空气中。负极板上的一个电子($q=-e,m_e=9.1\times10^{-31}kg$)被释放，便飞向正极板。问电子刚到达正极板时速率是多少？

(答　$7.3\times10^{5}m/s$)

25.29 在 1.0MV 的电势差作用下，一个质子($q=+e,m_p=1.67\times10^{-27}kg$)从静止开始作加速运动，求它的末速率。

(答　$1.4\times10^{7}m/s$)

25.30 真空中电子枪向 4.0mm 以远的金属板发出电子。板的电势比电子枪低 5.0V。若要使电子能达到金属板，电子的初速率应不低于多少？

(答　$1.3\times10^{6}m/s$)

25.31 两个平行金属板间距 3.0mm，电势差为 120V。求板间电场。

（答　40kV/m，朝向负板）

25.32　一电子以 5.0×10^5 m/s 的速率射出，方向与 3.0kV/m 的匀强电场相平行。问电子在停止前能走的距离为多少？

（答　2.4cm）

25.33　两块平行金属板间电势差为 24kV，电场方向相下。板间距为 1.8cm。若质量为 2.2×10^{-13} kg 的油滴能在板间保持静止，求油滴的带电量。

（答　1.6×10^{-18}C$=10e$）

25.34　求空气中距点带电量为 500μC 的点电荷 3.0cm 处的绝对电势。

（答　15kV）

25.35　求距氦核($q=+2e$)1.0nm 远处电场的大小以及绝对电势。若质子在这里，它具有多少电势能？

（答　2.9×10^9N/C，2.9V，4.6×10^{-19}J）

25.36　真空中分别带有 0.20μC 和 3.0μC 电量的两点电荷相距 30cm。若将 0.20μC 电荷向 3.0μC 电荷靠近到 18cm，需作功多少？

（答　0.027J）

25.37　点电荷+2.0μC 放在 x 轴原点。第二个点电荷－3.0μC 放在 $x=100$cm 处。x 轴上哪一点的绝对电势为零？

（答　$x=40$cm 和 $x=-0.20$m）

25.38　在上题中，求 A、B 两点间的电势差。A：$x=0.1$m，B：$x=0.9$m。哪一点电势较高？

（答　4×10^5V，A 点）

25.39　一电子以 5.0×10^6 m/s 的初速沿 x 轴正向运动，在此方向的电场为 3.0kV/m。求电子运动 1.00cm 后的速率。

（答　3.8×10^6 m/s）

25.40　电子经过 A 点时速率为 6.0×10^5 m/s，而沿直线到达 B 点时速率为 12×10^5 m/s. 求 A、B 两点间的电势差。A、B 中哪点的电势较高呢？

（答　3.1V，B）

25.41　极板间是空气的电容器，电容为 3.0μF。若改充介电常数为 2.8 的石蜡，电容为多少？

（答　8.4μF）

25.42　0.050μF 的电容器，当板间电势差为 200V 时，带电荷多少？

（答　10μC）

25.43　一电容器充电 9.6nC 时板间电势差为 120V。求其电容以及贮藏的能量。

（答　80pF，0.58μJ）

25.44　求 60pF 电容器在下面两种情况下的贮能(a)当它充电到电势差 2.0kV 和(b)当每个极板带电 30nC 时。

（答　(a) 12mJ；(b) 7.5μJ）

25.45　三个 120pF 的电容都充电到 0.50kV 后串联。求(a)最靠外的两极板之间的电势差。(b)每个电容器所带电荷和(c)系统贮能。

（答　(a)1.5kV；(b)60nC；(c)45μJ）

25.46　三个电容(2.00μF、5.00μF 和 7.00μF)串联。求其等效电容。

（答　1.19μF）

25.47　三个电容(2.00μF、5.00μF 和 7.00μF)并联。求其等效电容。

（答　14.00μF）

25.48　上面两题中的组合电容器再串联起来，这时它们的等效电容为多少？

（答　1.09μF）

25.49　将 0.30μF 和 0.50μF 两电容并联。(a)求其等效电容。这时给这组合电容器充电 200μC。(b)求两端电势差。(c)两个电容各带多少电荷？

（答　(a)0.80μF；(b)0.25kV；(c)75μC，0.13mC）

25.50　一个 2.0μF 的电容器充电到 50V，另一个 4.0μF 的电容器充电到 100V 后，将二者并联。求(a)每个电容器带有的电荷。(b)每个电容器的电势差为多少？

（答　(a) 0.17mC，0.33mC；(b)83V）

25.51 上题中若是一个电容器的正极板连接另一个的负极板，情况又如何？

(答　(a) 0.10mC，0.20mC；(b)50V)

25.52 (a)若电容器两极板充满 0.50cm 厚的石蜡层，每块板的面积都为 $80cm^2$，求其电容。石腊的介电常数为 2.0。(b)若电容器与一个 100V 的电源相连接。求它所带电荷以及贮藏的能量。

(答　(a)28pF；(b)2.8nC，0.14μJ)

第二十六章　电流、电阻和欧姆定律

电流(I)

在某区域内若有净电荷从一点迁移到另一点，我们说在此区域内存在电流。假设电荷沿一导线迁移。在时间 t 内，有电量 q 通过了导线的某一截面，则通过导线的电流为

$$I=\frac{q}{t}$$

式中 q 以 C 为单位，t 以 s 为单位，电流 I 的单位为安培(A)，1A＝1C/s。按习惯，以正电荷流动的方向为电流的方向。这样，电子流向右边就对应着电流流向左边。

电池

电池在使用中相当于电能的源。电池内若没有能量损耗，则电池两极间的电势差(见上一章)就叫电池的电动势(emf)。如果没有另外说明，我们就假定电池两极间的电势差等于电池的电动势。电动势的单位同电势差，均为伏特(V)。

电阻(R)

要在导线或其他导体中流经一安培的电流，必须在导体两端保持多大的电势差，即为这段导体的电阻：

$$R=\frac{V}{I}$$

电阻的单位为欧姆，用希腊字母 Ω 表示之。

$$1\Omega=1\text{V/A}$$

欧姆定律

欧姆定律原本包含两部分。第一部分即为电阻的定义方程：$V=IR$。人们经常把这个方程叫作欧姆定律。此外，欧姆当时还指出电阻 R 是与电势差 V 以及电流 I 无关的常数。这个定律的后一部分只是近似正确。

关系式 $V=IR$ 对任何电阻器都是适用的，式中 V 为电阻器两端的电势差，I 为流经该电阻器的电流，而 R 为在这些条件下电阻器的电阻。

电阻的测量

将待测电阻与一个电流表(也称安培表)和一个电池串联起来形成电路。其电流由低内阻的电流表测出。再用一个高内阻的电压表(也称伏特计)接到待测电阻两端，即与之并联，就可测出电阻两端的电势差。按欧姆定律，$R=V/I$，将电压表读数除以电流表读数，即得到电阻器的阻值。如果要精确地求电阻值，还必须考虑到电流表和电压表的内阻影响。

端电压(端电势差)

电源(电池或发电机)的端电压与其电动势 $\mathscr{E}$、内阻 r 以及电路电流 I 有关：

(1) 放电时产生电流，端电压等于电动势减去内阻上的电压降：

$$V=\mathscr{E}-Ir$$

(2) 充电时，端电压等于电动势加内阻上的电压降：

$$V=\mathscr{E}+Ir$$

(3) 没有电流时,端电压等于电动势。

电阻率

长度为 L、横截面积为 A 的一段导线的电阻为

$$R=\rho\frac{L}{A}$$

式中的系数 ρ 为电阻率。它是导线材料的特性。若 L 的单位为 m,A 的单位为 m^2,而 R 的单位为 Ω,则 ρ 的单位为 Ω · m。

电阻与温度的关系

若一段导线在温度 T_0 时电阻为 R_0,则在温度 T 时的电阻 R 为

$$R=R_0+\alpha R_0(T-T_0)$$

α 为导线材料的电阻温度系数。通常 α 本身也随温度变化,所以上式只对较小的温度区间成立。α 的单位为 K^{-1} 或 $℃^{-1}$。

电阻率与温度的关系形式上与上述方程完全相同。若 ρ_0 和 ρ 分别为 T_0 和 T 温度下的电阻率,则

$$\rho=\rho_0+\alpha\rho_0(T-T_0)$$

电势的改变

电流 I 通过电阻器 R,按欧姆定律,电阻器两端的电势差为 IR。电流进入电阻器的那一端为高电势端,也常叫高电位端。电阻器中的电流永远是从高电位流向低电位的。

如果电池的内阻可以忽略不计的话,电池的正极永远是高电位端,不管通过电池的电流是什么方向。

例　题

26.1 电流强度 $I=0.5A$ 的恒定电流通过一段导线。求一分钟内有多少电荷流经这段导线。

解 由 $I=q/t$,我们有

$$q=It=(0.50A)(60s)=30C$$

(记住,1A=1C/s)

26.2 通过一个电灯泡的电流为 0.75A。每秒钟有多少电子经过这个电灯泡?

解 由 $I=q/t$,即每秒钟经过灯泡的电量。

$$q=It=(0.75A)(1.0s)=0.75C$$

一个电子带电量为 $e=1.6\times10^{-19}C$,所以

$$电子数=\frac{电量}{一个电子带电量}=\frac{0.75C}{1.6\times10^{-19}C}=4.7\times10^{18}$$

26.3 某电灯发光时电阻为 240Ω。在正常电压 120V 下(译注:美国等国的市电为 120V,而我国为 220V),经过灯泡的电流为多少?

解 $I=\frac{V}{R}=\frac{120V}{240\Omega}=0.500A$

26.4 电加热器接 110V 电压时电流为 5.0A,求其电阻。

解 $R=\frac{V}{I}=\frac{110V}{5.0A}=22\Omega$

26.5 一电热板加热时电阻为 24Ω,电流为 5.0A,求它两端的电压降。

解 $V=IR=(5.0A)(24\Omega)=0.12kV$

26.6 在图 26-1 所示的电路中,电流大小和方向都已标出。求如下两点间的电势差,并说明

哪一点电势较高：(a) A 和 B，(b) B 和 C，(c) C 和 D，(d) D 和 E，(e) C 和 E，(f) E 和 C。

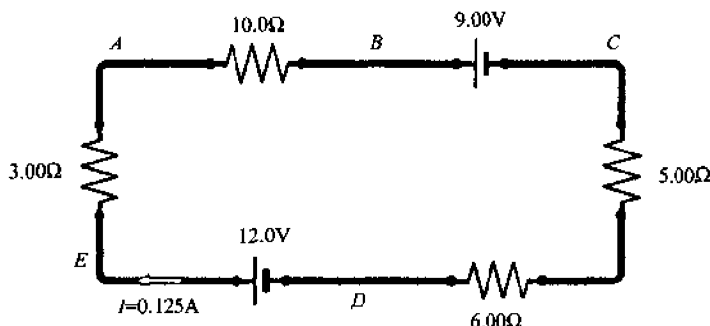


图 26－1

解 先复习以下事实：(1)因为串联电路中电荷没有其他通道，所以电路中各点的电流都相同。(2)电流从电阻器的高电位端流向低电位端。(3)电池电动势的正极(在符号"‖"中较长的线段所示)总是高电位端。

(a) $V_{AB}=-IR=-(0.125A)(10.1\Omega)=-1.25V$；$A$ 点电势高。

(b) $V_{BC}=-\mathscr{E}=-9.00V$；$B$ 点电势高。

(c) $V_{CD}=-(0.125A)(5.00\Omega)-(0.125A)(6.00\Omega)=-1.38V$；$C$ 点电势高。

(d) $V_{DE}=+\mathscr{E}=+12.0V$；$E$ 点电势高。

(e) $V_{CE}=-(0.125A)(5.00\Omega)-(0.125A)(6.00\Omega)+12.0V=+10.6V$；$E$ 点电势高。

(f) $V_{EC}=-(0.125A)(3.00\Omega)-(0.125A)(10.0\Omega)-9.00V=-10.6V$；$E$ 点电势高。

注意，(e)和(f)的答案是一致的。

26.7 3.0A 的电流经过图 26－2 所示的线路。若将电压表接如下两点：(a)A 和 B，(b)A 和 C，(c)A 和 D，电压表的读数各是多少？哪一点电势较高？

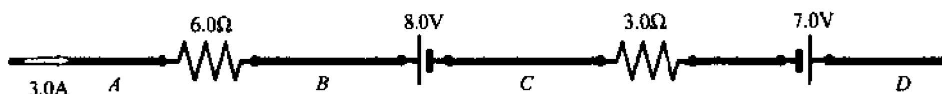


图 26－2

解 (a)由于流经电阻器的电流总是从高电势"下坡"流向低电势，所以 A 点电势高。从 A 到 B 电势降落 $IR=(3.0A)(6.0\Omega)=18V$。电压表的正极接 A，负极接 B，读数应为－18V。

(b) 从 B 到 C 即从电池的正极到负极，电势降落 8.0V。而由(a)知，从 A 到 B 已降落 18V，所以从 A 到 C 电势降落 26V。按(a)所说接线，电压表读数为－26V。

(c) 从 C 到 D，经历一个电阻，电势降落 $IR=(3.0A)(3.0\Omega)=9.0V$。而后又从电池的负极到正极，电势增加 7.0V，所以从 A 到 D 电压表读数为

$$-(18V+8.0V+9.0V-7.0V)=-28V$$

26.8 上题中的 3.0A 电流若是从右到左，情况如何？

解 分析过程同上，

(a) $V_{AB}=18V$，B 点电势高。

(b) $V_{AC}=10V$，C 点电势高。

(c) $V_{AD}=26V$，D 点电势高。

26.9 干电池的电动势为 1.52V。当 25A 的电流通过时，其端电压为零。求内阻。

解 电池等效于一个纯电动势串联一个电阻 r，如图 26－3 所示，由题意，电池两端 A 和 B 之间的电势差为零，所以

$$0=+\mathscr{E}-Ir \text{ 或 } 0=1.52V-(25A)r$$

解得 $r=0.061\Omega$

26.10 一直流发电机的电动势为120V，即没有电流时，其端电压为120V。当输出20A电流时，端电压为115V。(a)求内阻。(b)若输出40A电流，电动机的端电压为多少？

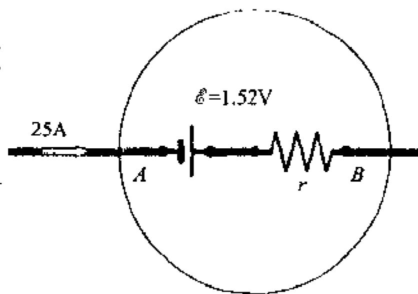


图26-3

解 本题很像图26-3的情况。这时$\mathscr{E}=120V$，而I不再是25A。

(a) 这时$I=20A$，端电压从A到B为115V

$$115V=+120V-(20A)r$$

解得$r=0.25\Omega$

(b) 这时$I=40A$，

端电压$=\mathscr{E}-Ir=120V-(40A)(0.25\Omega)=110V$

26.11 用图26-4的电路，用电流表和电压表测未知电阻的阻值。若电流表读数为0.3A，电压表读数为1.50V，求电阻。假设电表都是理想的。

解 $R=\dfrac{V}{I}=\dfrac{1.50V}{0.3A}=5\Omega$

26.12 某金属的电阻率为$1.76\times10^{-8}\Omega\cdot m$，计算长2m、直径8mm的这种金属杆的电阻。

解 $R=\rho\dfrac{L}{A}=(1.76\times10^{-8}\Omega\cdot m)\cdot\dfrac{2m}{\pi(4\times10^{-3}m)^2}=7\times10^{-4}\Omega$

26.13 10号铝导线的直径为2.59mm，$\rho=2.8\times10^{-8}\Omega\cdot m$，多长的10号铝线的电阻为1.0Ω？

解 从$R=\rho L/A$有

$$L=\frac{RA}{\rho}=\frac{(1.0\Omega)(\pi)(2.59\times10^{-3}m)^2/4}{2.8\times10^{-8}\Omega\cdot m}$$

$=0.19km$

26.14 这道题引入了有时在美国应用的单位。长度单位密耳：1密耳(mil)=0.001英寸(in)；面积单位圆密耳(circular mil)：1圆密耳等于以密耳为长度单位时，直径的平方。24号铜线直径为0.0201in。(a)铜线截面积是多少圆密耳？(b) 100ft长的这种铜线电阻是多少？已知电阻率为10.4Ω·圆密耳/英尺。

解 (a) 截面积$=(20.1mil)^2=404$圆密耳

(b) $R=\rho\dfrac{L}{A}=\dfrac{(10.4\Omega\cdot\text{圆密耳/英尺})100\text{英尺}}{404\text{圆密耳}}=2.57\Omega$

26.15 铜的电阻温度系数$\alpha=4.3\times10^{-3}℃^{-1}$。铜线线圈在0℃时电阻为3.35Ω，在50℃时电阻为多少？

解 $R=R_0+\alpha R_0(T-T_0)=3.35\Omega+(4.3\times10^{-3}℃^{-1})(3.35\Omega)(50℃)=4.1\Omega$

26.16 某电阻器阻值与温度无关，为30.0Ω。它是由一个铝电阻和一个碳电阻串联而成。已知铝和碳的电阻温度系数分别为$\alpha_1=3.9\times10^{-3}℃^{-1}$和$\alpha_2=-0.50\times10^{-3}℃^{-1}$。设在0℃时铝电阻为$R_{01}$，碳电阻为$R_{02}$。试求出$R_{01}$和$R_{02}$。

解 组合电阻在温度T时为

$$R=[R_{01}+\alpha_1R_{01}(T-T_0)]+[R_{02}+\alpha_2R_{02}(T-T_0)]$$
$$=(R_{01}+R_{02})+(\alpha_1R_{01}+\alpha_2R_{02})(T-T_0)$$

由已知$R_{01}+R_{02}=30.0\Omega$

$\alpha_1R_{01}+\alpha_2R_{02}=0$

代入已知数据解得

$R_{01}=3.4\Omega$，$R_{02}=27\Omega$

26.17 按玻尔模型，氢原子的电子作半径为$5.3\times10^{-11}m$的圆周运动，速率为$2.2\times10^6m/s$。求其频率f以及轨道电流I。

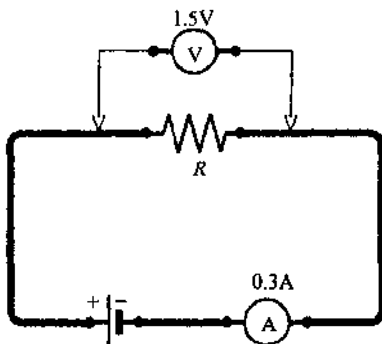


图26-4

解答 $f=\frac{v}{2\pi r}=\frac{2.2\times10^{6}\mathrm{m/s}}{2\pi(5.3\times10^{-11}\mathrm{m})}=6.6\times10^{15}\mathrm{r/s}$

电子每绕一圈，就有电荷 e 通过这个回路。所以每秒钟通过回路上某点的电量为

$I=ef=(1.6\times10^{-19}\mathrm{C})(6.6\times10^{15}\mathrm{s}^{-1})=1.1\mathrm{mA}$

26.18 一根电阻为 5.0Ω 的导线经挤压机后，长度增加了两倍。求这根新导线的电阻。

解答 我们用 $R=\rho L/A$ 求其新电阻。设导线原来长度为 L_0，截面积为 A_0。有

$5.0\Omega=\rho L_0/A_0$ 或 $\rho=(A_0/L_0)(5.0\Omega)$

现在 $L=3L_0$，而导线体积不变。所以

$V_0=L_0A_0$ 而 $V=LA$

由 $LA=L_0A_0$ 得

$$A=\left(\frac{L_0}{L}\right)A_0=\frac{1}{3}A_0$$

所以

$R=\frac{\rho L}{A}=\frac{(A_0/L_0)(5.0\Omega)(3L_0)}{A_0/3}=9(5.0\Omega)=45\Omega$

26.19 要将体积为 $5.0\mathrm{cm}^3$ 的金属做成一条电阻为 8.0Ω 的导线。已知其电阻率为 $9.0\times10^{-8}\Omega\cdot\mathrm{m}$。求导线的长度和截面积。

解答 由 $R=\rho L/A$，已知 $R=8.0\Omega$，$\rho=9.0\times10^{-8}\Omega\cdot\mathrm{m}$。又知道导线体积($LA$)为 $5.0\mathrm{cm}^3$。因此可列出两个方程，求 L 和 A。

$8.0\Omega=(9.0\times10^{-8}\Omega\cdot\mathrm{m})\left(\frac{L}{A}\right)$

$LA=5.0\times10^{-6}\mathrm{m}^3$

解得 $L=21\mathrm{cm}$，$A=2.4\times10^{-7}\mathrm{m}^2$

习　题

26.20 通有电流为 0.70A 的导线，每秒钟有多少电子通过其横截面？

（答　4.4×10^{18}）

26.21 电视机的电子枪射出电子束，束流为 1.0×10^{-5}A。求每秒钟有多少电子到达荧光屏，每分钟有多少电荷到达荧屏。

（答　6.3×10^{13}，-6.0×10^{-4}C）

26.22 电阻为 8.0Ω 的烘干机，在 120V 电压下，其工作电流为多少？

（答　15A）

26.23 3.0A 的电流通过 28Ω 的电阻。求电阻两端的电位差。

（答　84V）

26.24 若每分钟有 720C 的电荷通过阻值为 5.0Ω 的导线。求导线两端的电势差。

（答　60V）

26.25 铜质汇流条(即可以通过很大电流的导体)每 24cm 电势降 1.2mV，其通电电流为 1200A。求它每米的电阻。

（答　4.2μΩ/m）

26.26 电流表与未知电阻串联，读数为 1.2A。电压表与该电阻并联，读数为 18V。若均为理想电表。求电阻。

（答　15Ω）

26.27 电力公司用两根 100m 长的导线将电力从输电干线通到住户家中。已知这种导线每 1000m 的电阻为 0.10Ω。若估计负载电流为 120A。求导线上的电势降。

（答　2.4V）

26.28 电机线圈与机座之间的绝缘电阻为 1.0MΩ，试验电压为 1000V。流经电机绝缘层的电流有多大？

（答　1.0mA）

26.29 发电机的电动势为 120V。当它提供 20A 电流时，端电压为 110V，求内阻。

(答 0.50Ω)

26.30 一个干电池的开路电压为 1.59V。当它提供 2A 电流时，端电压为 1.41V，求内阻。

(答 0.09Ω)

26.31 电池的电动势为 1.54V。当它与 1.0Ω 的电阻串联成回路时，用电压表测得电池两端的电压为 1.40V。求其内阻。

(答 0.10Ω)

26.32 某 6.4V 的贮能电池内阻为 4.8mΩ。求短路情况下理论上电流极大值(实际上接线端以及导线都有电阻，所以达不到这个理论值)。

(答 1.3kA)

26.33 电池的电动势为 13.2V，内阻为 24.0mΩ，如负载电流为 20.0A，求电池端电压。

(答 12.7V)

26.34 某贮能电池电动势为 25.0V，内阻 0.200Ω。求出当(a)输出电流 8.00A 或(b)充电电流 8.00A 时，电池的端电压。

(答 (a) 23.4V；(b) 26.6V)

26.35 一充电器提供 10A 电流给一贮能电池充电。已知贮能电池开路电压为 5.6V。若电压表测得充电器两端电压为 6.8V，求贮能电池此时的内阻。

(答 0.12Ω)

26.36 图 26-5 中 $R=0.70\Omega$。求 A、B 两点间的电势差，哪一点电势较高？

(答 −5.1V，A 点)

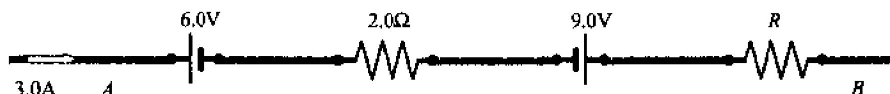


图 26-5

26.37 上题中若电流方向相反，情况如何？

(答 11.1V，B 点)

26.38 在图 26-5 中，R 应多大才能使 A 到 B 的电压降为 12V？

(答 3.0Ω)

26.39 在图 26-6 中，求(a)从 A 到 B，(b)从 B 到 C 和(c)从 C 到 A 两点间的电势差。电路电流为 2.0A。

(答 (a) −48V；(b) +28V；(c) +20V)

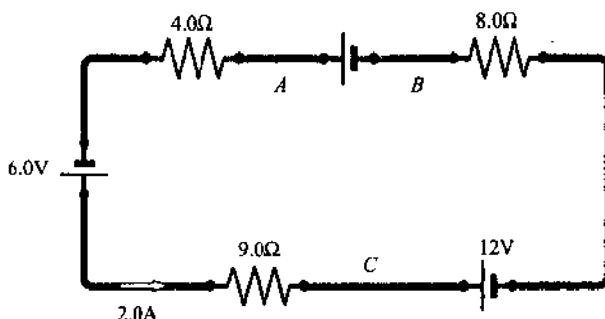


图 26-6

26.40 银的电阻率为 $1.6\times10^{-8}\Omega\cdot m$。求 180m 长、截面积 $0.30mm^2$ 的银导线的电阻。

(答 9.6Ω)

26.41 铝的电阻率为 $2.8\times10^{-8}\Omega\cdot m$。直径 1.0mm 的铝线需要多长才能有 4.0Ω 的电阻？

(答 0.11km)

26.42 6 号铜线直径为 0.162 in(英寸)。(a)求其截面积(以圆密耳为单位)，(b)若电阻率 $\rho=10.4$ 欧姆·圆密耳/英尺，求长度为 1.0×10^3 ft(英尺)的导线电阻。(提示：参见 26.14 题)

(答 (a) 26.0×10^3 圆密耳；(b) 0.40Ω)

26.43 某线圈在 20℃时电阻为 25.00Ω，而在 35℃时电阻为 25.17Ω。求此电阻材料的电阻温度系数。

(答 $4.5\times10^{-4}℃^{-1}$)

第二十七章 电 功 率

电场力作功

在电场中将电荷 q 从一点移到另一点，若两点间电势差(即电压)为 V，则电场力作功为

$$W=qV$$

式中 q 以库仑(C)为单位，V 以伏特(V)为单位，W 以焦耳(J)为单位。若电势升高，V 取正值，反之取负值。电荷和电压取适当符号，相应地功也取适当符号。当把正电荷移到电势更高的地方，外力对该电荷作正功。

电功率

电源在时间 t 内将电荷 q 从低电势处移到高电势处，使电压增加了 V，电源提供的功率为

$$功率=\frac{功}{时间}$$

$$P=\frac{Vq}{t}$$

式中 V 的单位为伏特(V)，q 的单位为库仑(C)，t 的单位为秒(s)，P 的单位为瓦(W)。
因为 $q/t=I$，上式又可写成

$$P=VI$$

I 的单位为安培(A)。

电阻的功率损耗

将功率表达式中的 V 用 IR 代替，或将 I 用 V/R 取代，则有

$$P=VI=I^2R=\frac{V^2}{R}$$

电阻产生热能

电阻器每秒钟产生的热能等于其功率损耗

$$P=VI=I^2R$$

单位换算

$$1W=1J/s=0.239cal/s=0.738ft\cdot lbf/s$$

$$1kW=1.341hp=56.9\ Btu/min$$

$$1hp=746W=33000ft\cdot lbf/min=42.4\ Btu/min$$

$$1kW\cdot h=3.6\times10^6J=3.9MJ$$

式中各符号代表的物理量请参见书后的附录 F。

例　　题

27.1 在一小时内将 96kC 的电荷移到电势升高 50V 的地方。计算作功以及平均功率。

解答 $W=qV=(96000C)(50V)=4.8\times10^6J=4.8MJ$

$$P=\frac{W}{t}=\frac{4.8\times10^6J}{3600s}=1.3kW$$

27.2 60W 的电灯泡连到 120V 的电源。电流有多少？

解答 由 $P=VI$

$$I=\frac{P}{V}=\frac{60W}{120V}=0.50A$$

27.3 一电机接 110V 的电源,电流为 5.0A,工作了 2.0h。求输入功率和能量(能量分别以 J 和 KW.h 为单位)。

解 功率 $=P=VI=(110V)(5.0A)=0.55kW$

能量 $=Pt=(550W)(7200s)=4.0MJ$

$=(0.55kW)(2.0h)=1.1kW\cdot h$

27.4 电熨斗电阻为 20Ω,工作电流为 5.0A。求 30s 内产生的热能,以 J 为单位。

解 能量 $=I^2Rt=(5A)^2(20\Omega)(30s)=15KJ$

27.5 电热器电阻为 8.0Ω,连接动力网,流过的电流为 15A。求其产热率。又,若电费为每千瓦小时 10 美分,4.0h 需花多少电费?

(译注:每千瓦小时(kW·h)叫一度电,1 美元=100 美分。)

解
$$W=I^2R=(15A)^2(8.0\Omega)=1800W=1.8kW$$

$$\text{电费}=(1.8kW)(4.0h)(10¢/kW\cdot h)=72¢\text{(美分)}$$

27.6 某线圈接 20V 电源,生热率为 800cal/s。求其电阻。

解
$$P=(800cal/s)(4.184J/cal)=3347J/s$$

由 $P=V^2/R$,

$$R=\frac{(20V)^2}{3347J/s}=0.12\Omega$$

27.7 总电阻为 0.20Ω 的传输线向某小工厂传输 10.00kW 的电力,电压为 250V。求传输效率。

解 由 $P=VI$ 或 $I=P/V$,有

$$\text{导线损失功率}=I^2R=\left(\frac{P}{V}\right)^2R=\left(\frac{10000W}{250V}\right)^2(0.20\Omega)=0.32kW$$

$$\text{效率}=\frac{\text{传输功率}}{\text{供给传输线的功率}}=\frac{10.00kW}{(10.00+0.32)kW}=0.970=97.0\%$$

27.8 某升降机工作电压 240V,电流 12.0A。它以 9.00m/min 的速率提升 800kg 的重物。求升降机的输入功率和输出功率,均以马力为单位,并求系统的效率。

解

输入功率 $=IV=(12.0A)(240V)=2880W=(2.88kW)(1.34hp/kW)=3.86hp$

$$\text{输出功率}=Fv=(800\times9.81N)\left(\frac{9.00m}{min}\right)\left(\frac{1.00hp}{746J/s}\right)\left(\frac{1.00min}{60.0s}\right)=1.58\ hp$$

$$\text{效率}=\frac{1.58hp(\text{输出})}{3.86hp(\text{输入})}=0.408=40.8\%$$

27.9 某汽车车灯的功率为 95.0W。车用电池工作电压为 12.0V,其额定充电量为 150A·h(安培小时)。若不慎一直开着车灯,问电池能维持多长时间?

解 假设电池始终保持 12.0V 的电压,直至电荷耗尽。其充电量 150A·h 表明其电量相当于维持 150A 电流 1.00 小时。所以电池提供的总电能为

总输出能量=功率×时间 $=(VI)t=(12.0V\times150A)(3600s)=6.48\times10^6J$

电灯在时间 t 内消耗的能量 $=(95W)(t)$ 解得　$t=6.82\times10^4s=18.9h$

27.10 电费标准为每度电 8.0 美分,求用电热器将 50L 水从 40℃升至 100℃要花多少钱。

解 热量=质量×比热×升温

$$=(50kg)\times(1000cal/kg\cdot℃)\times(60℃)=3.0\times10^6cal$$

$$\text{电费}=(3.0\times10^6cal)\left(\frac{4.184J}{1cal}\right)\left(\frac{1kW\cdot h}{3.6\times10^6J}\right)\left(\frac{8.0¢}{1kW\cdot h}\right)=28¢$$

习 题

27.11 一电热器标签上注明 1600W/120V。它从 120V 电源得到多大的电流?
(答 13.3A)

27.12 一灯泡印有 40W/120V 字样。接通 120V 电源后,其电阻是多少?
(答 0.36kΩ)

27.13 一人工闪电是由 10.0MV 电压引起的,它产生火花的输出能量为 0.125MW·s。求通过了多少电量(以 C 为单位)
(答 0.0125C)

27.14 导体两端接 100V 的电势差,通过导体的电流为 1.5A。求一分钟内通过多少电荷,移动这些电荷需作多少功。若所有电能都转换成热能的话,加热这导体的功率为多少?
(答 90C,9.0kJ,0.15kW)

27.15 一电机接 110V,工作电压为 15.0A。求(a)输入功率和(b)运转 8.00h 所花电费。已知电费标准为每度电 10.0 美分。
(答 (a)1.65kW;(b)$1.32)

27.16 电阻为 0.15Ω 的导体上通过 10A 电流。求热能的产生率。
(答 15W)

27.17 一个电烤炉工作电流为 8.0A,每秒钟产生 400cal 的热量。求其电阻。
(答 26Ω)

27.18 标称 25.0W、120V 的灯泡,未通电时电阻为 45.0Ω。刚通电时电流有多大?正常工作时呢?
(答 2.67A,0.208A)

27.19 在额定的 400A 电流条件下,开关由于接触不良而发热。用毫伏计测得开关两端电压为 100mV。求由于接触电阻而损耗的功率。
(答 40.0W)

27.20 标称 60W/120V 的白炽灯泡接到 115V 的电源上,求其消耗的功率。忽略由于电压降低导致的灯丝电阻的减小。
(答 55W)

27.21 进户电线的电阻率为 $1.68\times10^{-8}\Omega\cdot m$。通电流 30A。每米导线的热能损耗不超过 1.40W。求导线允许的最小直径。
(答 3.7mm)

27.22 电阻为 10.0Ω 的电热器接 110V 电源。求产热率,分别以 W 和 cal/s 为单位。
(答 1.21kW=290cal/s)

27.23 电机的工作电压为 110V,电流 20A,效率为 95%。求其输出功率为多少马力?热能损失为多少瓦?每秒钟产生多少卡热量?若电机工作 3.0h,消耗多少能量?分别以 MJ 和 kW·h 为单位。
(答 2.8hp,0.11kW,26cal/s,24MJ=6.6kW·h)

27.24 电力起重机工作电压 150V,电流 8.0A,以 7.0m/min 的速率升高一 450kg 的物体。求效率。
(答 43%)

27.25 加热器用 2.0min 将 500g、28℃的水升高到沸点。已知工作电压为 110V,过程中损失了 25% 的热能。试求加热器线圈的电阻。
(答 7.2Ω)

27.26 无烟煤燃烧值为 8000kcal/kg。如果每小时烧 1.0kg 煤。按电热取暖的计费标准:每度电 8.0 美分,每小时要花多少钱?
(答 74 美分)

27.27 两电站间以 80kV 传输电力。若不改变传输电缆以及电流,而将电压升至 160kV,问能多传输多少电力?传输电力的增加对线路热损耗有何影响。
(答 增加一倍,没有影响)

27.28 电动势为 6.4V、电阻为 0.080Ω 的贮能电池被充电,充电电流为 15A。试求(a)电池内部热消耗功率,(b)电池贮能的速率和(c)电池的端电压。

（答 (a)18W;(b)96W;(c)7.6V）

27.29 一个装 200kg 水的水槽用来作恒温水箱。用一个 250W 的浸没式加热器要多长时间才能把水温从 20℃升高到 25℃？忽略水槽的热容量以及向空气中的散热。

（答 4.6h）

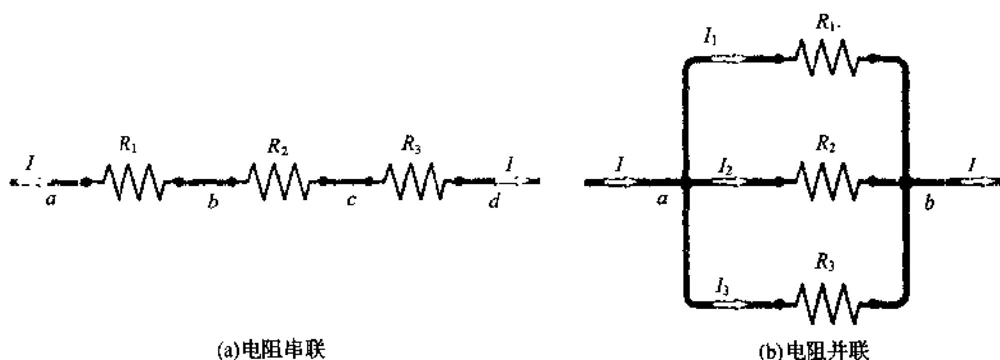
第二十八章 等效电阻 简单电路

电阻的串联

电流只沿一条通路依次通过两个或两个以上的电阻，这些电阻的接线形式叫串联。换句话说，即一个电阻的一端（只能是一端）与另一个电阻的一端（也只能是一端）相连接，这种方式为电阻的串联。通过串联电阻的电流是相等的。若三条或三条以上的通电导线汇聚到一点，这一点叫做节点。串联电路中相邻两元件（如电容器、电阻和电源）之间没有节点。图 23 - 1(a)是三个电阻相串联。若干个电阻串联后，串联电路的等效电阻 R_{eq} 为

$$R_{eq}=R_1+R_2+R_3+\cdots$$

式中 R_1、R_2、R_3……分别为各个电阻的阻值。这里假设所有的导线电阻都小得可以忽略。串联电路的等效电阻形式上很像并联电容的等效电容（见第二十五章）。



(a)电阻串联　　(b)电阻并联

图 28 - 1

在串联电路中，通过一个电阻的电流与通过所有其他电阻的电流都是相等的。串联电路的电势降等于各电阻电势降的总和。串联电路的等效电阻总是大于电路中单个电阻的阻值。

电阻的并联

把几个电阻的一端连接起来，再把它们的另一端连接起来并接入电路，叫电阻的并联。并联电路有两个节点，每个电阻的两端分别连接到节点上。图 28 - 1(b)即典型的并联电路，图中的 a 和 b 就是节点。并联电路的等效电阻与各电阻的关系如下

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\cdots$$

并联电路的等效电阻总是小于组成它的任何一个分电阻。并联电路等效电阻的公式很像电容器串联的公式（见第二十五章）。

并联电路中每个电阻上的电势降都相等。通过第几个电阻器的电流 $I_n=V/R_n$，而电路总电流等于各分支电流之总和。

例　题

28.1 试推导出三个电阻(a)串联和(b)并联的等效电阻，参见图 28 - 1(a)和(b)。

解 (a)对于串联电路有

$$V_{ad}=V_{ab}+V_{bc}+V_{cd}=IR_1+IR_2+IR_3$$

由于通过所有电阻的电流都相等，所以

$$\frac{V_{ad}}{I}=R_1+R_2+R_3$$

而等效电阻 R_{eq} 的定义就是 V_{ad}/I，即有

$$R_{eq}=R_1+R_2+R_3$$

(b)通过三个电阻的电势降都相同，即

$$I_1=\frac{V_{ab}}{R_1}\quad I_2=\frac{V_{ab}}{R_2}\quad I_3=\frac{V_{ab}}{R_3}$$

而总电流为每个分支电流之和

$$I=I_1+I_2+I_3=\frac{V_{ab}}{R_1}+\frac{V_{ab}}{R_2}+\frac{V_{ab}}{R_3}$$

除以 V_{ab} 得

$$\frac{I}{V_{ab}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\qquad 即\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

而等效电阻 R_{eq} 的定义为 V_{ab}/I，所以有

$$\frac{V_{ad}}{I}=R_1+R_2+R_3\qquad 得 R_{eq}=R_1+R_2+R_3$$

28.2 图 28－2(a)中，电池(内阻为 1Ω)与两个电阻相串联。求(a)电路中的电流，(b)每个电阻的电势降和(c)电池两端的电势降。

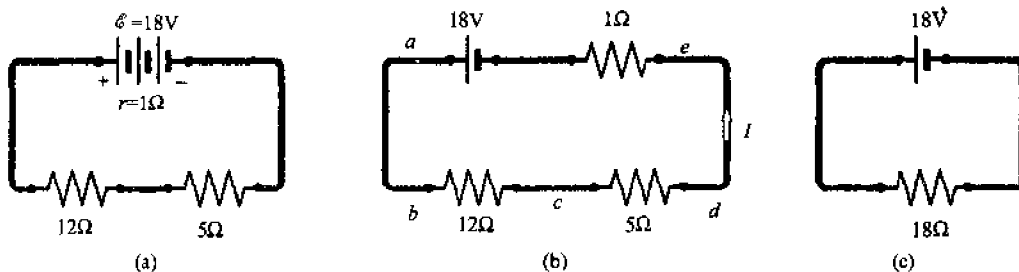


图 28－2

解 将原电路改画成图 28－2(b)，以标明电池内阻。所以等效电阻为

$$R_{eq}=5\Omega+12\Omega+1\Omega=18\Omega$$

这时电路等效于图 28－2(c)，将数据代入 $V=IR$，得

(a)

$$I=\frac{V}{R}=\frac{18\text{V}}{18\Omega}=1.0\text{A}$$

(b)由于 $I=1.0$A，从 b 到 c 的电势降为

$$V_{bc}=IR_{bc}=(1.0\text{A})(12\Omega)=12\text{V}$$

而从 c 到 d 为

$$V_{cd}=IR_{cd}=(1.0\text{A})(5\Omega)=5\text{V}$$

注意，串联电路中各点的电流都相同。

(c)电池两端的电势降即从 a 到 e 的电压改变，等于

$$V_{bc}+V_{cd}=12+5=17(\text{V})$$

或者从 e 着手，跨过电池而到 a，取这段电压降为负值，等于

$$-Ir+\mathscr{E}=-(1.0\text{A})(1\Omega)+18\text{V}=17\text{V}$$

28.3 住房内开了三盏灯：40.0W、60.0W 和 75.0W，电压为 120V。求这些灯总的等效电阻。

解 住房内每个用电器都是并联的。由 $P=VI=V^2/R$，第一盏灯的电阻 R_1 为

$$R_1=\frac{V^2}{P_1}=\frac{(120\text{V})^2}{40.0\text{W}}=360\Omega$$

类似地求出 $R_2=240\Omega$ 和 $R_3=192\Omega$，对于并联电路有

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{360\Omega}+\frac{1}{240\Omega}+\frac{1}{192\Omega}$$

得 $R_{eq}=82.3\Omega$

作为检算，我们先求线路总功率为$(40.0+60.0+75.0)\mathrm{W}=175.0\mathrm{W}$

由 $P=V^2/R$ 也得到

$$R_{eq}=\frac{V^2}{P}=\frac{(120\mathrm{V})^2}{175.0\mathrm{W}}=82.3\Omega$$

28.4 多大阻值的电阻与 12Ω 电阻并联能得到等效电阻 4Ω?

解 由

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

有

$$\frac{1}{4\Omega}=\frac{1}{12\Omega}+\frac{1}{R_2}$$

得

$$R_2=6\Omega$$

28.5 有若干 40Ω 的电阻器，要怎样连接才能从 120V 电源中输出 15A 的电流?

解 先从欧姆定律求出电路的等效电阻

$$R_{eq}=\frac{V}{I}=\frac{120\mathrm{V}}{15\mathrm{A}}=8\Omega$$

等效电阻比任何单个电阻都小，因此应考虑并联电路。若需 n 个电阻器，则

$$\frac{1}{80\Omega}=n\left(\frac{1}{40\Omega}\right)$$

得 $n=5$。

28.6 就图 28-3 中的几种情况，分别求出经过电源的电流。

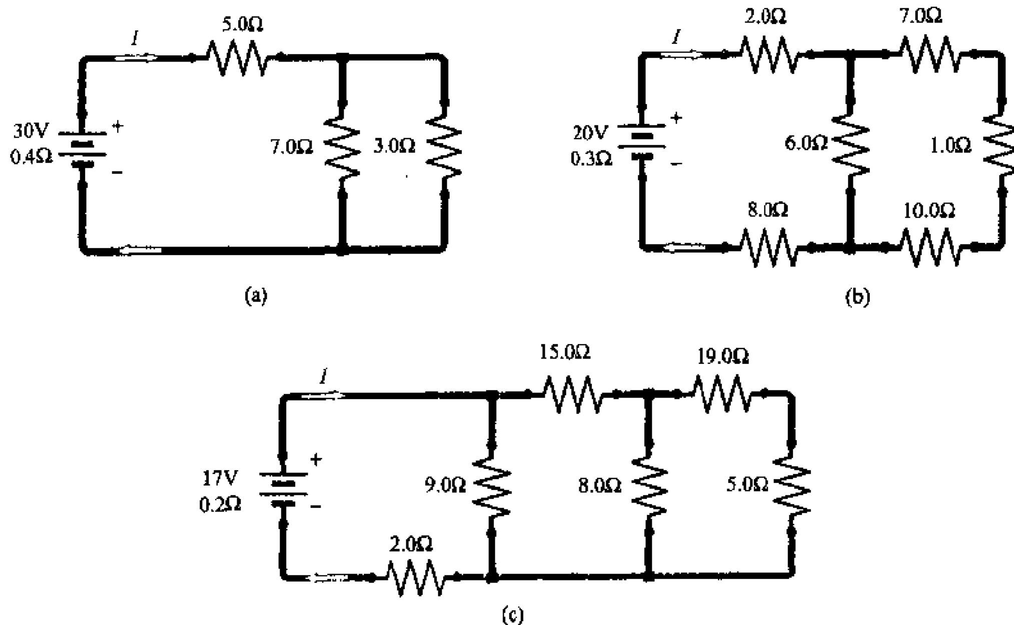


图 28-3

解 (a)3.0Ω 和 7.0Ω 是并联的，它们的组合电阻 R_1 有

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{3.0\Omega}+\frac{1}{7.0\Omega}=\frac{10}{21\Omega}$$

得 $R_1=2.1\Omega$

全电路的等效电阻为

$$R_{eq}=2.1\Omega+5.0\Omega+0.4\Omega=7.5\Omega$$

电池电流为

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R_{eq}}=\frac{30\mathrm{V}}{7.5\Omega}=4.0\mathrm{A}$$

(b)7.0Ω、1.0Ω 和 10.0Ω 是串联的，它们的组合电阻为 18.0Ω，它又与 6.0Ω 并联，得到组合电阻 R_1：

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{18.0\Omega}+\frac{1}{6.0\Omega}$$

$R_1=4.5\Omega$

全电路的等效电阻为

$$R_{eq}=4.5\Omega+2.0\Omega+8.0\Omega+0.3\Omega=14.8\Omega$$

从而得到电池电流

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R_{eq}}=\frac{20V}{14.8\Omega}=1.4A$$

(c)5.0Ω 和 19.0Ω 是串联的，组合电阻为 24.0Ω，它又与 8.0Ω 并联，得到组合电阻 R_1：

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{24.0\Omega}+\frac{1}{8.0\Omega}$$

$R_1=6.0\Omega$

现在 $R_1=6.0\Omega$ 与 15.0Ω 串联，得组合电阻 6.0Ω+15.0Ω=21.0Ω。21.0Ω 的电阻又与 9.0Ω 并联，得到组合电阻 R_2：

$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{21.0\Omega}+\frac{1}{9.0\Omega}$$

得 $R_2=6.3\Omega$

全电路的等效电阻为

$$R_{eq}=6.3\Omega+2.0\Omega+0.2\Omega=8.5\Omega$$

电池电流为

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R_{eq}}=\frac{17V}{8.5\Omega}=2.0A$$

28.7 求图 28－4 中每个电阻上的电流以及总电流。

解答 由 a 到 b 电势降为 40V。即每个电阻的电势降都是 40V。所以

$$I_2=\frac{40V}{2.0\Omega}=20A\quad I_5=\frac{40V}{5.0\Omega}=8.0A\quad I_8=\frac{40V}{8.0\Omega}=5.0A$$

全电流分为三个支路，所以应有 $I=I_2+I_5+I_8=20A+8.0A+5.0A=33A$

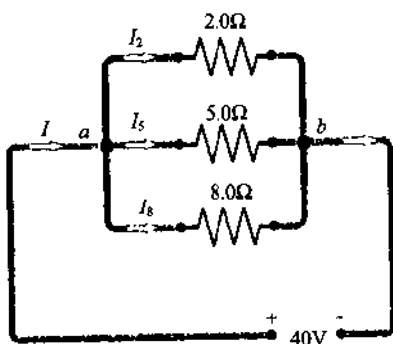


图 28－4

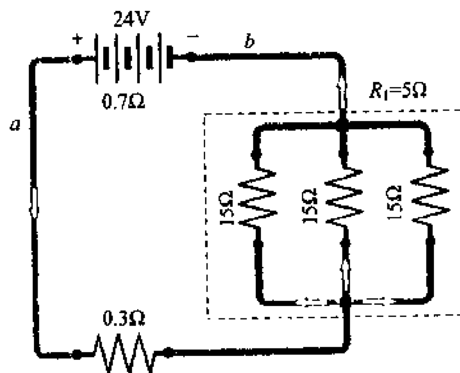


图 28－5

28.8 图 28－5 中电源内阻为 0.7Ω。求(a)电源电流，(b)经过每个 15Ω 电阻的电流和(c)电源的端电压。

解答 (a)并联电阻的组合电阻 R_1 有

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{15\Omega}+\frac{1}{15\Omega}+\frac{1}{15\Omega}=\frac{3}{15\Omega}$$

得 $R_1=5.0\Omega$

所以电路等效电阻为

$$R_{eq}=5.0\Omega+0.3\Omega+0.7\Omega=6.0\Omega$$

而

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R_{eq}}=\frac{24V}{6.0\Omega}=4.0A$$

(b)方法一

三个15Ω电阻并联等效于$R_1=5.0\Omega$。4.0A电流经过R_1。所以电势降为

$$IR_1=(4.0A)(5.0\Omega)=20V$$

这也是每个15Ω电阻的电势降,所以电流均为

$$I_{15}=\frac{V}{R}=\frac{20V}{15\Omega}=1.3A$$

方法二

在这种具体情况,经过每个15Ω电阻的电流为总电流的三分之一。

$$I_{15}=\frac{4.0A}{3}=1.3A$$

(c)沿电源外考察从a到b的电势降V有$V=-(4.0A)(0.3\Omega)-(4.0A)(5.0\Omega)=-21.2V$所以电源的端电压为21.2V。或者对于电池放电情况写出全电路欧姆定律有

$V=\mathscr{E}-Ir=24V-(4.0A)(0.7\Omega)=21.2V$

28.9 求图28-6(a)中a点与b点之间的等效电阻。

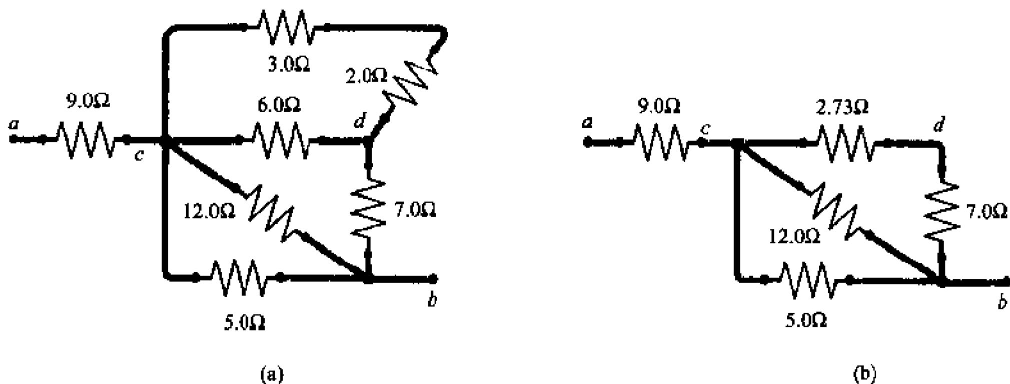


图28-6

解答 3.0Ω和2.0Ω串联,等效于5.0Ω。而这个等效电阻又与6.0Ω并联,得到新的等效电阻R_1。由

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{5.0\Omega}+\frac{1}{6.0\Omega}=0.20+0.167=0.367\Omega^{-1}$$

得$R_1=2.73\Omega$

简化了的电路如图28-6(b)。

7.0Ω与2.73Ω等效于9.73Ω。它又与5.0Ω和12.0Ω并联得到等效电阻R_2:

$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{5.0\Omega}+\frac{1}{12.0\Omega}+\frac{1}{9.73\Omega}=0.386\Omega^{-1}$$

得$R_2=2.6\Omega$

2.6Ω又与9.0Ω串联,所以从a到b之间的等效电阻为

$$9.0\Omega+2.6\Omega=11.6\Omega$$

28.10 图28-6中5.0A的电流由a流进,从b流出。(a)求从a到b的电势差,(b)求流经12.0Ω电阻的电流。

解答 由上题知,电路的等效电阻为11.6Ω,而总电流为5.0A。

(a)从a到b的电势降为

$$V=IR_{eq}=(5.0A)(11.6\Omega)=58V$$

(b)从a到c的电势降为(5.0A)(9.0Ω)=45V。所以,由c到b的电势降为

$$58V-45V=13V$$

流经12.0Ω的电流为

$$I_{12}=\frac{V}{R}=\frac{13\text{V}}{12\Omega}=1.1\text{A}$$

28.11　如图 28－7 所示，电流 I 分成 I_1 和 I_2 两路。试用 I、R_1 和 R_2 表示 I_1 和 I_2。

解☞　R_1 与 R_2 并联，所以电势降相等

$$I_1R_1=I_2R_2$$

又由 $I=I_1+I_2$ 或 $I_2=I-I_1$，代入上式得

$$I_1R_1=(I-I_1)R_2=IR_2-I_1R_2$$

$$I_1=\frac{R_2}{R_1+R_2}I$$

再结合第一式得

$$I_2=\frac{R_1}{R_2}I_1=\frac{R_1}{R_1+R_2}I$$

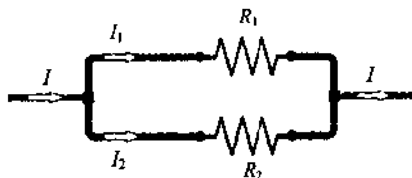


图 28－7

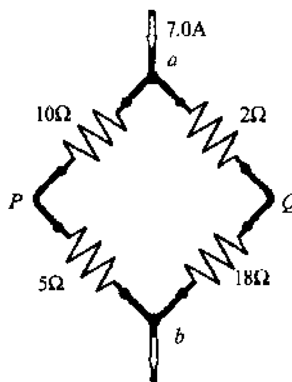


图 28－8

28.12　求图 28－8 中 P 点和 Q 点间的电势差。又问哪一点电势较高？

解☞　由上题的结论，流经 P 和 Q 的电流分别为

$$I_P=\frac{2\Omega+18\Omega}{10\Omega+5\Omega+2\Omega+18\Omega}(7.0\text{A})=4.0\text{A}$$

$$I_Q=\frac{10\Omega+5\Omega}{10\Omega+5\Omega+2\Omega+18\Omega}(7.0\text{A})=3.0\text{A}$$

考察从 P 开始经 a 到 Q，其电压改变为

$$+(4.0\text{A})(10\Omega)-(3.0\text{A})(2\Omega)=+34\text{V}$$

（注意，从 P 到 a 是电势升高，它是逆电流方向，而从 a 到 Q 则是电势降低。）所以 P 和 Q 之间电势差为 34V，Q 点电势较高。

28.13　求图 28－9(a)中，(a)I_1、I_2 和 I_3；(b)12Ω 电阻器上的电流。

解☞　(a)电路图简化为图 28－9(b)。又可看到 24Ω 与 12Ω 并联，所以 a 和 b 以下部分的等效电阻为

$$\frac{1}{R_{ab}}=\frac{1}{24\Omega}+\frac{1}{12\Omega}=\frac{3}{24\Omega}$$

即 $R_{ab}=8.0\Omega$

再加上电池内阻 1.0Ω，得到全电路电阻为 9.0Ω。线路总电流为

$$I_1=\frac{\mathscr{E}}{R_{eq}}=\frac{27\text{V}}{9.0\Omega}=3.0\text{A}$$

这个电流经过 a 和 b 以下的电路，所以从 a 到 b 的电势降等于从 c 到 d 的电势降＝(3.0A)(8.0Ω)＝24V

对于从 c 到 d 的支路应用欧姆定律有

$$I_2=\frac{V_{cd}}{R_{cd}}=\frac{24\text{V}}{24\Omega}=1.0\text{A}$$

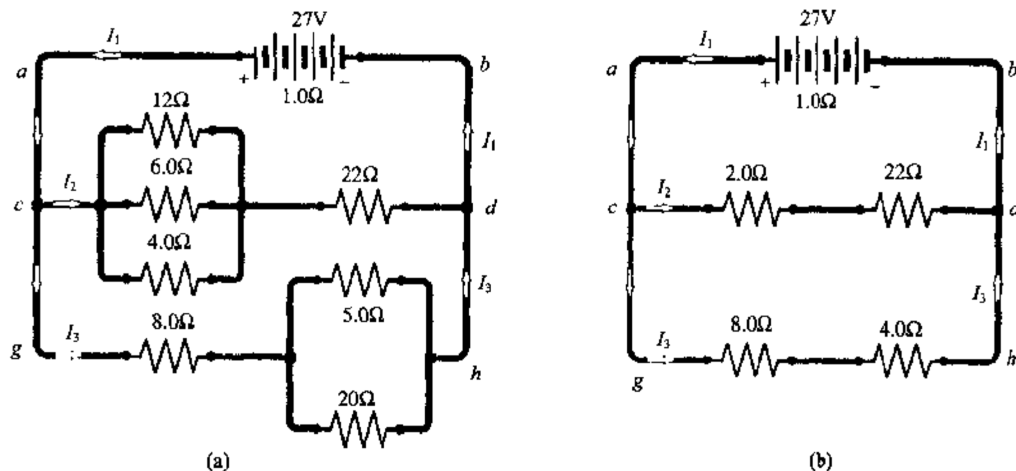


图 28－9

同样，$I_3=\frac{V_{gh}}{R_{gh}}=\frac{24\text{V}}{12\Omega}=2.0\text{A}$

作为检验，$I_2+I_3=3.0A=I_1$，结果正确。

(b)因为 $I_2=1.0\text{A}$，2.0Ω 两端的电压(见图 28－9(b))为(1.0A)(2.0Ω)＝2.0V。这也是图 28－9(a)中 12Ω 电阻两端的电压。

由欧姆定律 $V=IR$ 得到

$$I_{12}=\frac{V_{12}}{R}=\frac{2.0\text{V}}{12\Omega}=0.17\text{A}$$

28.14 检流计的电阻为 400Ω，通过 0.20mA 的电流便偏转满刻度。若要将它改装成量程为 3.0A 的电流表，需并联多大的分流电阻？

解 在图 28－10 中，用 G 表示检流计，用 R_s 表示分流电阻。检流计偏转最大时电流情况如图示。

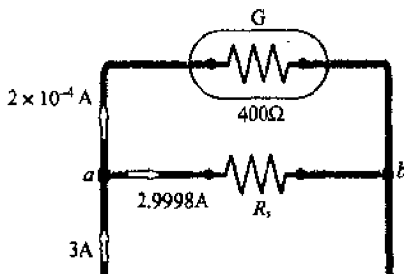


图 28－10

从 a 经检流计到 b 的电势降与经分流电阻的电势降相同，即

$$(2.9998\text{A})R_s=(2.0\times10^{-4}\text{A})(400\Omega)$$

解得　$R_s=0.027\Omega$

28.15 电压表接 5.000V 的电压就满刻度偏转。它是由内阻 80.00Ω 的检流计与一个电阻 R_x 串联得到的。已知检流计接 20.00mV 便满偏。求 R_x。

解 当检流计满偏时，电流为

$$I=\frac{V}{R}=\frac{20.00\times10^{-3}\text{V}}{80.00\Omega}=2.500\times10^{-4}\text{A}$$

当 R_x 与检流计串联时，我们希望串联电路接 5.000V 电压时，电流为 2.500×10^{-4} A。所以，由 $V=IR$ 有

$$5.000\text{V}=(2.500\times10^{-4}\text{A})(80.00\Omega+R_x)$$

得到 $R_x=19.92\Omega$

28.16 图 28 - 11 中的电流都是恒定的。求 I_1、I_2 和 I_3 以及电容器上的电荷。

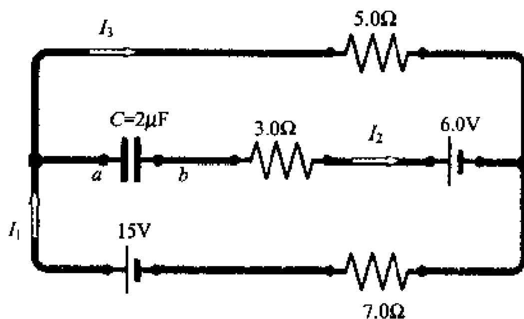


图 28 - 11

解 当电容器电荷恒定时，如本题的情况，没有电流通过。所以 $I_2=0$。好像中间的支路不存在一样。这样，剩下的电路简化为 12Ω 的电阻与 15V 的电池连接。

$$I_1=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{15\text{V}}{12\Omega}=1.25\text{A}$$

另外，由 $I_2=0$，我们有 $I_3=I_1=1.3\text{A}$（注意有效数字的四舍五入）。

要求出电容器的电荷，先要求出 a 和 b 之间的电势差。从 a 开始考虑上部的电路。从 a 到 b 的电压改变为

$$-(5.0\Omega)I_3+6.0\text{V}+(3.0\Omega)I_2$$

$$=-(5.0\Omega)(1.25\text{A})+6.0\text{V}+(3.0\Omega)(1.25\text{A})=-0.25\text{V}$$

b 点处于低电势，即 b 点处极板带负电。由下式可求电容器带电

$$Q=CV_{ab}=(2\times10^{-6}\text{F})(0.25\text{V})=0.5\mu\text{C}$$

28.17 求图 28 - 12 中电流表和电压表的读数。假设电表都是理想的。

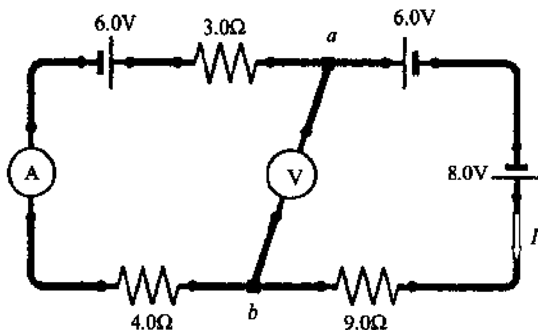


图 28 - 12

解 理想的电压表内阻无穷大，所以将电压表的连线断开，并不影响原电路。而理想电流表的内阻为零。可以证明（见下一章），几个电池串联不过是简单的加法或减法。两个 6.0V 的电池方向相反而互相抵消，结果整个电路就如同只有一个 8.0V 的电池，产生顺时针方向的电流。

电路的等价电阻为 3.0Ω+4.0Ω+9.0Ω=16.0Ω，而等价电池为 8.0V。所以有

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{8.0\text{V}}{16\Omega}=0.50\text{A}$$

这即为电流表的读数。

沿右边的电路从 a 到 b 将电势差逐一相加得到

$$-6.0\text{V}+8.0\text{V}-(0.50\text{A})(9.0\Omega)=-2.5\text{V}$$

即电压表读数为 2.5V，b 端为低电势端。

习　题

28.18 求电阻 4.0Ω 与 8.0Ω(a)串联，(b)并联后的等效电阻。

(答　(a)12Ω;(b)2.7Ω)

28.19 计算下列等效电阻：(a)3.0Ω、6.0Ω 和 9.0Ω 并联；(b)3.0Ω、4.0Ω、7.0Ω、10.0Ω 和 12.0Ω 并联；(c)三个 33Ω 的加热元件并联；(d)二十个 100Ω 的灯泡并联。

(答　(a)1.6Ω;(b)1.1Ω;(c)11Ω;(d)5.0Ω)

28.20 多大的电阻与 20Ω 并联得到等效电阻 15Ω?

(答　60Ω)

28.21 从 100V 的电源线路上得到 5.0A 的电流，需并联几个 160Ω 的电阻?

(答　8)

28.22 三个电阻：8.0Ω，12Ω 和 24Ω 并联，总电流为 20A。求(a)并联电路两端的电压和(b)通过每个电阻的电流。

(答　(a)80V;(b)10A、6.7A、3.3A)

28.23 三只电阻分别为 3.0Ω、5.0Ω 和 6.0Ω。它们可以组合得到 18 种不同的阻值，请列出。

(答　0.70Ω，1.4Ω，1.9Ω，2.0Ω，2.4Ω，2.7Ω，3.0Ω，3.2Ω，3.4Ω，5.0Ω，5.7Ω，6.0Ω，7.0Ω，7.9Ω，8.0Ω，9.0Ω，11Ω，14Ω)

28.24 两个电阻，4.00Ω 和 12.0Ω 并联后接到电池两端。电池电动势为 22V，内阻为 1.00Ω。求(a)电池的电流，(b)通过 4.00Ω 的电流，(c)电池端电压和(d)通过 12.0Ω 的电流。

(答　(a)5.5A;(b)4.1A;(c)17V;(d)1.4A)

28.25 三个电阻，40Ω、60Ω 和 120Ω，并联后与 15Ω 和 25Ω 的电阻串联。整个系统再与 120V 电源相连。求(a)通过 25Ω 的电流，(b)这些并联电阻两端的电压，(c)25Ω 电阻两端的电压，(d)经过 60Ω 的电流和(e)经过 40Ω 的电流。

(答　(a)2.0A;(b)40V;(c)50V;(d)0.67A;(e)1.0A)

28.26 电流表内阻为 0.040Ω。要并联多大的电阻可使全部电流的四分之一通过电流表?

(答　0.013Ω)

28.27 内阻 36Ω 的检流计并联一个 4.0Ω 的分流电阻。总电流中有多少比例通过检流计?

(答　1/10)

28.28 某继电器的电阻为 6.0Ω，最小工作电流为 0.030A。如果要线路电流达 0.240A 时继电器动作，问继电器要接多大的分流电阻?

(答　0.86Ω)

28.29 试证明两个并联的电阻，其产热率与它们的阻值成反比。

28.30 求图 28-13 所示电路中通过每个电阻的电流和电势降落。

(答　对于 20Ω，3.0A 和 60V；对 75Ω，2.4A 和 180V；对 300Ω，0.6A 和 180V)

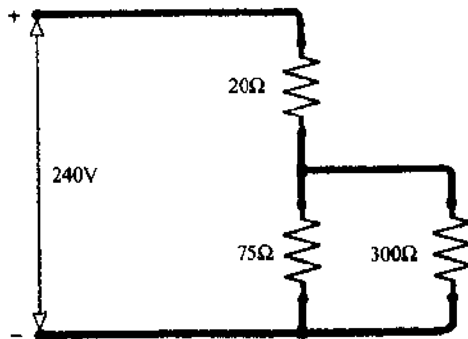


图 28-13

28.31 求图 28-14 电路中的(a)等效电阻；(b)从电源流出的电流；(c)*ab*、*cd* 和 *de* 之间的电势差；(d)每个电阻上的电流。

(答　(a)15Ω;(b)20A;(c)$V_{ab}=80\text{V}$，$V_{cd}=120\text{V}$，$V_{de}=100\text{V}$;(d)$I_4=20\text{A}$，$I_{10}=12\text{A}$，$I_{15}=8\text{A}$，$I_9=11.1\text{A}$，$I_{18}=5.6\text{A}$，$I_{30}=3.3\text{A}$)

28.32 在图 28-15 中，已知 6.0Ω 电阻两端电势差为 48V。求(a)输入电流，(b)8.0Ω 两端的电势差，(c)10Ω 两端的电势差，(d)从 *a* 到 *b* 之间的电势差。(提示：连线 *cd* 之间阻值为零，可将它们用一个节点表示而不改变电路性质。)

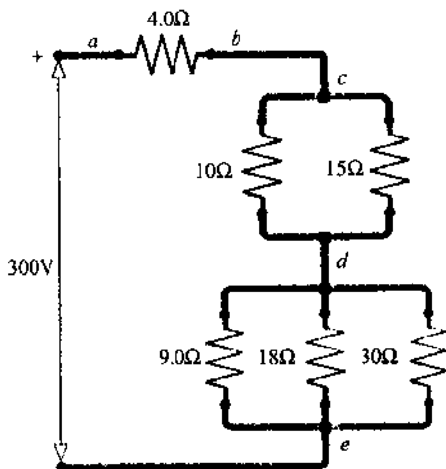


图 28-14

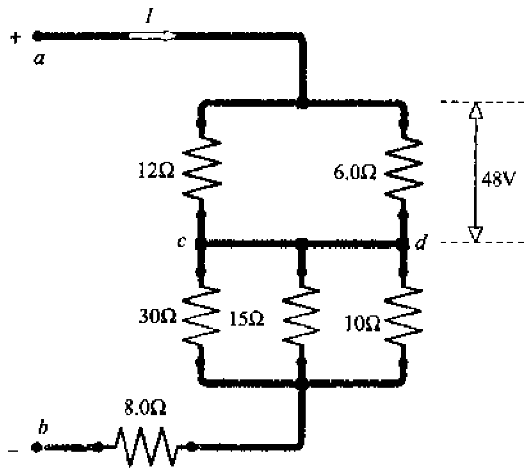


图 28-15

28.33 在图 28-16 的电路中，已知 4.0Ω 的电阻每秒钟产生热能 23.9 卡(cal)，电流表和电压表都是理想电表。求电表的读数。

(答 5.8A，8.0V，58V)

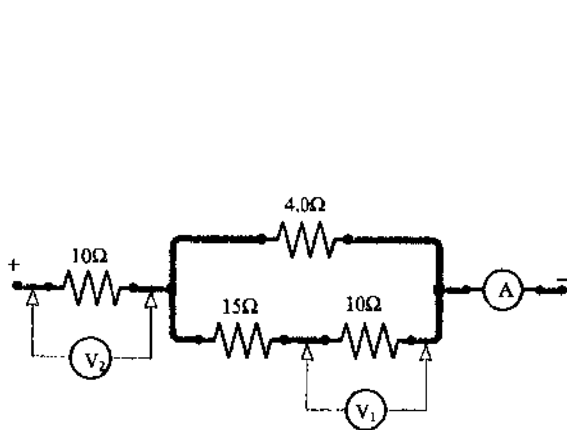


图 28-16

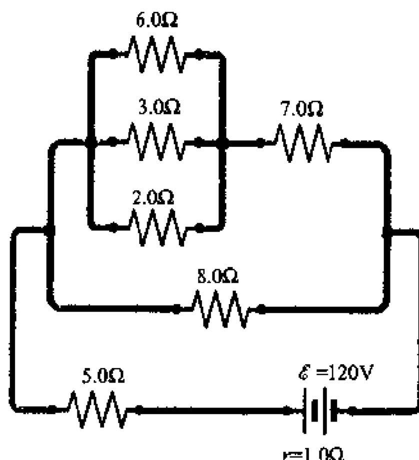


图 28-17

28.34 在图 28-17 所示的电路中，求(a)等效电阻；(b)通过 5.0Ω、7.0Ω 和 3.0Ω 的电流；(c)电池输出的总功率。

(答 (a)10Ω；(b)12A，6.0A，2.0A；(c)1.3kW)

28.35 在图 28-18 所示的电路中，理想的电流表指示 2.0A。(a)设 XY 是一个电阻器，求其阻值。(b)设 XY 是一个内阻为 2.0Ω、正在被充电的电池，求它的电动势。(c)在(b)的条件下，从 Y 到 X 的电势变化了多少?

(答 (a)5.0Ω；(b)6.0V；(c)−10V)

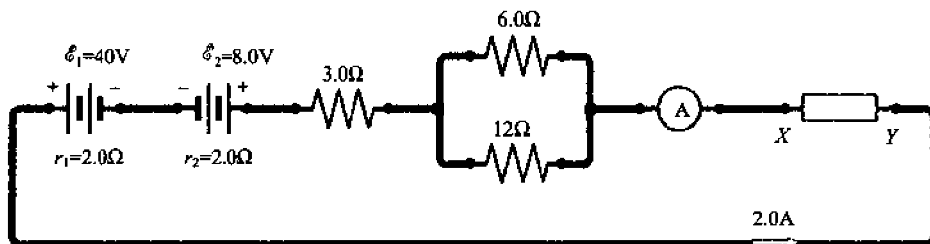


图 28-18

28.36 图 28-19 是用来测电阻 X 的惠斯登电桥。电桥平衡时，通过检流计 G 的电流为零。若 L、M 和 N 的阻值分别为 3.0Ω、2.0Ω 和 10Ω，求 X 的值。

（答　15Ω）

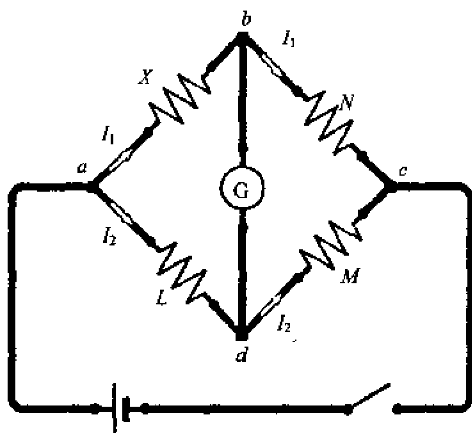


图 28－19

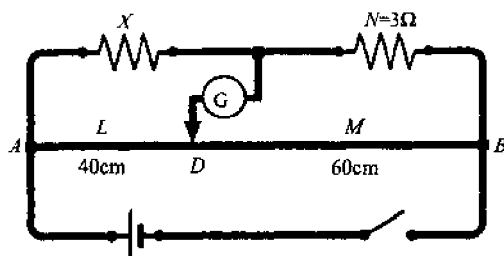


图 28－20

28.37 在图 28－20 所示的电路中，检流计的一端可在均匀导线 AB 上滑动。当滑到图中 D 点时，惠斯登电桥平衡。求电阻 X 的值。

（答　2Ω）

第二十九章　基尔霍夫定律

基尔霍夫第一定律(节点定律)

流入一个节点的电流总和与流出该节点的电流总和相等。

基尔霍夫第二定律(回路定律)

沿任一闭合回路的电势变化的代数和为零。

在求和中,电势升高取为正值,电势降低取为负值。电阻中的电流总是由高电势向低电势的方向。沿电流方向经过一个电阻,电势降低,因而电势变化为负。

一个纯粹的电源电动势,其正极永远是高电位端,而与流经这个电源的电流方向无关。

按基尔霍夫第二定律列出的回路方程中,若有一个电压改变是别的回路方程所没有的,这个方程便是独立的。

例　题

29.1　求图 29-1 中电路中的各电流值。

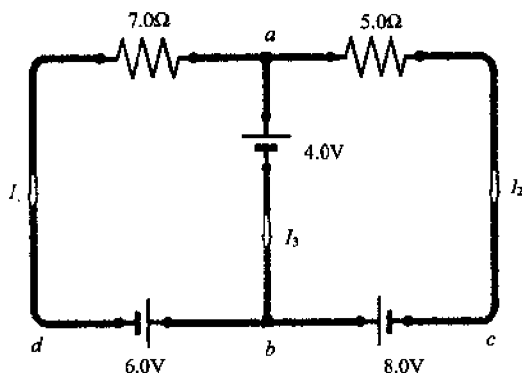


图 29-1

解　这个电路不能再简化了,它不包含简单的串并联组合。因此我们应用基尔霍夫定律。如果图中还没有标记电流的方向,我们就该先这样做。你可以任意假设电流的方向,如果选错了,得到的结果为负值。

对于节点 b 应用节点定律,进入 b 的电流等于流出 b 的电流:

$$I_1+I_2+I_3=0 \tag{1}$$

接下来对于回路 $adba$ 应用回路定律,以伏特为单位:

$$-7.0I_1+6.0+4.0=0 \quad 或 \quad I_1=\frac{10.0}{7.0}\text{A}$$

(为什么 $7.0I_1$ 前要加负号?)。然后对回路 $abca$ 应用回路定律:

$$-4.0-8.0+5.0I_2=0$$

或

$$I_2=\frac{12.0}{5.0}\text{A}$$

(为什么符号是这样的?)

回到(1)式

$$I_3=-I_1-I_2=-\frac{10.0}{7.0}-\frac{12.0}{5.0}=\frac{-50-84}{35}=-3.8(\text{A})$$

负号告诉我们，I_3 的实际方向与图中所标记的方向相反。

29.2　求图 29－2 中的 I_1、I_2 和 I_3，如果(a)电键 S 断开和(b)S 闭合。

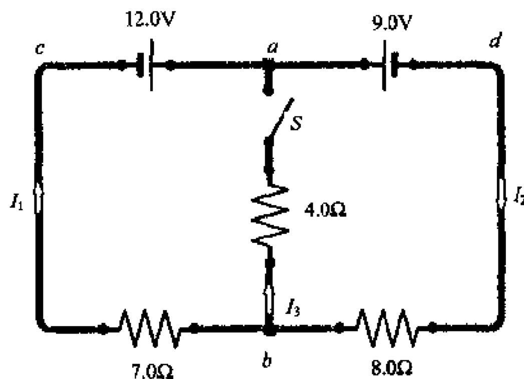


图 29－2

解：(a)S 断开，则 $I_3=0$。对 a 点应用节点定律有

$$I_1+I_3=I_2,\text{或 } I_2=I_1+0=I_1$$

对于回路 $acbda$ 应用回路定律有

$$-12.0+7.0I_1+8.0I_2+9.0=0 \tag{1}$$

要搞清采用什么符号，记住电流总是从电阻的高电位端到低电位端的，

由于 $I_1=I_2$，(1)式的

$$15.0I_1=3.0,\text{或 } I_1=0.20\text{A}$$

所以 $I_2=I_1=0.20\text{A}$。注意，用一个 3.0V 的电池代替两个电池，所得结果相同。

(b)S 闭合，I_3 不再为零。对 a 应用节点定律有

$$I_1+I_3=I_2 \tag{2}$$

对 $acba$ 应用回路定律得

$$-12.0+7.0I_1-4.0I_3=0 \tag{3}$$

对 $adba$ 回路有

$$-9.0-8.0I_2-4.0I_3=0 \tag{4}$$

对剩下的回路 $acbda$ 应用回路定律，因为没有新的电压变化，所以得到的方程是多余的。

我们解(2)、(3)和(4)以求 I_1、I_2 和 I_3。

由(4)式有

$$I_3=-2.0I_2-2.25$$

代入(3)式得

$-12.0+7.0I_1+9.0+8.0I_2=0$　或

$$7.0I_1+8.0I_2=3.0$$

取代(2)式中的 I_3 得到

$$I_1-2.0I_1-2.25=I_2 \quad \text{或}$$

$$I_1=3.0I_2+2.25$$

将这结果代入上式最后得

$$21.0I_2+15.75+8.0I_2=3.0 \quad \text{或}$$

$$I_2=-0.44\text{A}$$

将此值代入 I_1 的方程得到

$$I_1=3.0(-0.44)+2.25=-1.32+2.25=0.93(\text{A})$$

注意，I_2 的值必须要连同负号在一起。

应用(2)式得到

$$I_3 = I_2 - I_1 = (-0.44) - 0.93 = -1.37(\text{A})$$

29.3 图 29－3 中的电池的内阻都是 0.075Ω，电动势都是 1.50V，求 I_1、I_2 和 I_3。

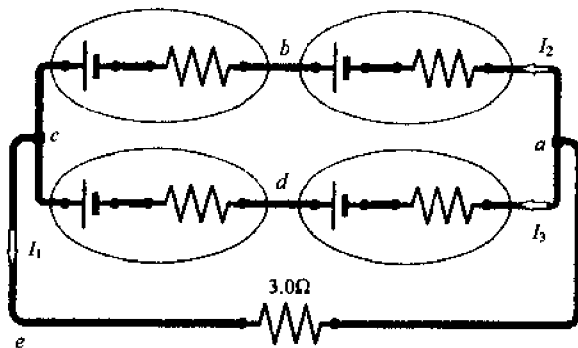


图 29－3

解 对 a 点应用节点定律有

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{1}$$

对 $abcea$ 应用回路定律有

$$-(0.0750)I_2 + 1.50 - (0.0750)I_2 + 1.50 - 3.00I_1 = 0$$

或

$$3.00I_1 + 0.150I_2 = 3.00 \tag{2}$$

对 $adcea$ 有

$$-(0.0750)I_3 + 1.50 - (0.0750)I_3 + 1.50 - 3.00I_1 = 0$$

或

$$3.00I_1 + 0.150I_3 = 3.00 \tag{3}$$

解(2)得 $3.00I_1$ 并代入(3)得到

$$3.00 - 0.150I_3 + 0.150I_2 = 3.00$$

或

$$I_2 = I_3$$

从电路的对称性我们可能已经猜想到了这个结论。从(1)式得到

$$I_1 = 2I_2$$

代入(2)式有

$$6.00I_2 + 0.150I_2 = 3.00$$

$I_2 = 0.488\text{A}$

则 $I_3 = I_2 = 0.488\text{A}$，$I_1 = 2I_2 = 0.976\text{A}$

29.4 图 29－4 中电路是稳定的。求 I_1、I_2、I_3、I_4、I_5 以及电容器上的电荷。

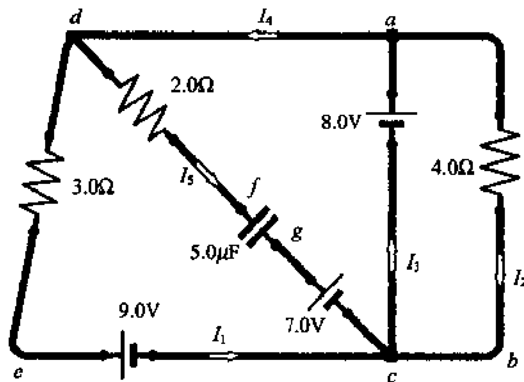


图 29－4

解 电容器充电后就没有电流了，$I_5 = 0$。考察 $acba$ 回路，由回路定律有

$$-8.0 + 4.0I_2 = 0，\text{或 } I_2 = 2.0\text{A}$$

由 $adeca$ 回路有

$$-3.0I_1-9.0+8.0=0,\text{或 } I_1=-0.33\text{A}$$

在 c 点应用节点定律有

$$I_1+I_5+I_2=I_3,\text{或 } I_3=1.67\text{A}=1.7\text{A}$$

而在 a 点，则有

$$I_3=I_4+I_2,\text{或 } I_4=-0.33\text{A}$$

（因为 $I_5=0$，所以可立即知道 $I_4=I_1$）

要求电容器充电量，需知其两端电势差 V_{fg}。对 $dfgced$ 应用回路定律得

$$-2.0I_5+V_{fg}-7.0+9.0+3.0I_1=0$$

$$0+V_{fg}-7.0+9.0-1.0=0$$

解得 $V_{fg}=-1.0\text{V}$。

负号意味着 g 板带负电。电容器带电量为

$$Q=CV=(5.0\mu\text{F})(1.0\text{V})=5.0\mu\text{C}$$

29.5 如图 29-5 所示的电路中，$R=5.0\Omega$，$\mathscr{E}=20\text{V}$。求电流表和电压表的读数。假设电表都是理想的。

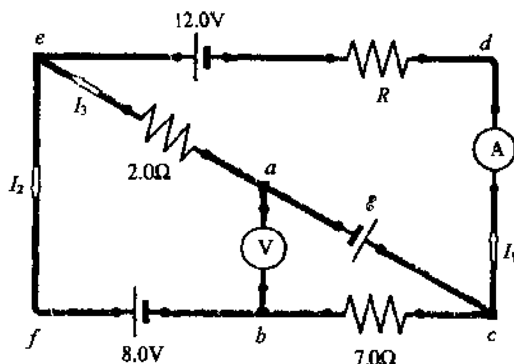


图 29-5

解 理想电压表电阻无穷大，所以分析电路时可视作拆除它而不会影响电路性质。

写出 $cdefc$ 的回路方程

$$-RI_1+12.0-8.0-7.0I_2=0$$

简化成

$$5.0I_1+7.0I_2=4.0 \tag{1}$$

写出 $cdeac$ 的回路方程

$$-5.0I_1+12.0+2.0I_3+20.0=0$$

或

$$5.0I_1-2.0I_3=32.0 \tag{2}$$

在 e 点应用节点定律有

$$I_1+I_3=I_2 \tag{3}$$

将(3)式代入(1)式得

$$5.0I_1+7.0I_1+7.0I_3=4.0$$

解得 I_3 表达式再代入(2)式得

$$5.0I_1-2.0\left(\frac{4.0-12.0I_1}{7.0}\right)=32.0$$

解得 $I_1=3.9\text{A}$，即电流表的读数。代入(1)式得 $I_2=-2.2\text{A}$。

为求电压表读数 V_{ab}，对 $abca$ 写出回路方程有

$$V_{ab}-7.0I_2-\mathscr{E}=0$$

代入已知的 I_2 和 $\mathscr{E}$，解得 $V_{ab}=4.3\text{V}$。这是 a 与 b 之间的电势差，所以 b 点电势较高。

29.6 在图 29-5 中，若 $I_1=0.20\text{A}$，$R=5.0\Omega$，求 $\mathscr{E}$。

解☞　对回路 $cdefc$ 有

$$-RI_1+12.0-8.0-7.0I_2=0 \quad 或$$

$$-(5.0)(0.20)+12.0-8.0-7.0I_2=0$$

解得 $I_2=0.43\text{A}$。应用节点定律，对于 e 点

$$I_1+I_3=I_2$$

或
$$I_3=I_2-I_1=0.23\text{A}$$

对 $cdeac$ 应用回路定律有

$$(5.0)(0.20)+12.0+(2.0)(0.23)+\mathscr{E}=0$$

解得 $\mathscr{E}=-11.5\text{V}$。负号表示电池极性与图中所画刚好相反。

习　题

29.7　图 29-6 所示的电路中，求 0.96Ω 电阻的电流以及各电池的端电压。

（答　5.0A，4.8V，4.8V）

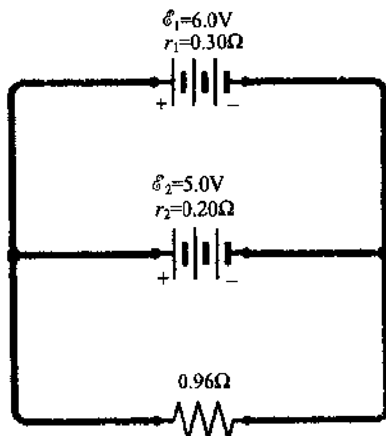


图 29-6

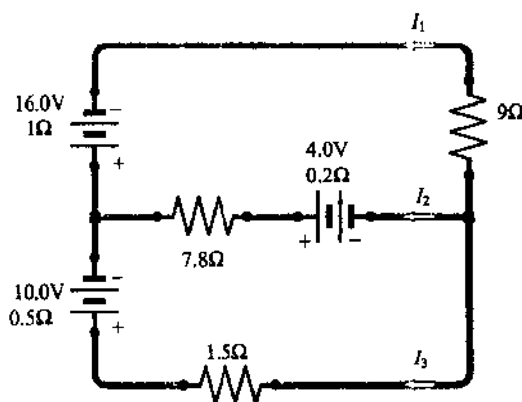


图 29-7

29.8　求图 29-7 所示电路中，(a)三个电流 I_1、I_2 和 I_3 以及(b)三个电池的端电压。

（答　(a)$I_1=2\text{A}$，$I_2=1\text{A}$，$I_3=-3\text{A}$；(b)$V_{16}=14\text{V}$，$V_4=3.8\text{V}$，$V_{10}=8.5\text{V}$）

29.9　参见图 29-5，若电压表读数为 16.0V（且 b 点电势较高），$I_2=0.20\text{A}$. 求 $\mathscr{E}$、R 以及电流表读数。

（答　14.6V，0.21Ω，12A）

29.10　求图 29-8 所示电路中 I_1、I_2 和 I_3 以及 b 点和 e 点之间的电势差。

（答　2.0A，−8.0A，6.0A，−13.0V）

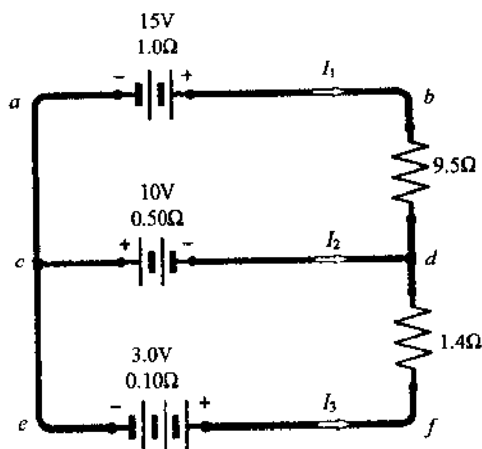


图 29-8

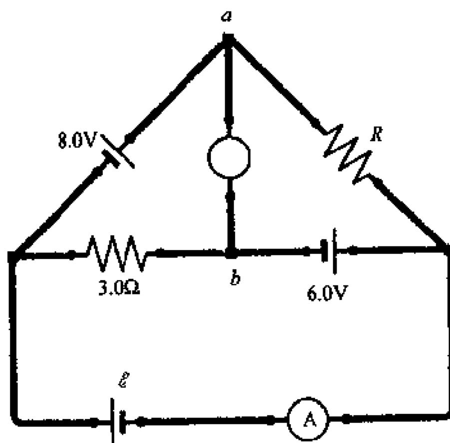


图 29-9

29.11　在图 29-9 中，$R=10.0\Omega$，$\mathscr{E}=13\mathrm{V}$。求理想电流表和电压表的读数。
(答　8.4A，27V，a 点为正)

29.12　在图 29-9 中，若电压表读数为 14V(a 点电势较高)，电流表读数为 4.5A。求 $\mathscr{E}$ 和 R。
(答　$\mathscr{E}=0$，$R=3.2\Omega$)

第三十章 磁 场 力

磁场($\boldsymbol{B}$)

电荷在某区域(既使是真空区域)中运动,如果因其运动而受到力的作用,我们说这区域中存在磁场,见图 30-1。通常用小磁针来检测磁场,磁针的北极指向磁场的方向。

磁感应线

画磁感应线的方法可以表示磁场内各点小磁针的指向。图 30-2 就形象地说明了一个条形磁铁周围磁感应线的画法。习惯上我们取小磁针北极的指向为磁场的方和。

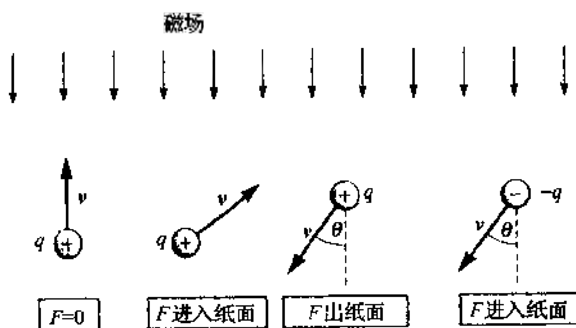


图 30-1

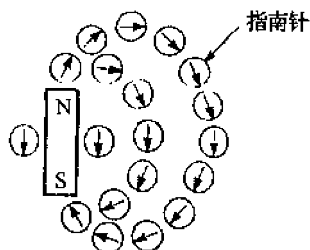


图 30-2

磁铁

磁铁可能有两极或多极,但至少有一个北极(N)和一个南极(S)。小磁针从北极向外指向南极,如图 30-2 所示。所以磁力线方向为从北极向外而最终回到南极。

磁极

磁极同性相斥,异性相吸。

磁场对运动电荷的作用

运动电荷的速度矢量如果不与磁力线相平行,则受到磁场的作用。图 30-1 中电荷 q 的运动速度$\boldsymbol{v}$ 以及磁场方向都已标出。电荷受力的方向标在图下部的框内。具有相同速度矢量的异号电荷所受磁场力的方向相反。

正电荷$+q$ 在磁场中受力的方向可由图 30-3 所示的右手定则* 得到:伸直手掌,四指指向磁场的方向,使大拇指指向该正电荷速度矢量的方向。则掌心所指即磁场力的方向。负电荷受力方向与正电荷相反。

电荷所在处磁力线和电荷运动速度矢量确定一个平面(如图 30-3 中的纸面),而磁场力矢量总是垂直于这个平面的。记住这一点是很有帮助的。

---

* 在我国,中学生习惯用左手定则判断磁场力的方向。伸直左手手掌,使掌心朝向磁场,即磁力线穿过掌心,四指指向正电荷运动的方向,则拇指的方向即磁场对正电荷的作用方向。而大学生所熟知的右手螺旋法则也与本书中叙述有所不同:伸直右手手掌,四指指向正电荷运动方向,进而四指朝磁场方向弯曲握拳,竖起拇指的方向即为受力方向;或电流叉乘磁场的方向。注意,这些只是描述方式的差异而已——译者注。

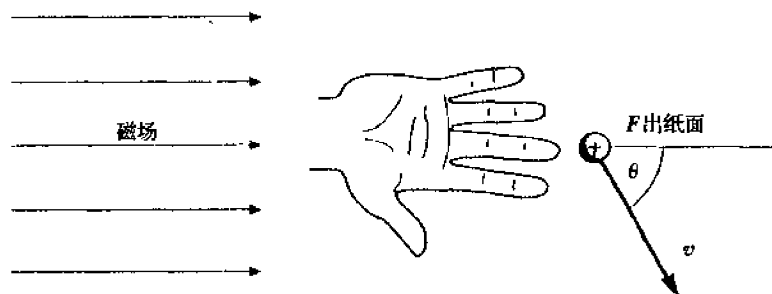


图 30－3

磁场力的大小

磁场对运动电荷作用力的大小取决于下列四种因子的乘积：

(1)q，电量，以库仑 C 为单位；

(2)v，电荷运动速率，以 m/s 为单位；

(3)B，磁感应强度的大小；

(4)$\sin\theta$，θ 为磁力线与速度矢量之间的夹角。

磁感应强度($\boldsymbol{B}$)

空间中一点的磁感应强度用矢量 $\boldsymbol{B}$ 来表示，也称磁通密度或简单地就叫磁场。

这里，我们用运动电荷在磁场中受力的方程来确定磁感应强度的大小：

$$F_M = qvB\sin\theta$$

式中 F_M 以 N 为单位，q 的单位是 C，v 则为 m/s，B 的单位为特斯拉(tesla)，简记作 T。特斯拉也可表示为韦伯/米²，即 $1\text{T}=1\text{Wb/m}^2$(见第三十二章)。B 在 cgs 制中的单位叫高斯(Gauss)(Gs)，

$$1\text{Gs}=10^{-4}\text{T}$$

地磁场的大小为 1 高斯的几分之一。请注意

$$1\text{T}=1\text{Wb/m}^2=1\,\frac{\text{N}}{\text{C}\cdot(\text{m/s})}=1\,\frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}}$$

磁场对电流的作用力

由于电流就是许多正电荷的流动，所以电流受磁场的作用，力的方向就由图 30－3 中的右手定则确定，只是用电流方向取代电荷的速度矢量。

载流导线长度元(ΔL)所受磁场力的大小 ΔF_M 为

$$\Delta F_M = I(\Delta L)B\sin\theta$$

式中 I 为导线电流，θ 为电流方向与磁场方向的夹角。对于在匀强磁场中的直导线 L 所受到的磁场力为

$$F_M = ILB\sin\theta$$

注意，如果导线与磁力线平行，导线不受力；而两者垂直，导线受力最大。与运动电荷情况类似，磁场力垂直于由导线和磁力线所确定的平面。

作用于平面线圈的转矩

处在外磁场 B 中的载流线圈受到转矩 τ 的作用

$$\tau = NIAB\sin\theta$$

式中 A 为线圈的面积，I 为线圈电流，N 为线圈匝数或圈数，θ 为线圈法线与磁力线之间的夹角。至于线圈旋转方向可由下述右手定则确定：

右手握拳,四指沿线圈电流的方向,竖起拇指垂直于线圈平面,转矩的作用就像使拇指转向外磁场方向。而拇指沿外磁场方向时,转矩为零。

例　题

30.1 在 x 轴正方向存在匀强磁场,$B=3.0\text{Gs}$。质子($q=+e$)沿 y 轴正向射入磁场区域,速率为 $5.0\times10^6\text{m/s}$。(a)求作用在质子上的作用力大小和方向。(b)若是电子情况又如何?

解 (a)题意如图 30-4 所示。将磁场 3.0Gs 先换算成 $3.0\times10^{-4}\text{T}$,则质子受到的磁力为

$$F_M=qvB\sin\theta=(1.6\times10^{-19}\text{C})(5.0\times10^6\text{m/s})(3.0\times10^{-4}\text{T})\sin90^\circ$$
$$=2.4\times10^{-16}\text{N}$$

力垂直于 xy 平面,即由磁力线和速度矢量所确定的平面。右手定则告诉我们,力的方向垂直纸面向内,即负 z 轴的方向。

(b)对于电子所受磁场力,大小与质子相同,为 $2.4\times10^{-16}\text{N}$,但因电性相反,所以受力方向相反,朝正 z 方向。

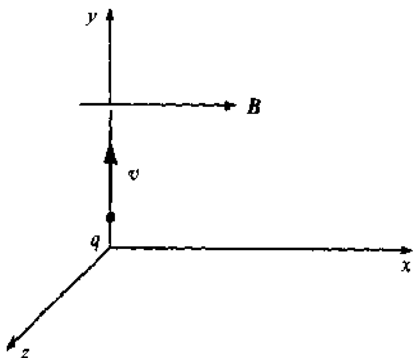


图 30-4

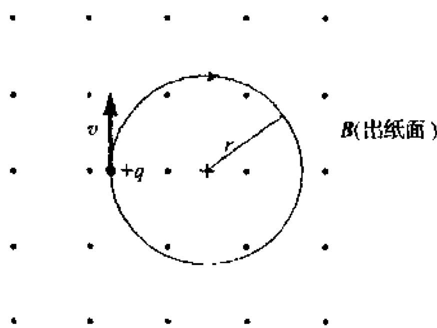


图 30-5

30.2 图 30-5 中的电荷为速率 $5.0\times10^6\text{m/s}$ 的质子($q=+e, m_p=1.67\times10^{-27}\text{kg}$),进入匀强磁场,$B=30\text{Gs}$,方向从纸面向外。试说明质子的运动路径。

解 因为质子速度与 $\boldsymbol{B}$ 垂直,所以磁场力为

$$qvB\sin90^\circ=qvB$$

力垂直于 $\boldsymbol{v}$,所以对质子不作功。它只是使质子偏转,作如图所示的圆周运动。你可用右手定则予以验证。力 qvB 为径向朝内的,提供了质子圆周运动的向心力:

$$F_M=qvB=ma=mv^2/r$$

$$r=\frac{mv}{qB} \tag{1}$$

代入已知数据得

$$r=\frac{(1.67\times10^{-27}\text{kg})(5.0\times10^6\text{m/s})}{(1.6\times10^{-19}\text{C})(30\times10^{-4}\text{T})}=17\text{m}$$

从(1)式可以看到,带电粒子的动量正比它作圆周运动的轨道半径。

30.3 一质子以 $2.0\times10^7\text{m/s}$ 的速率进入磁通密度为 1.5Wb/m^2 的磁场,已知速度方向与磁场的角度为 30°。求质子所受的力。

解

$$F_M=qvB\sin\theta=(1.6\times10^{-19}\text{C})(2.0\times10^7\text{m/s})(1.5\text{Wb/m}^2)\sin30^\circ=2.4\times10^{-12}\text{N}$$

30.4 阴极射线束(即电子束,$m_e=9.1\times10^{-31}\text{kg}, q=-e$)在匀强磁场 $B=4.5\times10^{-3}\text{T}$ 中弯转成半径为 2.0cm 的圆。求电子的速率。

解 带电粒子的轨迹是圆，其速度必然垂直于磁场方向。由 30.2 题中的方程(1)有

$$v=\frac{rqB}{m}=\frac{(0.020\text{m})(1.6\times10^{-19}\text{C})(4.5\times10^{-3}\text{T})}{9.1\times10^{-31}\text{kg}}$$

$$=1.58\times10^{7}\text{m/s}=1.6\times10^{4}\text{km/s}$$

30.5 如图 30-6 所示，带电粒子 q 进入了一个既有电场又有磁场的区域：电场均匀向下，$E=80\text{kV/m}$；磁场垂直于电场同时指向纸面内，$B=0.4\text{T}$。如果粒子的速率大小合适，就可能在电场和磁场的共同作用下不偏转。求这个速率。（这个装置叫作速度选择器。）

解 若粒子带正电，则电场对它的作用力 Eq 向下。而右手定则告诉我们，磁场力 $qvB\sin\theta$ 则朝上。若两种力平衡，粒子不偏转。

$$Eq=qvB\sin90°$$

$$v=\frac{E}{B}=\frac{80\times10^{3}\text{v/m}}{0.4\text{T}}=2\times10^{5}\text{m/s}$$

若粒子带负电，两种力均反向，结论不变。

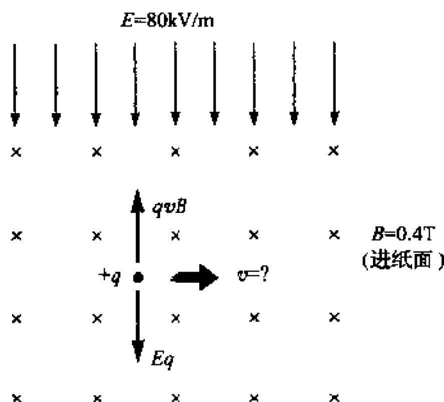


图 30-6

30.6 如图 30-7(a)所示，一质子($q=-e, m_p=1.67\times10^{-27}\text{kg}$)射入沿 x 方向的磁场。已知 $v=8.0\times10^{6}\text{m/s}, B=0.15\text{T}$，速度与磁场夹角 $\theta=30.0°$。试描述质子的运动状态。

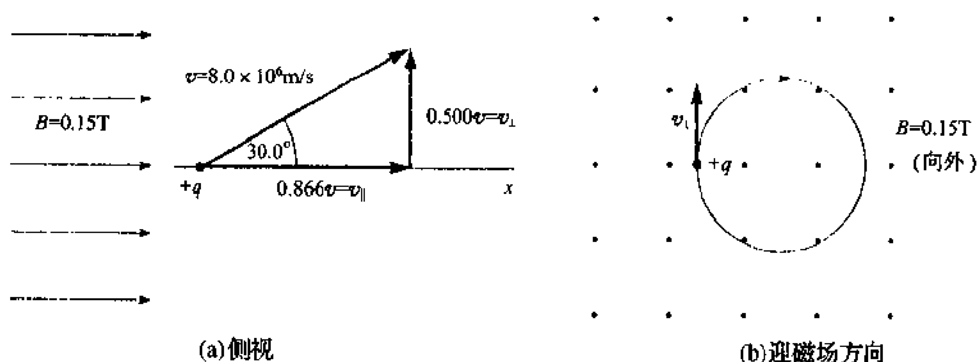


图 30-7

解 将质子速度分解为平行和垂直于磁场方向的分量。沿 v 方向的磁场力为零($\sin\theta=0$)；磁场力在 $v_\perp$ 方向没有 x 分量。因此，质子沿 x 方向的运动是匀速的，速率为

$$v_\parallel=(0.866)(8.0\times10^{6}\text{m/s})=6.93\times10^{6}\text{m/s}$$

而其横向运动为圆周运动(见 30.2 题)。圆周轨道半径为

$$r=\frac{mv_\perp}{qB}=\frac{(1.67\times10^{-27}\text{kg})(0.500\times8.0\times10^{6}\text{m/s})}{(1.6\times10^{-19}\text{C})(0.15\text{T})}=0.28\text{m}$$

质子沿 x 方向作螺旋运动，而螺线的半径为 28cm。质子每转一圈沿 x 方向运动的距离为螺距。为求

螺距，先要求每转一圈的时间，即周期：

$$周期=\frac{2\pi r}{v_{\perp}}=\frac{2\pi(0.28\text{m})}{(0.500)(8.0\times10^{6}\text{m/s})}=4.4\times10^{-7}\text{s}$$

在一个周期中，质子走过的距离即螺距：

$$\begin{aligned}螺距&=(v_{\parallel})(周期)\\&=(6.93\times10^{6}\text{m/s})(4.4\times10^{-7}\text{s})\\&=3.0\text{m}\end{aligned}$$

30.7 α粒子从静止经过 1.0kV 的电势差而被加速，然后进入 $B=0.20\text{T}$ 的磁场中，已知α粒子 $m_{\alpha}=6.68\times10^{-27}\text{kg}$，$q=+2e$，磁场方向垂直于α粒子的速度方向。求α粒子轨迹的半径。

解答 α粒子最终的动能等于加速过程中失去的电势能 Vq

$$\frac{1}{2}mv^{2}=Vq,\quad 或\ v=\sqrt{\frac{2Vq}{m}}$$

由 30.2 题可知，α粒子的路径是圆形的，其轨迹半径为

$$r=\frac{mv}{qB}=\frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2Vq}{m}}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Vm}{m}}$$

$$=\frac{1}{0.20\text{T}}\sqrt{\frac{2(1000\text{V})(6.68\times10^{-27}\text{kg})}{3.2\times10^{-19}\text{C}}}=0.032\text{m}$$

30.8 图 30-8 中的磁场方向是从纸面向外，其大小为 $B=0.80\text{T}$。图示载流导线载有电流 $I=30\text{A}$。求 5.0cm 长的一段导线所受的磁场力大小及方向。

解答 由下式求力的大小：

$$\Delta F_{M}=I(\Delta L)B\sin\theta=(30\text{A})(0.050\text{m})(0.80\text{T})(1)=1.2\text{N}$$

按右手定则，力垂直于导线和磁场的方向指向下。

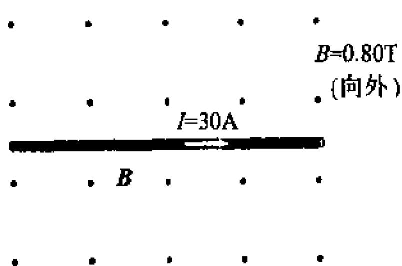


图 30-8

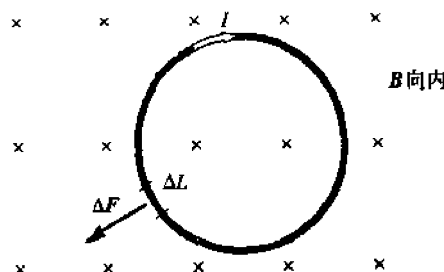


图 30-9

30.9 如图 30-9，电流环平面与磁场方向垂直，已知电流为 I，磁感应强度为 B。求电流环受的合力以及转矩。

解答 考虑 ΔL 电流元受力 ΔF，如图示，方向向外。电流环上与它相对的电流元受力情况与之相反。所以整个电流环所受合力为零。另外，从图中可以看出 ΔF 的作用是使电流元扩张，而非旋转。所以力矩或转矩也为零。也可从转矩方程 $\tau=NIAB\sin\theta$ 求，式中 θ 为磁力线与电流环环面法向之间的夹角，从图中看到，$\theta=0$，从而 $\sin\theta=0$，所以转矩为零。

30.10 图 30-10 所示，由 40 个电流环组成的电线圈，$I=2.0\text{A}$，处于 $B=0.25\text{T}$ 的磁场中。求磁场对线圈的转矩，线圈将怎样旋转？

解答 方法一

$$\tau=NIAB\sin\theta=(40)(2.0\text{A})(0.10\text{m}\times0.12\text{m})(0.25\text{T})(\sin90^{\circ})=0.24\text{N}\cdot\text{m}$$

记住，θ 是磁力线与线圈平面法向之间的夹角。由右手定则，线圈将绕竖直方向的中轴旋转，ad 边向纸外运动。

方法二

由于线圈的 dc 和 ab 两边与磁力线平行，受力为零。而作用于每条竖直边的力为

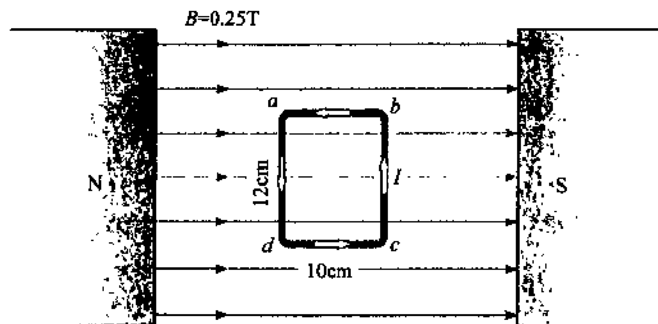


图 30 - 10

$$F_M = ILB = (2.0\text{A})(0.12\text{m})(0.25\text{T}) = 0.060\text{N}$$

ad 受力方向向外，而 bc 向内。若以 bc 边为轴，只有作用于 ad 边的力产生非零转矩

$$\tau = (40\times0.060\text{N})(0.10\text{m}) = 0.24\text{N}\cdot\text{m}$$

它使得 ad 边朝纸面外运动。

30.11 如图 30 - 11 所示，圆形线圈的四分之一处在匀强磁场中，通电流 14A，磁感应强度为 300Gs，方向沿 x 正方向，线圈半径 $a=5.0\text{cm}$。求作用于这段线圈上的转矩和它旋转的方向。

解： 线圈法向$\overline{OP}$与 x 轴成 60°角，即与磁力线成 $\theta=60°$，所以

$$\tau = NIAB\sin\theta = (1)(14\text{A})(\pi\times25\times10^{-4}\text{m}^2)(0.0300\text{T})\sin60°$$
$$= 2.9\times10^{-3}\text{N}\cdot\text{m}$$

右手定则表明，这段线圈将绕 y 轴旋转，使标记为 60°的角度减小。

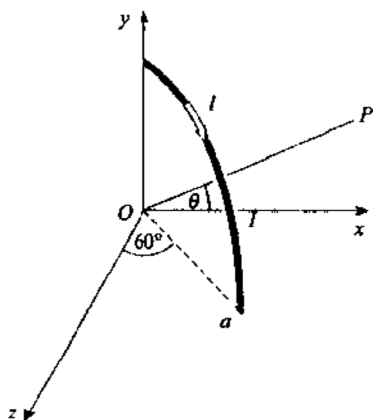


图 30 - 11

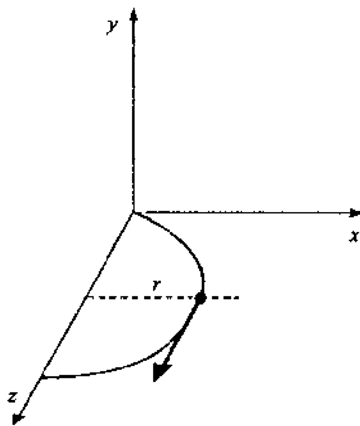


图 30 - 12

30.12 两个电子速率均为 $5.0\times10^6\text{m/s}$，进入匀强磁场 $\boldsymbol{B}$。第一个电子从原点朝 x 正方向射出作圆周运动，与 z 轴正方向相交处 $z=16\text{cm}$。第二个电子沿 y 正方向射出并作直线运动。求磁场 $\boldsymbol{B}$ 的大小和方向。

解： 题意如图 30 - 12 所示。由于沿磁场方向运动的电荷不受力，这样才作直线运动。所以磁场方向必定沿 $+y$ 方向或 $-y$ 方向。

对图中的带负电的电子应用右手定则，可以确定磁场是沿 $-y$ 的方向。

由于圆运动半径 $r=8\text{cm}$，磁场力 Bqv 提供了向心力 mv^2/r，所以有

$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{(9.1\times10^{-31}\text{kg})(5.0\times10^6\text{m/s})}{(1.6\times10^{-19}\text{C})(0.080\text{m})} = 3.6\times10^{-4}\text{T}$$

30.13 地球表面某处地磁场为 $5.0\times10^{-5}\text{T}$，方向在水平面向下偏 40°。该处水平面内有朝北的电流 $I=30\text{A}$。求每米导线受到的磁场力。

解 地球表面各点的磁场方向都是指向北的，因此可将题意用图 30-13 表示。对导线的作用力为

$$F_M=(30\text{A})(L)(5.0\times10^{-5}\text{T})\sin40^\circ$$

或

$$\frac{F_M}{L}=9.6\times10^{-4}\text{N}$$

由右手定则知，力的方向进入纸面，即朝西。

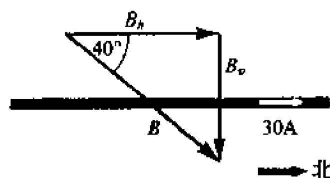


图 30-13

习 题

30.14 一离子($q=+2e$)以 $v=2.5\times10^5$ m/s 速率进入 $B=1.2\text{Wb/m}^2$ 的磁场中，速度方向与磁场垂直，求受到的磁场力。

(答 9.6×10^{-14}N)

30.15 电场和磁场相互垂直，$E=7.7$kV/m，$B=0.14$T。若离子在其中运动并不改变方向，其速率应为多少？

(答 55km/s)

30.16 在图 30-14 所示的三种情况中，粒子都是带正电的。求粒子受到的磁场力，以 B、q 和 v 来描述。

(答 (a)qvB，进入纸面；(b)$qvB\sin\theta$，出纸面；(c)qvB，在纸面内，与基准线成 $\theta+90^\circ$角)

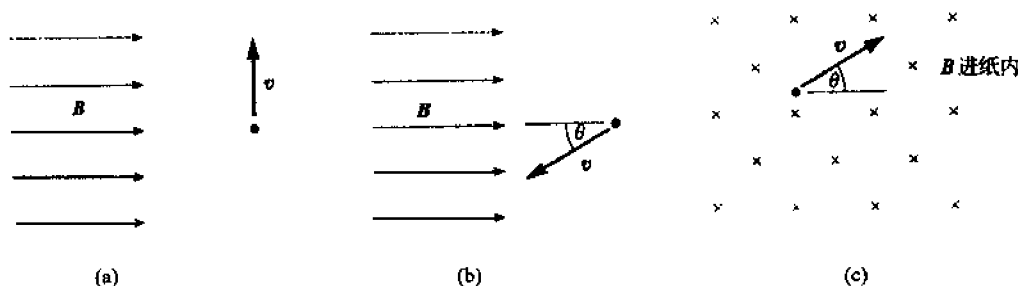


图 30-14

30.17 速率为 1.0×10^7 m/s 的离子在磁场中的运动轨迹是半径为 1.55m 的圆，已知磁场为 0.134Wb/m^2。离子可能有多大质量？(答案可能不是惟一的)

(答 $n(3.3\times10^{-27}\text{kg})$，离子电量为 ne)

30.18 一静止电子受到 3750V 的电势差加速并进入 4.0×10^{-3}T 的磁场中，速度与磁场方向垂直。求电子运动的轨道半径。

(答 5.2cm)

30.19 一电子以 5.0×10^6 m/s 的初速度从坐标原点射出，方向与 x 轴成 20°角。磁场 $B=2.0$mT，方向沿 x 轴正向。试描述该电子的运动状态。

(答 螺旋线，$r=0.49$cm，螺距 8.5cm)

30.20 一束电子可以在相互垂直的电场和磁场中作直线运动。若去掉电场而保留磁场，则电子将作半径为 1.14cm 的圆运动。若 $E=8.00$kV/m，$B=2.00$mT。求电子的荷质比。

(答 $e/m_e=175$GC/kg)

30.21 一段 15cm 长的直载流导线，$I=6.0$A，在 0.40T 的匀强磁场中，若导线与磁场成(a)直角或(b)30°角，求导线受力。

(答 (a)0.36N，(b)0.18N)

30.22 求地磁场对于竖直向下的载流导线的作用力方向。

(答 水平朝东)

30.23 求图 30-15 中载流导线各段所受的力。已知 $B=0.15$T，$I=5.0$A。

(答 AB 和 DE 段，受力为零；BC 段受力 0.12N，垂直纸面向内，CD 段受力 0.12N，向外)

30.24 一个 25 圈的矩形线圈悬挂在 0.20Wb/m^2 的磁场中，线圈平面与磁场方向平行，线圈 15cm 的边垂直于磁场，12cm 的边与磁场平行。若线圈所受到的转矩为 5.4N·m，求通过线圈的电流。

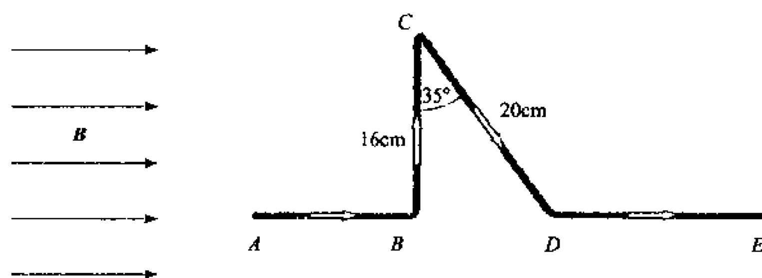


图 30－15

（答　60A）

30.25　一静止电子受到 800V 电势差加速后，运动方向与 30Gs 的磁场垂直，求轨道半径和轨道运动的频率。

（答　3.2cm，84MHz）

30.26　一个质子和一个氘核（$m_d \approx 2m_p$，$q_d = e$）受到相同的电势差加速并沿同一条线进入磁场。若质子作圆周运动的轨道半径为 R_p，求氘核的轨道半径 R_d。

（答　$R_d = R_p\sqrt{2}$）

第三十一章 磁场的产生

磁场的产生

运动电荷(当然包含电流)产生磁场。图 31－1 表明几种电流产生磁场的例子，并在每个小图下标明了给定的 P 点处磁感应强度 B 的大小，图中电流周围的介质为真空或空气。常数 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A}$ 称为真空磁导率。

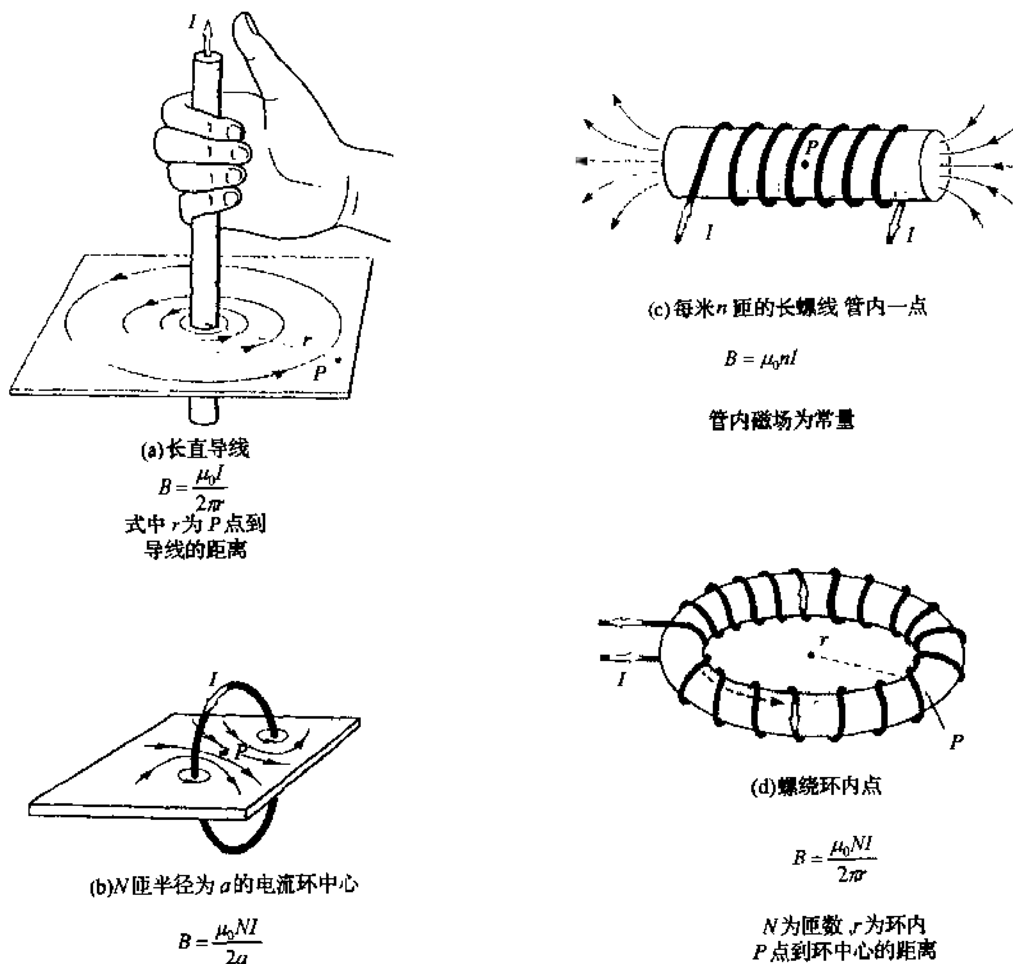


图 31－1

磁场的方向

用右手定则确定载流导线产生的磁场的方向，如图 31－1(a)所示：右手握住导线，拇指指向电流的方向，则其他四指环绕的方向即磁感应强度的方向。图 31－1(b)中载流线圈所产生磁场的方向也同样用右手定则求出*。

铁磁物质

铁和一些过渡族元素可以极大地增强磁场的大小，被称为铁磁性物质。而其他元素对磁场的影响很小。铁磁物质中包含许多磁畴，即原子整齐排列的小区域，它们就像一些微小的磁

* 在图 31－1(b)、(c)、(d)中，四指沿电流方向，拇指指向为电流所产生的磁场方向——译注。

铁。当这些磁畴整齐排列以后，就形成了一个有磁性的物体。永久磁铁中磁畴的排列比较稳定，不会轻易被瓦解。

磁矩

一个平面载流线圈(电流为 I，面积为 A)的磁矩为 IA。磁矩是矢量，它垂直于线圈平面，与线圈产生的磁场方向相同。N 圈平面线圈在磁场 B 中所受到的转矩可以用磁矩来表示：$\tau=N(IA)B\sin\theta$，式中 θ 为磁场与磁矩之间的夹角。

电流元产生的磁场

图 31－2 所示一小段电流元 ΔL 在 P 点产生磁场 $\Delta\boldsymbol{B}$，其大小由毕奥-萨伐尔定律给出

$$\Delta B=\frac{\mu_0 I\Delta L}{4\pi r^2}\sin\theta$$

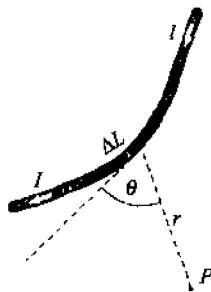


图 31－2

式中 r 和 θ 已在图中标出。$\Delta\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于 $\Delta\boldsymbol{L}$ 和 r 所确定的平面(即纸面)。对于图示情况，应用右手定则可知 $\Delta\boldsymbol{B}$ 的方向垂直于纸面向外。

当 r 与 ΔL 相平行时，$\theta=0$，所以 $\Delta B=0$，即直载流导线在导线上产生的磁场为零。

例　题

31.1 长直载流导线 $I=15\text{A}$，求距导线 5cm 处的 B 值(在空气中)。

解 由图 31－1(a)得

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(15\text{A})}{2\pi(0.05\text{m})}=6\times10^{-5}\,\text{T}$$

31.2 有 40 圈的平面圆形线圈，直径为 32cm。若中心处磁场为 $3.0\times10^{-4}\,\text{Wb/m}^2$，求其电流大小。

解 由图 31－1(b)，有

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2r}\quad 或\quad 3.0\times10^{-4}\,\text{T}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(40)(I)}{2(0.16\text{m})}$$

解得 $I=1.9\text{A}$

31.3 中空螺线管共 2000 圈，长 60cm，直径 2.0cm，通电电流 5.0A，求内部磁通密度。

解 由图 31－1(c)得

$$B=\mu_0 nI=(4\pi\times10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})\left(\frac{2000}{0.60\text{m}}\right)(5.0\text{A})=0.021\text{T}$$

31.4 按波尔的氢原子模型，电子在半径为 $5.3\times10^{-11}\,\text{m}$ 的圆周上绕核运动，速率为 $2.2\times10^6\,\text{m/s}$。求由于电子运动在核所在位置所产生的 B 值。

解 在 26.17 题中，我们知道电子作轨道运动相当于电流环，$I=1.06\text{mA}$。所以在环中心处的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2r}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,\text{T}\cdot\text{m/A})(1.06\times10^{-3}\,\text{A})}{2(5.3\times10^{-11}\,\text{m})}=13\text{T}$$

31.5 两条长直载流导线分别与 x 轴与 y 轴重合，电流方向均沿坐标正向，均为 5A(见图 31－3)。求合成磁场为零的位置。

解 用右手定则可知，两条载流导线产生的磁场可能在第一、三象限相互抵消。过原点并与 x

轴、y 轴夹角为 45°的直线上，两导线产生的磁场完全抵消（或说在直线 $x=y$ 上）。

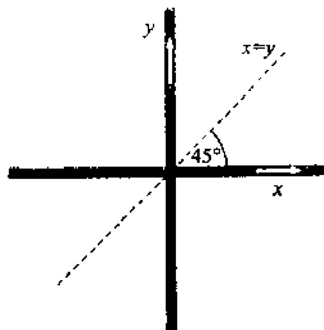


图 31 - 3

31.6 螺线管内磁场为 4.0mT；沿管的中轴线有一长直载流导线，$I=20$A。求距导线 3.0mm 处的合成磁场。

解 题意见图 31 - 4，螺线管磁场为 $\boldsymbol{B}_s$，方向与在围绕导线的圆周上且与载流直导线平行。而直导线产生的磁场 $\boldsymbol{B}_w$ 与 $\boldsymbol{B}_s$ 垂直。$\boldsymbol{B}_w$ 的大小为

$$B_w=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})(20\mathrm{A})}{2\pi(3.0\times10^{-3}\mathrm{m})}=1.33\mathrm{mT}$$

由于 $\boldsymbol{B}_s$ 与 $\boldsymbol{B}_w$ 垂直，已知 $B_s=4.0$mT，所以合成磁场 $\boldsymbol{B}$ 的大小为

$$B=\sqrt{(4.0\mathrm{mT})^2+(1.33\mathrm{mT})^2}=4.2\mathrm{mT}$$

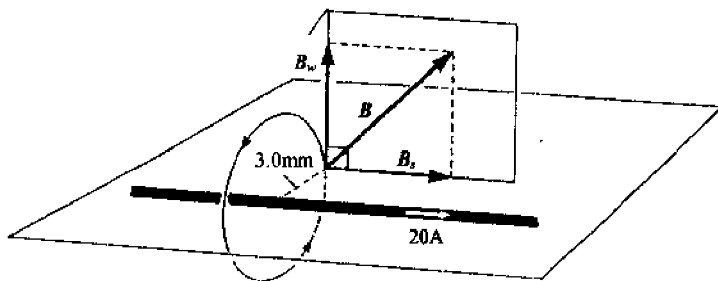


图 31 - 4

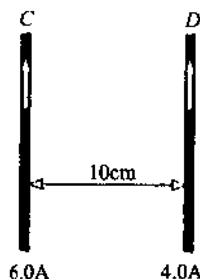


图 31 - 5

31.7 如图 31 - 5 所示，两条长直载流导线 C 和 D 相距 10cm，分别载流 6.0A 和 4.0A。若两电流方向(a)平行或(b)反平行，求对 D 上一段 1.0m 长的导线的作用力。

解 (a)在图 31 - 5 中，C 导线在 D 处产生的磁场垂直进入纸面，其大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})(6.0\mathrm{A})}{2\pi(0.10\mathrm{m})}=1.2\times10^{-5}\mathrm{T}$$

对 D 上 1.0m 长导线的作用力为

$$F_M=ILB\sin\theta=(4.0\mathrm{A})(1.0\mathrm{m})(1.2\times10^{-5}\mathrm{T})(\sin 90^\circ)=48\mu\mathrm{N}$$

右手定则告诉我们，作用在 D 上的力向左，两导线相互吸引。

(b)D 的电流反向，则力也反向，两导线相互排斥。单位长度受力大小依然为 48μN。

31.8 三条直长载流导线如图 31 - 6，求 C 上 25cm 长的一段导线所受的力。

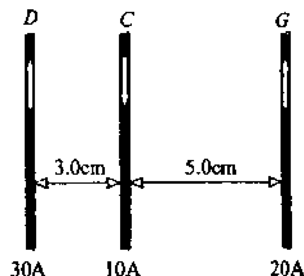


图 31 - 6

解 载流导线 D 在 C 产生的磁场为

$$B_D=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})(30\mathrm{A})}{2\pi(0.030\mathrm{m})}=2.0\times10^{-4}\mathrm{T}$$

方向为进入纸面；而 G 在 C 产生的磁场为

$$B_G=\frac{(4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{T\cdot m/A})(20\mathrm{A})}{2\pi(0.050\mathrm{m})}=0.80\times10^{-4}\mathrm{T}$$

方向为出纸面。因此合成磁场为 $B=2.0\times10^{-4}-0.80\times10^{-4}=1.2\times10^{-4}$(T)

方向进入纸面。对 C 上 25cm 长的一段导线的作用力为

$$F_M=ILB\sin\theta=(10\mathrm{A})(0.25\mathrm{m})(1.2\times10^{-4}\mathrm{T})(\sin 90^\circ)=0.30\mathrm{mN}$$

由右手定则判断，对 C 的作用指向右边。

31.9 平面线圈共 10 圈，直径为 2.0cm，电流 0.50A，处在长螺线管内部，螺线管 25cm 长一段有 200 圈，电流为 2.4A。若保持线圈的轴线垂直于螺线管的轴线，需要对线圈加多大

的转矩？

解 用角标 S 和 C 分别表示螺线管和线圈。有

$$\tau = N_c I_c A_c B_s \sin 90^\circ$$

但 $B_s = \mu_0 n I_s = \mu_0 (N_s/L_s) I_s$，这给出

$$\tau = \frac{\mu_0 N_c N_s I_c I_s (\pi r_c^2)}{L_s}$$

$$= \frac{(4\pi\times10^{-7}\mathrm{T\cdot m/A})(10)(200)(0.50\mathrm{A})(2.4\mathrm{A})\pi(0.010\mathrm{m})^2}{0.25\mathrm{m}}$$

$$= 3.8\times10^{-6}\mathrm{N\cdot m}$$

31.10 载流导线如图 31－7，求 P 点的磁场。

解 由于 P 点在两段导线的直线延长线上，所以直线段导线在 P 点不产生磁场。而半径为 r 的圆线圈中点处的磁场为 $B = \mu_0 I/2r$，这里只有 3/4 线圈，所以 P 点磁场为

$$B = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\mu_0 I}{2r}\right) = \frac{(3)(4\pi\times10^{-7}\mathrm{T\cdot m/A})(40\mathrm{A})}{(4)(2)(0.020\mathrm{m})}$$

$$= 9.4\times10^{-4}\mathrm{T} = 0.94\mathrm{mT}$$

方向出纸面。

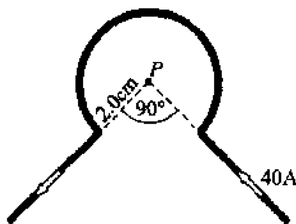


图 31－7

习　题

31.11 长直载流导线 $I=9.0\mathrm{A}$。求距导线 6.0cm 处的磁通密度(设在空气中)。

(答　30μT)

31.12 一个密绕 25 圈的平面线圈，直径为 10cm，电流为 4.0A。求中心处的 B 值。

(答　$1.3\times10^{-3}\mathrm{Wb/m^2}$)

31.13 中空螺线管长为 50cm，共 4000 圈，电流 0.25A。求内部 B 值。

(答　2.5mT)

31.14 中空螺绕环的中心线半径为 5cm，共 750 圈。若中心线处磁场为 1.8mT，通过螺绕环的电流应为多少？

(答　0.6A)

31.15 两条长直载流导线相互平行，电流方向也相同，分别为 2A 和 6A。导线相距 4cm。求导线间单位长度(米)受到的作用力。

(答　$6\times10^{-5}\mathrm{N/m}$，吸引)

31.16 在空气中两条固定的长直载流导线 A 和 B 相互平行，相距 10cm，电流分别为 40A 和 20A，方向相反。求下列两点处的合成磁场：(a)两导线中线处；(b)距 A 8.0cm 而距 B 18cm 处。(c)若在导线 A、B 中间、且与 A、B 位于同一平面，上有第三条平行于 A、B 的载流直导线，载有电流 5.0A，电流方向与导线 A 中电流方向相同，求作用在第三条导线上单位长度(米)上的作用力。

(答　(a)$2.4\times10^{-4}\mathrm{T}$；(b)$7.8\times10^{-5}\mathrm{T}$；(c)$1.2\times10^{-3}\mathrm{N/m}$，朝向 A)

31.17 图 31－3 中两导线的电流均为 12A，方向如图。求以下两点的 B 值：(a)$x=-5.0\mathrm{cm}$，$y=5.0\mathrm{cm}$；(b)$x=-7.0\mathrm{cm}$，$y=-6.0\mathrm{cm}$。

(答　(a)96μT；向外；(b)5.7μT，向内)

31.18 螺线管 5.0cm 长，200 圈。内部为软铁，这样将使内部磁场增强 130 倍(即软铁的相对磁导率为 130)。当线圈电流为 0.30A 时，求这个电磁铁内部的 B 值。

(答　0.20T)

31.19 一个 50cm 长、2000 圈、电流为 0.70A 的真空螺线管。轴上一点射出一电子，初速度与轴线成 10°角。(a)若螺线管直径为 1.6cm，而电子即将要射中线圈的内表面，电子的速率为多少？(b)电子螺线运动的螺距为多少？

(答　(a)$1.4\times10^{7}\mathrm{m/s}$，(b)14cm)

第三十二章　感应电动势和磁通量

物质的磁效应

多数物质对稳定磁场的影响非常微小，这一点可很容易地用实验来验证。

假设在真空中的长螺线管或螺绕环通过一定电流，在其内部某点的磁感应强度为 B_0，下角标“0”表示真空。如果将螺线管或螺绕环内充满某种介质，那么同一点处的磁感应强度为 B，我们定义

$$物质的相对磁导率\ k_M=\frac{B}{B_0}$$

$$物质的磁导率，\mu=k_M\mu_0$$

μ_0 为真空磁导率，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{T\cdot m/A}$。

抗磁物质的磁导率比 1 稍小（如固态铅，为 0.999984），它使得螺线管或螺绕环内的磁感应强度比真空中的磁感应强度略低一点。

顺磁物质的磁导率比 1 稍大（如固态铝，为 1.000021），它使得螺线管或螺绕环内的磁感应强度稍大一点。

铁磁物质，如铁及其合金，k_M 约为 50 或更高。它们的存在将使螺线管或螺绕环内部的磁感应强度大大增强。

磁感应线

用磁感应线可以形象地描述磁场，各点 $\boldsymbol{B}$ 的方向即磁感应线的切线方向。而用垂直于磁场方向单位面积上所穿过磁感应线的多少来描述磁场 B 的大小，即某点处 B 的大小正比于该点附近垂直于磁场方向磁感应线的面密度。

磁通量（Φ_M）

通过面积 A 的磁通量定义为 $\boldsymbol{B}$ 垂直于 A 面的分量 $B_\perp$ 与 A 之积：

$$\Phi_M=B_\perp A=BA\cos\theta$$

式中 θ 为磁场方向与该表面法线间的夹角。磁通量的单位为韦伯（Wb）。

感应电动势

当线圈所包围的面内磁通量变化时，就会在圈中产生感应电动势。感应电动势只有当这个面内的磁通量发生变化的时间内才存在。

法拉第定律

假设通过 N 匝线圈所包围的面积的磁通量发生变化，在 Δt 时间内磁通量改变量为 $\Delta\Phi_M$，则线圈两端之间的平均感应电动势为

$$\mathscr{E}=-N\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}$$

假如 $\Delta\Phi/\Delta t$ 的单位为 Wb/s，则电动势 $\mathscr{E}$ 的单位为伏特。

楞次定律

上式中负号表示感应电动势总是反抗引起它的磁通量的变化。这就是楞次定律。比如，通过线圈所包围的面的磁通量增加，则由感应电动势产生的感应电流就会产生磁通量去反抗

或抵消正在增加的磁通量。反之，若通过线圈平面的磁通量减少，则感应电流产生的磁通量就去补偿减少的磁通量。楞次定律是能量守恒的结果。否则，感应电流增磁通量，而增强的磁通量又产生感应电流，这样将会无止境地增加下去。

动生电动势

当导体在磁场中作切割磁力线运动时，导体两端便会感应出电动势来，这种电动势称动生电动势。按法拉第定律

$$|\mathscr{E}|=\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}$$

绝对值意味着我们只关心动生电动势的大小，而其方向将在以后讨论。

长度为 L 的直导线以 $\boldsymbol{v}$ 运动，若 $\boldsymbol{v}$ 垂直于 $\boldsymbol{B}$，则动生电动势为

$$|\mathscr{E}|=BLv$$

式中的 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 必须相互垂直。

楞次定律依然适用于动生电动势，它表明动生电动势反抗它原来的运动。由于导体中有感生电流，故导体在磁场中运动会受到磁场力的作用，而这个力的方向是反抗导体在磁场中运动的。感生电流的方向，即动生电动势的方向。

例　题

32.1 铁芯螺线管长 40cm，截面积 8.0cm^2，共 300 圈，载流 1.2A。已知铁芯的相对磁导率为 600，求(a)内部的磁场和(b)通过线圈截面的磁通量。

解 (a)由图 31-1(c)知

$$B_0=\frac{\mu_0 NI}{L}=\frac{(4\pi\times10^{-7}\text{T}\cdot\text{m/A})(300)(1.2\text{A})}{0.40\text{m}}=1.13\text{mT}$$

所以

$$B=k_M B_0=(600)(1.13\times10^{-3}\text{T})=0.68\text{T}$$

(b)由于磁力线垂直于线圈截面，所以有

$$\Phi_M=B_\perp A=BA=(0.68\text{T})(8.0\times10^{-4}\text{m}^2)=54\mu\text{Wb}$$

32.2 中空螺绕环内的磁通量为 0.65mWb，若环内充满某种物质时，磁通量为 0.91mWb。求这种物质的相对磁导率和磁导率。

解 螺绕环内为空气与真空，磁导率几乎相同。由 $k_M=B/B_0$ 和 $\Phi_M=B_\perp A$，有

$$k_M=\frac{0.91\text{mWb}}{0.65\text{mWb}}=1.40$$

此为相对磁导率。而磁导率为

$$\mu=k_M\mu_0=(1.40)(4\pi\times10^{-7}\text{T}\cdot\text{m/A})=5.6\pi\times10^{-7}\text{T}\cdot\text{m/A}$$

32.3 如图 32-1 所示。四分之一圆周和两个半径组成了封闭回路。其面积为 15cm^2。磁场

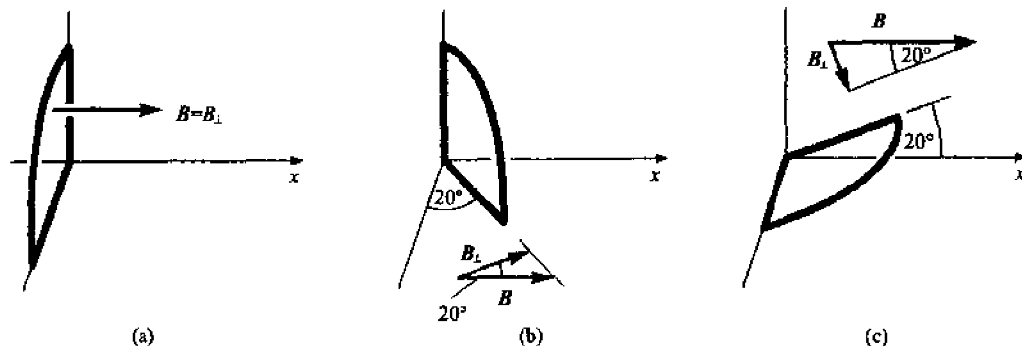


图 32-1

沿 x 正方向，$B=0.16\mathrm{T}$。求回路在三种取向下，所通过的磁通量。

解 已知 $\Phi=B_{\perp}A$，所以

(a) $\Phi_M=B_{\perp}A=BA=(0.16\mathrm{T})(15\times10^{-4}\mathrm{m}^2)=2.4\times10^{-4}\mathrm{Wb}$

(b) $\Phi_M=(B\cos 20^\circ)A=(2.4\times10^{-4}\mathrm{Wb})(\cos 20^\circ)=2.3\times10^{-4}\mathrm{Wb}$

(c) $\Phi_M=(B\sin 20^\circ)A=(2.4\times10^{-4}\mathrm{Wb})(\sin 20^\circ)=8.2\times10^{-5}\mathrm{Wb}$

32.4 半径为 R 的半球面放在磁场中，如图 32－2 所示。求通过半球面的磁通量。

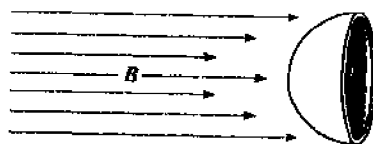


图 32－2

解 穿过半球面的磁力线数与穿过图中横截面(涂成阴影的部分)的磁力线是相同的。

即

$$\Phi=B_{\perp}A=B\pi R^2$$

32.5 一圆形线圈共 50 匝，半径均为 3.0cm。磁场的方向垂直于线圈平面。若在 2.0ms 内磁场由 0.10T 变化到 0.35T。求线圈的平均感应电动势。

解

$$\Delta\Phi_M=B_{末}A-B_{初}A=(0.25\mathrm{T})(\pi r^2)$$
$$=(0.25\mathrm{T})\pi(0.030\mathrm{m})^2=7.1\times10^{-4}\mathrm{Wb}$$
$$|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right|=(50)\left(\frac{7.1\times10^{-4}\mathrm{Wb}}{2\times10^{-3}\mathrm{s}}\right)=18\mathrm{V}$$

32.6 图 32－3 中的磁铁左右移动时，会在线圈中感应出电动势。求当磁铁(a)向右或(b)向左运动时，图中电阻上电流的方向。

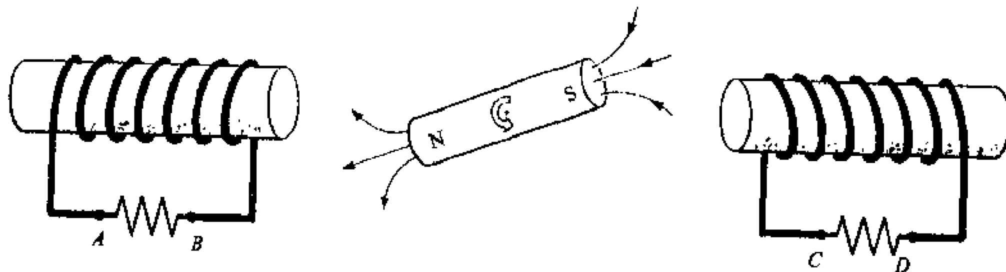


图 32－3

解 (a)先考察左边的线圈。穿过线圈的磁场总体上是朝左的。磁铁向右运动，穿过线圈的磁通量减少。为补偿这种减少，线圈中感生电流的方向应产生朝左的磁场。将右手定则应用于线圈的左端，可知通过电阻器的电流方向为从 B 到 A。

再来考察右边的线圈。由于线圈内的磁场总的来说是朝左的，当磁铁朝右运动时，穿过线圈面的磁通量将增加。线圈中感生电流将产生朝右的磁场以抵消这种增加的磁通。对线圈的右端应用右手定则，可知线圈内产生了向右的磁场，流过电阻器的电流方向应为从 C 到 D。

(b)磁铁向左运动，结果与(a)相反。用同样的分析，可知电阻器上电流分别为从 A 到 B 和从 D 到 C。

32.7 在图 32－4(a)中，沿 x 正方向有磁场，$B=0.20\mathrm{T}$。在 yz 平面中有一闭合线圈，其截面积为 $5.0\mathrm{cm}^2$，并绕坐标轴 CD 旋转。A 点从图中的位置朝 x 的正方向转动。已知在

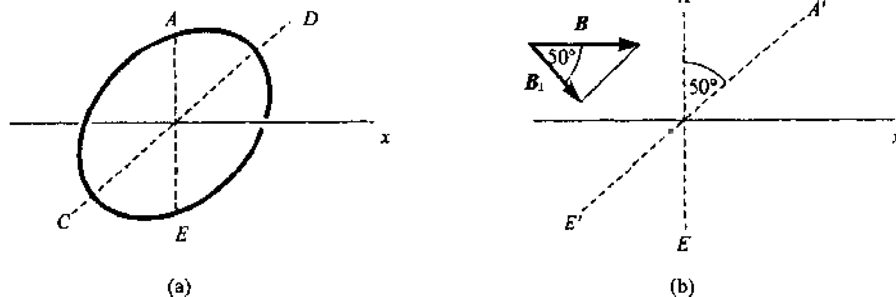


图 32－4

0.20s 内转过 50°，见图 32-4(b)。(a)通过线圈面的磁通量变化了多少？(b)产生的平均感应电动势为多少？(c)线圈上部的电流是从 A 到 C 还是从 C 到 A？

解 (a)初始磁通量

$$=B_{\perp}A=BA=(0.20\text{T})(5.0\times10^{-4}\text{m}^2)=1.0\times10^{-4}\text{Wb}$$

最后磁通量

$$=(B\cos 50°)A=(1.0\times10^{-4}\text{Wb})(\cos 50°)=0.64\times10^{-4}\text{Wb}$$

$$\Delta\Phi_M=0.64\times10^{-4}\text{Wb}-1.0\times10^{-4}\text{Wb}=-0.36\times10^{-4}\text{Wb}=-36\mu\text{Wb}$$

(b)
$$|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right|=(1)\left(\frac{0.36\times10^{-4}\text{Wb}}{0.20\text{s}}\right)=1.8\times10^{-4}\text{V}=0.18\text{mV}$$

(c)从左到右通过线圈面的磁通量减少了。感生电流的方向应使从左到右的磁通加强，按右手定则，电流是从 A 到 C 的方向。或者说线圈会受到一个趋向于使它转向初始位置的转矩的作用。按照第三十章中所讲的右手定则，也可判断出电流方向应为从 A 到 C。

32.8 一个 50 圈的线圈在磁铁的两极间运动。已知初始时线圈截面的磁通量为 3.1×10^{-4}Wb，在 0.020s 后改变为 0.10×10^{-4}Wb。求线圈中感应电动势的平均值。

解

$$|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right|=50\,\frac{(3.1-0.10)\times10^{-4}\text{Wb}}{0.020\text{s}}=0.75\text{V}$$

32.9 30cm 长的铜棒垂直于磁场，$B=0.80\text{Wb/m}^2$，且沿着与磁场垂直的方向以 0.50 m/s的速率运动。试求铜棒的动生电动势。

解

$$|\mathscr{E}|=BLv=(0.80\text{Wb/m}^2)(0.30\text{m})(0.50\text{m/s})=0.12\text{V}$$

32.10 如图 32-5 所示，金属杆与两导线接触而形成回路，回路平面垂直磁场，$B=0.15$T。已知电阻为 3.0Ω。若使金属棒沿图中的方向以 2.0m/s 的速率运动，需对它施多大的力？电阻器能量损耗率为多少？

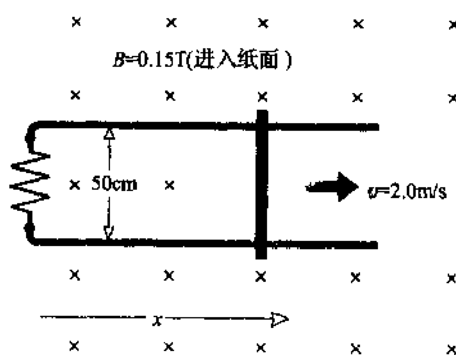


图 32-5

解 金属杆运动感应出的电动势在回路中产生逆时针的电流，而载流金属杆又受到磁场向左的作用力。欲使杆向右作匀速运动，必须使拉力与磁场力相平衡。

方法一

金属杆上感应电动势为动生电动势

$$|\mathscr{E}|=BLv=(0.15\text{T})(0.50\text{m})(2.0\text{m/s})=0.15\text{V}$$

电流为

$$I=\frac{|\mathscr{E}|}{R}=\frac{0.15\text{V}}{3.0\Omega}=0.050\text{A}$$

所以有

$$F_M=ILB\sin 90°=(0.050\text{A})(0.50\text{m})(0.15\text{T})(1)=3.8\text{mN}$$

方法二

从线圈回路截面内磁通量变化率的角度求感应电动势为

$$|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right|=(1)\frac{B\Delta A}{\Delta t}=\frac{B(L\Delta x)}{\Delta t}=BLv$$

结论与方法一相同。以下求电阻消耗的功率：

$$P=I^2R=(0.050\text{A})^2(3.0\Omega)=7.5\text{mW}$$

或者从动力学能量关系出发，得到相同的结论

$$P=Fv=(3.75\times10^{-3}\text{N})(2.0\text{m/s})=7.5\text{mW}$$

32.11 如图 32-6(a)所示，长度为 L、质量为 m、电阻为 R 的金属棒与斜面上的导线保持接

触，并无摩擦地沿斜面下滑。导线电阻可忽略。竖直向下的方向有磁场 **B**。求金属棒最终的速率，即它所获得的匀速率。

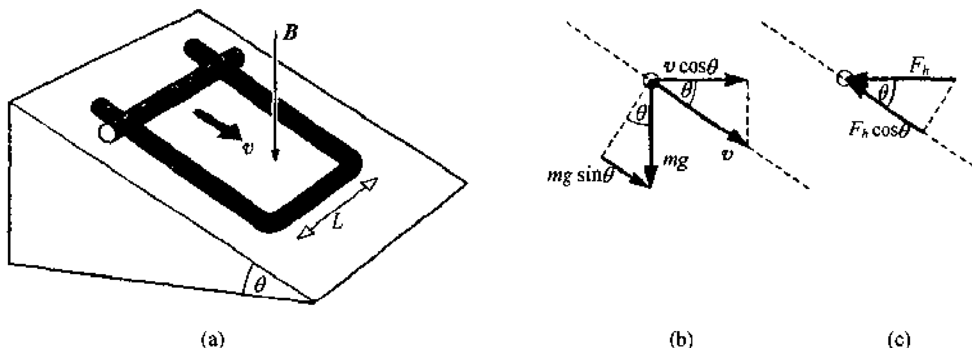


图 32-6

解 如图 32-6(b)，重力使棒沿斜面下滑，而棒内感生电流切割磁场受力阻碍向下滑动。

由棒在磁场中运动而感应的电动势为

$$\mathscr{E}=(Blv)_{\perp}=BL(v\cos\theta)$$

线圈中的感生电流为

$$I=\frac{\text{emf}}{R}=\left(\frac{BLv}{R}\right)\cos\theta$$

载流导线在磁场中受力垂直于导线以及磁力线所确定的平面。所以棒受到水平作用力 $\boldsymbol{F}_h$，垂直于 **B** 和棒确定的平面，而其大小为

$$F_h=BIL=\left(\frac{B^2L^2v}{R}\right)\cos\theta$$

如图 32-6(c)所示。这个磁场力沿斜面向上的分量为

$$F_h\cos\theta=\left(\frac{B^2L^2v}{R}\right)\cos^2\theta$$

当它与重力沿斜面的分量相等时，棒达到匀速的运动，所以有

$$\left(\frac{B^2L^2v}{R}\right)\cos^2\theta=mg\sin\theta$$

解得最终速率为

$$v=\left(\frac{Rmg}{B^2L^2}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

你能证明在 $\theta=0$，$B=0$，或 $\theta=90°$，以及 R 非常大或非常小的极限情况下，上述结论的合理性吗？

32.12 如图 32-7 所示，导体棒绕 C 点旋转，角速率为 5.0r/s(圈/秒)。已知棒长 80cm，磁感应强度 $B=0.30\text{T}$(方向垂直纸面向内)。求棒两端电势差的大小。

解 让我们观察一个虚构的回路 $CADC$。通过这个回路截面的磁通量随时间而增加。回路中的感应电动势即我们所求的电势差。

$$|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right|=(1)\left(\frac{B\Delta A}{\Delta t}\right)$$

棒扫过的回路面积从零到整个圆面积(πr^2)需四分之一秒。所以

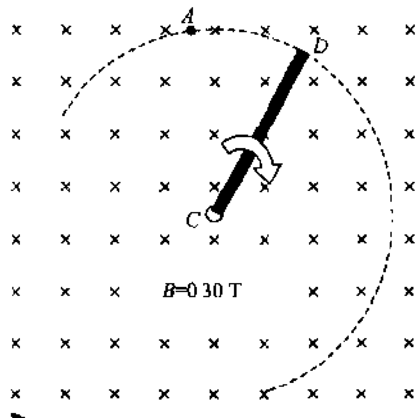


图 32-7

$$|\mathscr{E}|=B\frac{\Delta A}{\Delta t}=B\frac{\pi r^2}{0.20\text{s}}$$

$$=(0.30\text{T})\frac{\pi(0.80\text{m})^2}{0.20\text{s}}=3.0\text{V}$$

32.13 一个直径 6.0cm、共 100 圈的线圈，阻值为 5.0Ω，被放在一磁铁两极之间，使通过线圈截面的磁通量为最大。若突然间将线圈移出磁场，与线圈相连接的内阻为 595Ω 的检流计中流过 1.0×10^{-4}C 的电荷。求磁极中间的磁感应强度 B。

解答　设线圈截面积为 A，则开始时通过截面的磁通量为 BA。突然间磁通量变为零。所以有

$$|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right|=N\frac{BA}{\Delta t}$$

已知流过电量为 $\Delta q=1.0\times10^{-4}$C。按欧姆定律有

$$|\mathscr{E}|=IR=\frac{\Delta q}{\Delta t}R$$

式中 $R=600\Omega$，为回路总电阻。二式联立求 B 有

$$B=\frac{R\Delta q}{NA}=\frac{(600\Omega)(1.0\times10^{-4}\text{C})}{(100)(\pi\times9.0\times10^{-4}\text{m}^2)}=0.21\text{T}$$

习　题

32.14 保持励磁电流不变，铁芯螺线管内的磁通量为 9.0×10^{-4}Wb，而取出铁芯则变为 5.0×10^{-7}Wb。求铁芯材料的相对磁导率。

（答　1.8×10^3）

32.15 在图 32-8 中，沿 x 方向的磁场为 0.2T。求通过图中箱子各面的磁通量。

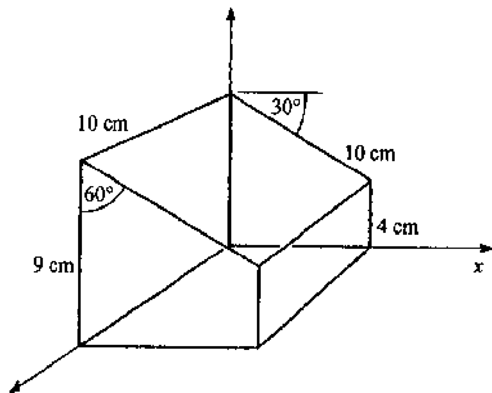


图 32-8

（答　通过底面、后面和前面，磁通量为零；通过顶面为 1mWb；通过左面为 2mWb；通过右面为 0.8mWb）

32.16 60cm 长、半径为 0.75cm 的铁棒上绕 5000 匝线圈，励磁电流为 3.0A，铁的相对磁导率为 300，求通过该螺线管的磁通量。

（答　1.7mWb）

32.17 房间的四面墙正好面对东、南、西、北各方向。北墙面积为 15m^2，东墙面积为 12m^2，地面面积为 35m^2。该地地磁场为 0.60Gs，方向为水平面向下偏 50°且北偏东 7.0°。求通过北墙、东墙和地面的磁通量。

（答　0.57mWb，56μWb，1.6mWb）

32.18 在 32.16 题中通过螺线管的磁通量在 0.050s 内降低了 1.0mWb。求螺线管两端的感生电动势。

（答　67V）

32.19 半径为 8.0mm 共 50 匝的平面线圈放置在 $B=0.30$T 的磁场中。一开始时通过线圈平面的磁通为极大。在 0.020s 内将线圈旋至一个位置，通过线圈平面的磁通为零。求线圈两端产生的感应电动势的平均值。

（答　0.15V）

32.20 边长 20cm 共 15 匝的方形线圈以 3.0 m/s的速率向右运动，见图 32-9。求感应电动势的大小和方向：(a)在图示

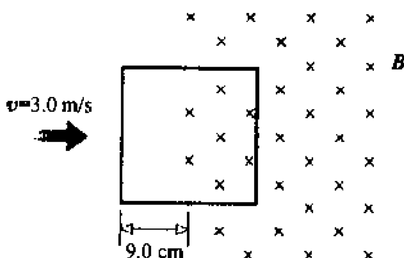


图 32-9

的时刻和(b)线圈完全进入磁场以后。已知磁感应强度 $B=0.40\text{T}$,方向垂直于纸面向内。

(答　(a)3.6V,逆时针;(b)零)

32.21 在图 32-10 中,磁铁绕中心点旋转。求图示情况下,通过(a)电阻 AB 和(b)电阻 CD 的感应电流的方向。

(答　(a)B 到 A;(b)C 到 D)

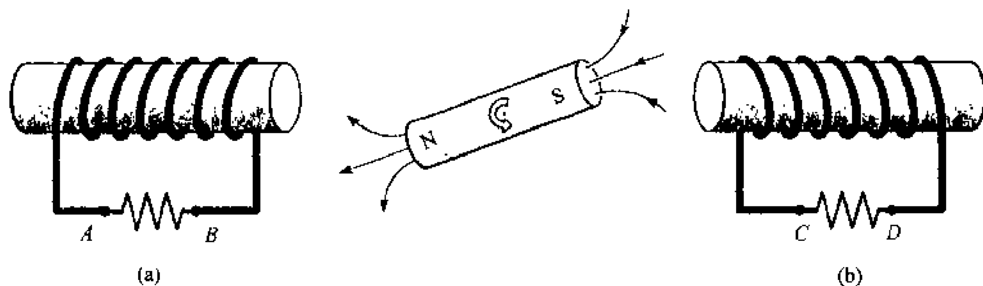


图 32-10

32.22 火车向南行驶的速率为 10m/s。地磁场向下的垂直分量为 0.54Gs。求在 1.2m 长的轮轴上产生的感应电动势的大小和方向。

(答　0.65mV,从西到东的方向)

32.23 半径 10cm 的铜盘绕中心轴以 20r/s 的角速率旋转。盘面垂直于磁场,B=0.60T。求盘边缘与中心之间的感应电动势。

(提示:类似题 32.12)

(答　0.38V)

32.24 绕在直径为 2.0cm 的木棒上的 1000 匝圆形线圈,阻值为 400Ω。线圈与内阻为 200Ω 的检流计相连接。若沿木棒方向的磁场从 $B=0.0113\text{T}$,突然减小至零。求流经检流计的电量。

(答　5.9μC)

32.25 在题 32.11 中(见图 32-6),若金属棒沿斜面下滑的速率为 v。求其加速度。

(答　$g\sin\theta-(B^2L^2v/Rm)\cos^2\theta$)

第三十三章　发电机和电动机

发电机

发电机是将机械能转化成电能的装置。图 33 - 1(a)是能产生交流电压的简单发电机，外部能源(如柴油机或蒸汽机)驱动磁场中的转子线圈，线圈导线切割磁力线而在线圈两端产生**感应电动势**

$$\mathscr{E}=2\pi NABf\cos 2\pi ft$$

式中 N 为线圈匝数，A 为线圈截面积，f 为旋转频率。图 33 - 1(b)表明输出电动势随时间变化的关系图。

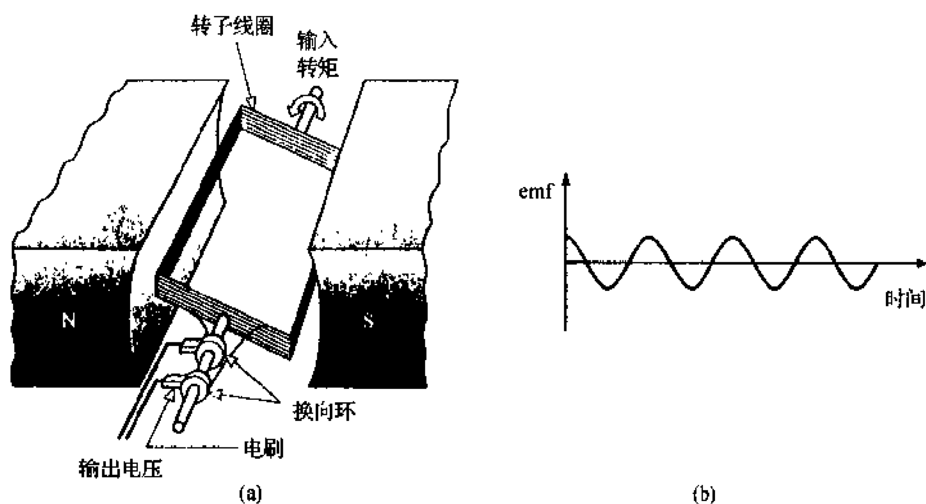


图 33 - 1

当发电机产生电流，线圈电流就会与磁场相互作用而使线圈受到阻力。发电机所提供的电能来自于旋转线圈所作的功。对于任何发电机都有

(输入的机械能)=(输出的电能)+(摩擦和热的能量损失)

一般而言，各种能量损耗只占输入能量的很小部分。

电动机

电动机是将电能转化为机械能的装置。简单的直流电机(工作电压恒定不变)如图 33 - 2 所示。通过转子线圈的电流与磁场相互作用而对线圈产生转矩

$$\tau=NIAB\sin\theta$$

这个转矩使线圈和轴转动(见第三十章)。式中 θ 为磁力线与线圈法线间的夹角。换向环的作用是每当 $\sin\theta$ 改变符号时就改变电流方向，使转子线圈总是朝同一方向转动。对这样的电动机有

$$平均转矩=(常数)|NIAB|$$

由于电动机转子线圈和发电机转子线圈都切割磁力线，因而电动机转子线圈中也感应出反电动势，它反抗驱动电动机所加的电源电压。因此使转子线圈中产生电流的净电势差为线电压(即外加电压)减反电动势，而线圈电流为

$$线圈电流=\frac{(线电压)-(反电动势)}{线圈电阻}$$

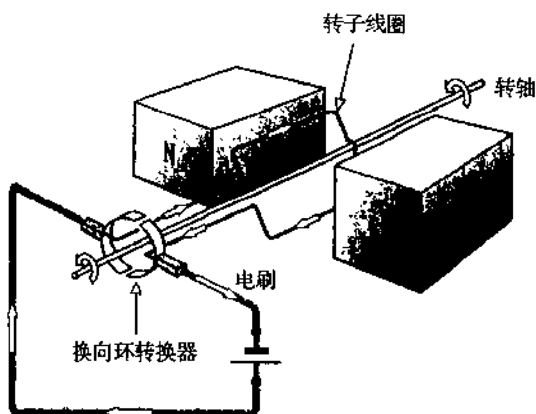


图 33-2

转子产生的机械功功率为

$$P=(\text{线圈电流})(\text{反电动势})$$

电动机产生的有用功率要略小一些，因为还要克服机械摩擦，与空气的摩擦以及铁芯能量损耗等。

例　题

发电机

33.1 一交流发电机的输出电压为 $\mathscr{E}=170\sin 377t$ 伏，式中 t 的单位为 s。求电压的频率。

解 输出电压随时间改变的正弦曲线和余弦曲线形式是相同的，只是 $t=0$ 的位置不同而已。由于 $\mathscr{E}=2\pi NABf\cos 2\pi ft$，与已知电压形式对比得到 $377t=2\pi ft$，所以 $f=60\text{Hz}$。

33.2 截面积当 20cm^2、共 1000 匝的线圈在地磁场中($B=0.70\text{Gs}$)要能产生最大值(即振幅)为 0.50V 的电压，其转速为多少？

解 假设线圈转轴垂直于磁场，这样当它旋转时通过线圈面的磁通量变化才最大。将 $B=7.0\times 10^{-5}\text{T}$ 代入表达式

$$\mathscr{E}=2\pi NABf\cos 2\pi ft$$

由于 $\cos 2\pi ft$ 的最大值为 1，所以电压的振幅为 $2\pi NABf$。有

$$f=\frac{0.50\text{V}}{2\pi NAB}=\frac{0.50\text{V}}{(2\pi)(1000)(20\times 10^{-4}\text{m}^2)(7.0\times 10^{-5}\text{T})}=0.57\text{kHz}$$

33.3 转子转速为 1500r/min 时，发电机产生 100.0V 的电压。欲得到 120.0V 电压，转速应为多少？

解 因为电动势的振幅正比于角速率(或频率 f)，所以有

$$\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2}=\frac{f_1}{f_2}$$

即

$$f_2=f_1\frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1}=(1500\text{r/min})\left(\frac{120.0\text{V}}{100.0\text{V}}\right)$$
$$=1800\text{r/min}$$

33.4 某电动机转子线圈电阻为 0.080Ω，转动时产生的感应电动势为 120V。若电路中电流为 50.0A，求发电机的端电压。

解 发电机好比电池，其电动势为 120V，内阻为 $r=0.080\Omega$。

端电压 $=(\text{电动势})-Ir$

$=120\text{V}-(50.0\text{A})(0.080\Omega)=116\text{V}$

33.5 某些发电机叫作并激发电机，用电磁铁取代永久磁铁，而电磁铁励磁电流是由感应电压

产生的。励磁线圈与转子线圈相并联，如图 33－3 所示。某并激发电机的转子电阻为 0.060Ω，而并激电阻为 100Ω。若它对外提供 250V、40kW 的电力，其转子应产生多大的功率？

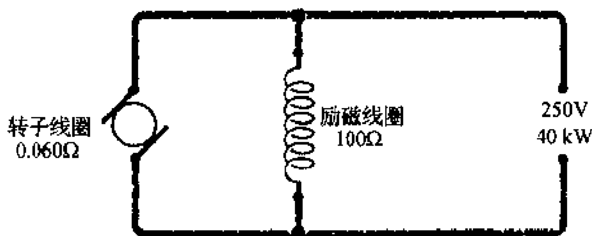


图 33－3

解 由于 $P=VI$，外电路中电流 I_x 为

$$I_x=\frac{P}{V}=\frac{40000\text{W}}{250\text{V}}=160\text{A}$$

而励磁电流为 I_f

$$I_f=\frac{V_f}{r_f}=\frac{250\text{V}}{100\Omega}=2.5\text{A}$$

整个转子电流 I_a 为

$$I_a=I_x+I_f=162.5\text{A}$$

总电动势为

$$|\mathscr{E}|=(250\text{V}+I_a r_a\text{ 转子线圈上的压降})$$
$$=250\text{V}+(162.5\text{A})(0.06\Omega)=260\text{V}$$

转子功率为

$$I_a|\mathscr{E}=(162.5\text{A})(260\text{V})=42\text{kW}$$

另一解法

$$\text{转子功率损耗}=I_a^2 r_a=(162.5\text{A})^2(0.06\Omega)=1.6\text{kW}$$
$$\text{励磁线圈功率损耗}=I_f^2 r_f=(2.5\text{A})^2(100\Omega)=0.6\text{kW}$$
$$\text{转子产生的功率}=(\text{对外提供的功率})+(\text{转子能耗})+(\text{励磁线圈能耗})$$
$$=40\text{kW}+1.6\text{kW}+0.6\text{kW}=42\text{kW}$$

电动机

33.6 如图 33－2 所示的电动机，其转子线圈的电阻为 2.30Ω。当工作电压为 120V 时，线圈电流为 1.60A。求其反电动势。

解 这时，电动机就像反电动势与其内阻上的电压降 Ir 相串联。所以

$$\text{线电压}=\text{反电动势}+Ir$$
$$\text{反电动势}=120\text{V}-(1.60\text{A})(2.30\Omega)$$
$$=116\text{V}$$

33.7 一台 0.250 hp 的电动机（比如图 33－2 所示），其转子线圈电阻为 0.500Ω。(a)当工作电压为 110V，输出功率为 0.250 hp 时，其工作电流为多少？(b)反电动势为多少？

解 (a)假设这台电动机的效率为 100%，即其输入功率 VI 就等于其输出功率 0.250 hp。即

$$(110\text{V})(I)=(0.250\text{hp})(746\text{W/hp})\quad\text{解得}\quad I=1.695\text{A}$$

(b)反电动势＝(工作电压)－(1.695A)(0.500Ω)
＝109V

33.8 在并激式电动机中，用与转子线圈相并联的励磁线圈产生磁场取代永久磁铁（如图 33－4 所示）。已知转子线圈电阻为 0.050Ω，工作电压为 120V。(a)求在起始时，即转子还未产生反电动势时，转子线圈的电流。(b)若欲将起动电流限制在 60A，与转子线圈串

联的变阻器起动电阻 R 应为多少？(c)若没接起动电阻，当线圈电流为 20A 时，产生多大的反电动势？(d)如果用这台装置发电，若要让它向励磁线圈和外电路提供 20A 和 120V 的电力，其转子线圈应产生的总电动势为多少？

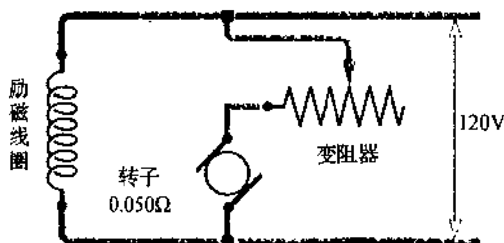


图 33 - 4

解 (a)转子线圈电流 $=\dfrac{\text{工作电压}}{\text{线圈电阻}}=\dfrac{120\text{V}}{0.050\Omega}=2.4\text{kA}$

(b)转子线圈电流 $=\dfrac{\text{工作电压}}{0.050\Omega+R}$

或 $60\text{A}=\dfrac{120\text{V}}{0.050\Omega+R}$

解得 $R=2.0\Omega$

(c)反电动势 = (工作电压) − (转子线圈上的电压降)

$=120\text{V}-(20\text{A})(0.050\Omega)$

$=119\text{V}=0.12\text{kV}$

(d)感应电动势 = (端电压) + (转子线圈上的电压降)

$=120\text{V}+(20\text{A})(0.050\Omega)$

$=121\text{V}=0.12\text{kV}$

33.9 图 33 - 5 所示的并激式电动机，其转子线圈电阻为 0.25Ω，励磁线圈电阻为 150Ω。当它接入 120V 的电路中时，产生的反电动势为 115V。试求(a)其转子电流 I_a、励磁电流 I_f 以及总电流 I_t；(b)电机所需总功率；(c)转子及励磁线圈上的热损耗功率以及(d)这台电机的效率。

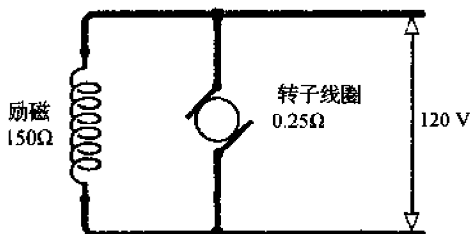


图 33 - 5

解

(a) $I_a=\dfrac{(\text{工作电压})-(\text{反电动势})}{\text{转子线圈电阻}}=\dfrac{(120-115)\text{V}}{0.25\Omega}$

$=20\text{A}$

$I_f=\dfrac{\text{工作电压}}{\text{励磁线圈电阻}}=\dfrac{120\text{V}}{150\Omega}=0.80\text{A}$

$I_t=I_a+I_f=20.80\text{A}=21\text{A}$

(b)输入功率 $=(120\text{V})(20.80\text{A})=2.5\text{kW}$

(c)转子线圈热损耗 $=I_a^2r_a=(20\text{A})^2(0.25\Omega)$

$=0.10\text{kW}$

励磁线圈热损耗 $=I_f^2r_f=(0.80\text{A})^2(150\Omega)$

$=96\text{W}$

(d)输出功率=(输入功率)-(损耗功率)

$=2496-(100+96)=2.3(\text{kW})$

或者换一种算法：

$$\text{输出功率}=(\text{转子线圈电流})(\text{反电动势})=(20\text{A})(115\text{V})=2.3\text{kW}$$

所以　效率=(输出功率)/(输入功率)

$=2300\text{W}/2496\text{W}=0.921=92\%$

33.10 一电动机转速为1500r/min时，转子线圈电流为90A，反电动势为110V。求其功率以及转子产生的转矩。

解答 转速 $1500\text{r/min}=1500\text{r}/60\text{s}=25\text{r/s}$

$\omega=2\pi f=(2\pi\times 25)\text{rad/s}$

功率=(转子线圈电流)(反电动势)

$=(90\text{A})(110\text{V})=9.9\text{kW}$

参见第十章，功率 $=\tau\omega$ 即

$$\text{转矩}=\frac{\text{功率}}{\text{角速度}}=\frac{9900\text{W}}{(2\pi\times 25)\text{rad/s}}=63\text{N}\cdot\text{m}$$

33.11 当电机转子电流为40A时，能产生转矩100N·m。若电流增加至70A，但磁场减少至原来值的80%，它能产生多大的转矩？

解答 电机转子产生的转矩正比于转子线圈电流以及磁场的磁感应强度(见第三十章)。所以

$$\text{转矩}=(100\text{N}\cdot\text{m})\left(\frac{70}{40}\right)(0.80)=0.14\text{kN}\cdot\text{m}$$

习　题

发电机

33.12 求发电机以下变化对其感应电动势的影响：(a)磁极产生的磁通量加倍和(b)转子转速加倍。

(答　(a)加倍；(b)加倍)

33.13 并激式发电机转子线圈电阻为0.100Ω，转子产生的感应电动势为596V。(a)求当转子电流为460A时，转子的端电压。(b)若励磁线圈电阻为110Ω，求励磁电流以及输送到外电路的电流和功率。

(答　(a)550V；(b)5A，455A，250kW)

33.14 一台发电机，当转速为1200r/min时向外电路输出电流30.0A(电压为120V)。若全部功率损耗为400W，要驱动这台发电机并保持同样的转速，需多大转矩？

(答　31.8N·m)

33.15 一台75.0kW、230V的并激发电机产生的感应电动势为243.5V。若其励磁电流为12.5A，要保持额定输出功率，其转子线圈的电阻应为多少？

(答　0.0399Ω)

33.16 一台风力发电机产生120V的电力。其螺旋桨叶片长2.0m，风力通过螺旋桨后速率由12m/s降低到7.0m/s。空气的密度为 1.29kg/m^3。若系统没有能量损耗，发电机能产生的最大电流为多少？(提示：每秒钟风能减少多少?)

(答　77A)

电动机

33.17 一台电动机的转子线圈有500匝，每转一圈磁通量改变8.00mWb。若保持转速1500r/min，它产生多大的反电动势？

(答　100V)

33.18 电动机转子中每匝线圈的有效导线长度为30cm，它们处在 0.40Wb/m^2 的磁场中，通电电流为15A。试求作用于每匝线圈上的力。

(答 1.8N)

33.19 一台并激式电动机的转子电阻为0.080Ω,接到120V的电路中。若转子电流为50A,求其反电动势以及转子产生的功率。

(答 0.12kV,5.8kW)

33.20 并激式电动机接入110V的电路中。已知转子电流为15A,它产生的反电动势为104V。求转子电阻。

(答 0.40Ω)

33.21 一台并激式电机的转子电阻为0.120Ω。(a)若将它作为电动机并接入220V电路,当转子电流为50.0A时,它产生多大的反电动势?(b)若将它作为发电机,它向励磁线圈和外电路提供50.0A和220V的电力,其转子的感应电动势为多少?

(答 (a)214V;(b)226V)

33.22 一台并激式电动机接入120V电路时,转速达900r/min,提供12hp电功率。若功率损耗为1048W。求输入功率、转子电流和电机转矩。

(答 10kW,83A,93N·m)

33.23 一台并激式电动机转子电阻为0.20Ω,励磁电阻为150Ω。当接入120V电路时,线路电流为30A。求励磁电流、转子电流、反电动势和机械功率,并计算该装置的效率。

(答 0.80A,29A,0.11kV,3.3kW,93%)

33.24 一台并激式电动机,当转子电流为15A,且转子线圈所在的空气隙内磁通密度为1.0Wb/m^{2}时,转子能产生80N·m的转矩。求磁通密度变到1.3Wb/m^2、转子电流增加到18A时,它能产生多大转矩。

(答 0.13kN·m)

33.25 一个并激电动机的励磁线圈电阻为200Ω,转子线圈电阻为0.50Ω。将其接入120V的电路,当线路电流为4.6A时,电机可全速运转。若电机带负荷运转,转速减至全速的90%。问这时电机线路电流为多少?

(答 28A)

第三十四章 电感，RC 和 RL 时间常数

自感

线圈可以在自身回路中感应出电动势来。如果线圈中的电流改变，电流产生的磁通量也跟着改变。结果是线圈电流的改变在本线圈内感应出感应电动势。

由于感应电动势正比于 $\Delta\Phi_M/\Delta t$，而 $\Delta\Phi_M$ 正比于 Δi，i 为产生磁通的电流，所以有

$$\mathscr{E}=-(\text{常数})\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

我们用 i（而不用 I）来表示随时间变化的电流。负号表示自感电动势是反电动势，它反抗线圈电流的变化。

式中的比例系数取决于线圈的几何情况，记以 L，称为线圈的自感（系数）。于是上式可以写成

$$\mathscr{E}=-L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

$\mathscr{E}$ 的单位为伏特(V)，i 的单位为安培(A)，t 的单位为秒(s)，L 的单位为亨利(H)。

互感

一个线圈产生的磁通会通过另一个线圈所包围的面积，从面感应出电动势来。包含有电源的线圈叫初级线圈（或原线圈）。初级线圈内电流变化导致另一线圈，即次级线圈（或副线圈），内产生感应电动势。次级线圈内的感应电动势 $\mathscr{E}_s$ 正比于初级线圈内电流的变化率 $\Delta i_p/\Delta t$：

$$\mathscr{E}_s=M\frac{\Delta i_p}{\Delta t}$$

式中 M 为这两个线圈体系的互感（系数）。

电感贮存能量

由于自感电动势是反电动势，所以使线圈电流从零增至 I 就须作功。这个过程中提供给线圈的能量就贮存在线圈中；而当线圈电流再次减少到零时，这个能量就释放出来。若通过自感系数为 L 的电感的电流为 I，该电感贮存的能量为 $\frac{1}{2}LI^2$。L 以 H 为单位，I 以 A 为单位，则能量以焦耳(J)为单位。

RC 时间常数

考察如图 34-1(a)所示的 RC 电路。电容器初始时不带电。电键闭合后，电路电流 i 以及电容器电量 q 都随时间而变化，如图 34-1(b)所示。若电容器两极之间的电位差为 v_c，该电路的回路方程可写为

$$-iR-v_c+\mathscr{E}=0$$

或

$$i=\frac{\mathscr{E}-v_c}{R}$$

在电键刚刚闭合的时刻，$v_c=0$，$i=\mathscr{E}/R$ 随着时间的增长，v_c 增加而 i 减小。当电流衰减至初始值的 1/2.718 或 0.368 倍时，所花的时间（以秒为单位）为 RC，称它为这个 RC 电路的时间常数。

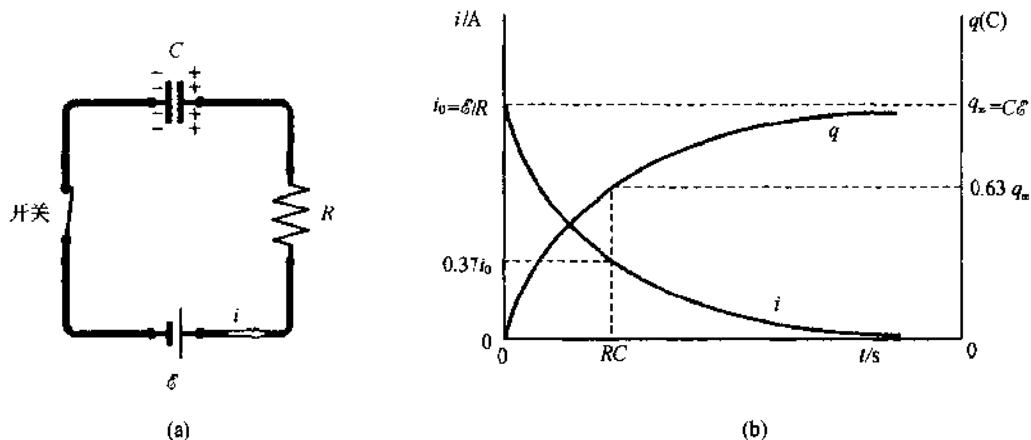


图 34－1

图 34－1(b)也画出了电容器带电量 q 随时间的变化。在 $t=RC$ 时，q 为最终值的 0.632 倍。

当已经充电(初始电荷为 q_0)的电容器通过电阻 R 放电时，放电电流与充电电流的曲线是相同的。电容器的带电量 q 随时间的变化也类似于放电电流的曲线。在放电过程中的 $t=RC$ 时刻，有 $i=0.368i_0$ 和 $q=0.368q_0$。

RL 时间常数

考察图 34－2(a)的电路。符号000表示自感为 LH 的线圈。当闭合电键时，电路中的电流增加的方式如图 34－2(b)所示。由于电流的变化使通过线圈的磁通量发生变化，从而在线圈中感应出反电动势，反抗电流的增加，所以电流不能马上跃升到它的最终值 i_∞。经过 L/R s 以后，电流升至最终值 i_∞的 0.632 倍 。这个时间，$t=L/R$，叫做 RL 电路的时间常数。经过足够长的时间，当电流变化如此缓慢，以至电感中感应的反电动势 $L(\Delta i/\Delta t)$小得可以忽略时，有 $i=i_\infty=\mathscr{E}/R$。

指数函数

描述图 34－1 和图 34－2 中的曲线须用指数函数：

电容器充电过程　　$i=i_0\mathrm{e}^{-t/RC}$

电容器充电过程　　$q=q_\infty(1-\mathrm{e}^{-t/RC})$

电容器放电过程　　$q=q_\infty\mathrm{e}^{-t/RC}$

电感器电流增加过程　　$i=i_\infty(1-\mathrm{e}^{-t/(L/R)})$

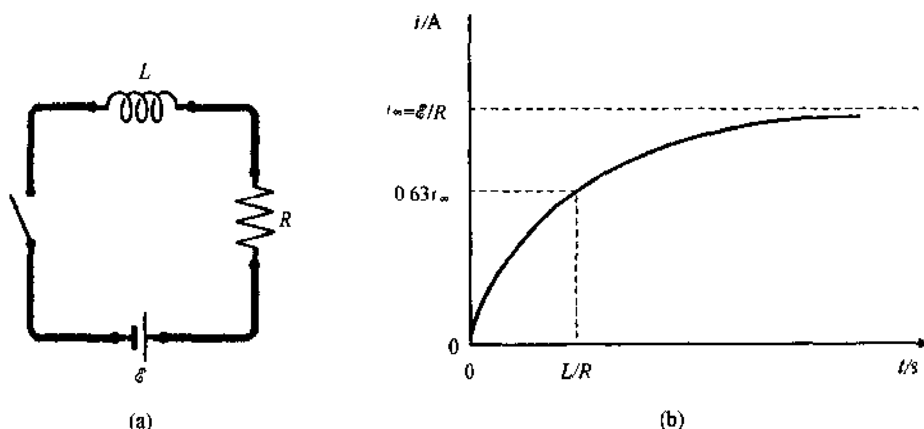


图 34－2

式中 $e\approx 2.718$ 为自然对数的底。

上述方程给出电容器充电过程中,当 t 等于时间常数时电流和电容器的带电量 $i=0.368i_0$ 和 $q=0.632q_\infty$;对于放电过程,则 $q=0.368q_\infty$。当 t 等于时间常数时,电感线圈的电流方程给出 $i=0.632i_\infty$。

电容电路中有关 i 的方程以及电容器放电过程中有关 q 的方程具有下面的性质,即经历时间是时间常数的 n 倍时,有

$$i=i_0(0.368)^n,q=q_\infty(0.368)^n$$

比如,经历 4 倍于时间常数的时间,有

$$i=i_0(0.368)^4=0.0183i_0$$

例　题

34.1 2A 的稳恒电流在有 400 匝的线圈回路面积内产生 10^{-4}Wb 的磁通量。(a)若在 0.08s 内使电流停止,线圈产生多大的反电动势(平均值)? 求(b)线圈的电感和(c)线圈贮存的能量。

解 (a)

$$|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right|=400\frac{(10^{-4}-0)\text{Wb}}{0.08\text{s}}=0.5\text{V}$$

(b)

$$|\mathscr{E}|=L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|,L=\left|\frac{\mathscr{E}\Delta t}{\Delta i}\right|=\frac{(0.5\text{V})(0.08\text{s})}{(2-0)\text{A}}=0.02\text{H}$$

(c)

$$\text{能量}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}(0.02\text{H})(2\text{A})^2=0.04\text{J}$$

34.2 空气芯长螺线管截面积为 A,长度为 d,共有 N 匝线圈。(a)求其自感。(b)若管内物质磁导率为 μ,其电感为多少?

解 (a)因为

$$|\mathscr{E}|=N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right|,|\mathscr{E}|=L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|$$

联立得到

$$L=N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta i}\right|$$

若电流由零增至 I,则磁通量从零增至 Φ_M。即 $\Delta i=I,\Delta\Phi_M=\Phi_M$。自感系数为

$$L=N\frac{\Phi_M}{I}=N\frac{BA}{I}$$

对于空心螺线管,$B=\mu_0 nI=\mu_0(N/d)I$。代入得 $L=\mu_0N^2A/d$。

(b)若管芯材料磁导率为 μ 而非 μ_0,则 B、从而 L 将增至 μ/μ_0 倍。这时有

$$L=\mu N^2A/d$$

铁芯螺线管比空气芯螺线管的自感要大许多。

34.3 铁芯螺线管截面积为 1.5cm^2,在 30cm 长度上绕 2000 匝线圈。铁芯的磁导率为 600。求它的自感。若线圈电流在 0.030s 内由 0.60A 降至 0.10A,求它的感应电动势的平均值。

解 由上题知 $k_M=\mu/\mu_0$,所以

$$L=\frac{k_M\mu_0N^2A}{d}=\frac{(600)(4\pi\times10^{-7}\text{T}\cdot\text{m/A})(2000)^2(1.5\times10^{-4}\text{m}^2)}{0.30\text{m}}$$
$$=1.51\text{H}$$

所以

$$|\mathscr{E}|=L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|=(1.51\text{H})\frac{0.50\text{A}}{0.030\text{s}}=25\text{V}$$

34.4 某线圈的电阻为 0.40Ω,自感为 20mH。在某时刻线圈电流为 0.30A,并正以 0.50A/s

的速率增加。(a)求该时刻线圈两端的电势差。(b)若该时刻电流以相同速率减小,情况如何?

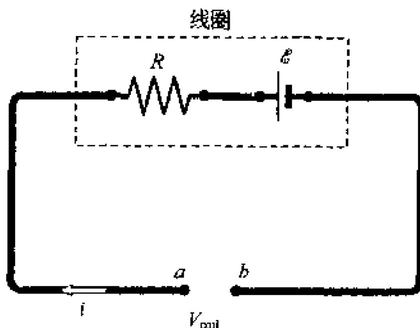


图 34-3

解 我们可以用电阻串联感应电动势来表示这个线圈,如图 34-3 所示。

(a)由于电流增加,所以感应电动势反抗电流的增加,其极性如图示。按回路定律写出回路方程

$$V_{ba}-iR-\mathscr{E}=0$$

而 V_{ba} 是线圈的端电压,又 $\mathscr{E}=L|\Delta i/\Delta t|$,所以有线圈电压等于

$$iR+\mathscr{E}=(0.30\text{A})(0.40\Omega)+(0.200\text{H})(0.50\text{A/s})=0.22\text{V}$$

(b)由于电流减小,图 34-3 中电动势的极性应相反,所以

$$\text{线圈电压}=iR-\mathscr{E}=0.020\text{V}.$$

34.5 线圈的电阻为 15Ω,电感为 0.60H,连接到一个稳定的 120V 电源。求在下列时刻线圈电流增加率:(a)刚接通电流的瞬间和(b)电流达到极大值的 80%时。

解 电路中产生电流的有效电压是电源电压(120V)减去反电动势 $L(\Delta i/\Delta t)$,它等于线圈电阻两端的电势差

$$120\text{V}-L\frac{\Delta i}{\Delta t}=iR$$

(对图 34-2 所示电路写出回路方程同样可以得到这个方程。注意,电感相当于大小为 $L(\Delta i/\Delta t)$ 的反电动势)。

(a)在刚接通电路的瞬间,i 为零。所以

$$\frac{\Delta i}{\Delta t}=\frac{120\text{V}}{L}=\frac{120\text{V}}{0.60\text{H}}=0.20\text{kA/s}$$ (译注:原文为 0.20mA/s)

(b)当电流最终不再改变时(即 $\Delta i/\Delta t=0$),电流达到其极大值(120V)/R。现在考察电流达到极大值的 80%的情况:

$$i=(0.80)\left(\frac{120\text{V}}{R}\right)$$

将此值代入回路方程有

$$120\text{V}-L\frac{\Delta i}{\Delta t}=(0.80)\left(\frac{120\text{V}}{R}\right)R$$

从而

$$\frac{\Delta i}{\Delta t}=\frac{(0.20)(120\text{V})}{L}=\frac{(0.20)(120\text{V})}{0.60\text{H}}=40\text{A/s}$$

34.6 当一个线圈的电流以 3.0A/s 的速率改变时,旁边的线圈中感应出 7.0mV 的电动势。求这个组合的互感。

解 由

$$\mathscr{E}_s=M\frac{\Delta i_p}{\Delta t}$$

得

$$M=\mathscr{E}_s\frac{\Delta t}{\Delta i_p}=(7.0\times10^{-3}\text{V})\frac{1.0\text{s}}{3.0\text{A}}=2.3\text{mH}$$

34.7 两线圈同绕在一个铁芯上,所以一个线圈产生的磁通也通过另一个线圈包围的面积。原线圈有 N_p 匝,当通过电流为 2.0A 时,产生磁通为 2.5×10^{-4}Wb。若副线圈有 N_s 匝,求这两线圈的互感。

解 由

$$|\mathscr{E}_s|=N_s\left|\frac{\Delta\Phi_{Ms}}{\Delta t}\right|$$

和

$$|\mathscr{E}_s|=M\left|\frac{\Delta i_p}{\Delta t}\right|$$

得到

$$M=N_s\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta i_p}\right|=N_s\frac{(2.5\times10^{-4}-0)\text{Wb}}{(2.0-0)\text{A}}=(1.3\times10^{-4}N_s)\text{H}$$

34.8 在长度为 d、截面积为 A 的铁棒上均匀缠绕2000匝线圈,其上部又绕有50匝作为副线圈。已知铁的相对磁导率为 k_M。求这体系的互感。

解 通过这螺线管截面的磁通量为

$$\Phi_M=BA=(k_M\mu_0 nI_p)A=(k_M\mu_0 I_pA)\left(\frac{2000}{d}\right)$$

这个磁通量也通过副线圈的截面。所以有

$$|\mathscr{E}_s|=N_s\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right|,\quad |\mathscr{E}_s|=M\left|\frac{\Delta i_p}{\Delta t}\right|$$

解之得

$$M=N_s\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta i_p}\right|=N_s\frac{\Phi_M-0}{I_p-0}=50\frac{k_M\mu_0 I_pA(2000/d)}{I_p}=\frac{10\times10^4k_M\mu_0A}{d}$$

34.9 某串联电路包括12V电源、电键、1.0MΩ的电阻和2.0μF的电容器各一个、初始时电容器不带电。将电键闭合,求(a)电路中初始电流,(b)电流达到初始电流的0.37倍所需的时间和(c)这时电容器带电量,(d)电容器最终带电多少?

解 (a)将回路定律应用于图34-1(a)所示电路的任意时刻有

$$12\text{V}-iR-v_c=0$$

式中 v_c 为电容器两极之间的电势差。初始时,$q=0$,所以 $v_c=0$。于是有

$$12\text{V}-iR-0=0$$

或

$$i=\frac{12\text{V}}{1.0\times10^6\Omega}=12\mu\text{A}$$

(b)电流降至初始值的0.37倍所需时间为

$$t=RC=(1.0\times10^6\Omega)(2.0\times10^{-6}\text{F})=2.0\text{s}$$

(c)在 $t=2.0$s 时刻,电容器电量达到最终值的0.63倍,见(d)。

(d)当 $i=0$,$v_c=12$V时,电容器电量不再增加,这时有

$$q=Cv_c=(2.0\times10^{-6}\text{F})(12\text{V})=24\mu\text{C}$$

34.10 5.0μF的电容器接到电势差为20kV的两极板进行充电。充电后断开电源而连到一个7.0MΩ的电阻两端放电。初始放电电流以及电容器两端电压达20kV的37%时需多长时间?

解 对于电容器放电电路,回路方程为

$$v_c-iR=0$$

式中 v_c 为电容器两极之间的电势差。初始时 $v_c=20$kV。所以

$$i=\frac{v_c}{R}=\frac{20\times10^3\text{V}}{7.0\times10^6\Omega}=2.9\text{mA}$$

经历一个时间常数,电容器的端电压以及带电量将减小至初始值的0.37倍。所以

$$RC=(7.0\times10^6\Omega)(5.0\times10^{-6}\text{F})=35\text{s}$$

34.11 线圈的电感为1.5H,电阻为0.60Ω。若突然将它接入12V的电池两端。问多少时间后电流达到最终值的0.63倍,线圈电流最终为多少?

解 所需时间为时间常数

$$\frac{L}{R}=\frac{1.5\text{H}}{0.60\Omega}=2.5\text{s}$$

足够长时间以后,电流趋于稳定,而线圈中反电动势趋于零。这时有

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{12\text{V}}{0.60\Omega}=20\text{A}$$

34.12 电容器充电后,两极电压为 2.0×10^5V。这时通过一电阻放电。问经历5倍时间常数后,电容器两极间电压为多少?

解 从本章知识要点叙述的最后部分得知，在 n 倍时间常数后，有 $q=q_\infty(0.368)^n$。而 v 正比于 q（由于 $v=q/c$）所以

$$v_{n=5}=(2.0\times10^5\text{V})(0.368)^5=1.4\text{kV}$$

34.13 一个 45V 的电池通过 30MΩ 的电阻对 2.0μF 的电容器充电求 83s 后(a)电容器带电量和(b)这时刻通过电容器的电流。

解 本电路的时间常数为 $RC=60\text{s}$。而

$$q_\infty=V_\infty C=(45\text{V})(2.0\times10^{-6}\text{F})=9.0\times10^{-5}\text{C}$$

(a)

$$q=q_\infty(1-e^{-t/RC})=(9.0\times10^{-5}\text{C})(1-e^{-83/60})$$

而

$$e^{-83/60}=e^{-1.383}=0.25$$

代入得

$$q=(9.0\times10^{-5}\text{C})(1-0.25)=67\mu\text{C}$$

(b)

$$i=i_0e^{-t/RC}=\left(\frac{45\text{V}}{30\times10^6\Omega}\right)(e^{-1.383})=0.38\mu\text{A}$$

34.14 若在图 34－2 所示电路中，$R=20\Omega$，$L=0.30\text{H}$，$\mathscr{E}=90\text{V}$。求闭合电键 0.050s 后电路中的电流。

解 本电路的时间常数为 $L/R=0.015\text{s}$，而 $i_\infty=\mathscr{E}/R=4.5\text{A}$。所以有

$$i=i_\infty(1-e^{-t/(L/R)})=(4.5\text{A})(1-e^{-3.33})$$
$$=(4.5\text{A})(1-0.0357)=4.3\text{A}$$

习　题

34.15 当线圈电流变化率为 32A/s 时，感应电动势为 8.0V，求其电感。

（答　0.25H）

34.16 2.5A 的稳恒电流经过 500 匝的线圈会产生 1.4×10^{-4}Wb 的磁通。求这个线圈的电感。

（答　28mH）

34.17 变压器原线圈和副线圈之间的互感为 0.30H。求当原线圈电流变化率为 4.0A/s 时在副线圈中的感应电动势。

（答　1.2V）

34.18 电阻为 1.0Ω、电感为 0.20H 的线圈接到 90V 的电源。求下列时刻电路电流的变化率：(a)刚接通电源的瞬间和(b)电流达到最大值的三分之二时刻。

（答　(a)0.45kA/s；(b)0.15kA/s）

34.19 两个相邻线圈 A 和 B，分别有 300 匝和 600 匝。已知 A 线圈中电流为 1.5A 时产生通过自身截面的磁通为 1.2×10^{-4}Wb，而通过 B 截面的磁通为 0.90×10^{-4}Wb。求(a)线圈 A 的自感，(b)线圈 A 和 B 之间的互感以及(c)当 A 中电流在 0.20s 内减小至零时，在 B 中感应电动势的平均值。

（答　(a)24mH；(b)36mH；(c)0.27V）

34.20 电感为 0.48H 的线圈流过 5A 的电流。求该线圈贮存的能量。

（答　6J）

34.21 40cm 长、截面积为 5.0cm² 的铁芯上绕有每厘米 10 匝的导线，铁芯的相对磁导率为 500。求该铁芯螺线管的电感。

（答　0.13H）

34.22 试证明：(a)$1\ \text{N/A}^2=1\ \text{T}\cdot\text{m/A}=1\text{Wb/A}\cdot\text{m}$，(b)$1\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2=1\text{F/m}$

34.23 一个 2.0μF 的电容串联一个 10MΩ 的电阻后接 100V 的电源。求下列时刻电阻中的电流以及电容器带电量：(a)接通后的一倍时间常数和(b)电容器电量达到最终值的 90%时。

（答　(a)3.7μA，0.13mC；(b)1.0μA，0.18mC）

34.24 一个已充电的电容器通过一个 10kΩ 的电阻放电。若 7.0s 后电容器电压下降至初始值的 0.37 倍，它的电容是多少？

(答　0.70mF)

34.25 铁芯螺线管接通6V电源后,经0.75s后电流达到其最大电流的0.63倍。而取出铁芯后重复实验,发现电流达到最大电流的0.63倍仅需0.0025s。(a)求铁芯的相对磁导率,(b)若空心螺线管可达到的最大电流为0.5A,其电感为多少?

(答　(a)0.3×10^3;(b)0.03H)

34.26 图34-1电路中电键接通后七倍时间常数后,电流为初始电流的多少倍?

(答　0.00091)

34.27 图34-2所示电路,当开关闭合三倍时间常数后,电流与最终电流之差占最终电流i_∞的多大比例?

(答　$(i_\infty-i)/i_\infty=0.050$)

34.28 在图34-2的电路中,若$R=5.0\Omega$,$L=0.40\text{H}$,$\mathscr{E}=20\text{V}$。求开关闭合0.20s后电路电流。

(答　3.7A)

34.29 在图34-1所示电路中,若$R=7.00\text{M}\Omega$,$C=0.300\mu\text{F}$,$\mathscr{E}=12.0\text{V}$。电容开始不带电。求闭合开关5s后电路中的电流以及电容器带电量。

(答　$159\mu\text{A}$,$3.27\mu\text{C}$)

$$V = IX_L \qquad \text{（纯电感）}$$
$$V = IX_C \qquad \text{（纯电容）}$$

式中 $X_L = 2\pi fL$ 叫感抗，若频率以赫兹(Hz)为单位，电感以亨利(H)为单位，则 X_L 的单位为欧姆(Ω)。$X_C = 1/2\pi fC$ 叫容抗，当电容以法(F)为单位时，容抗的单位为欧姆(Ω)。

相位

加到纯电阻元件上的交流电压与通过该电阻的电流同时达到极大，也同时达到零，我们说它的电压和电流是同位相的。

当交流电压加到纯电感两端时，电感电压比电流提前四分之一周期达到极大，这时电流为零。这是因为电感的反电动势使通过电感的电流落后于电压四分之一周期，或者说落后 90°。我们说二者的位相差为 90°。

而纯电容元件两端的交流电压落后于电流 90°。在对电容器充电并在两端形成电压之前，必须有电流通过。

对于涉及电阻、电感和电容组合的复杂情况，电压与电流通常(但不总是)是有位相差的。电压落后或超前于电流的角度称为相角。

阻抗(Z)

包含电阻、电感和电容的串联电路的阻抗为

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Z 的单位为欧姆。如果串联电路的电压为 V，电流为 I，将它们联系起来的欧姆定律的形式为

$$V = IZ$$

而 V 与 I 之间的相角 ϕ 为

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

或

$$\cos\phi = \frac{R}{Z}$$

相幅矢量

相幅的性质在许多方面就如同矢量。上述 $R-L-C$ 串联电路中各元件电学量之间的关系可以用直角三角形的毕达哥拉斯定理(译注：即勾股定理)来表示，因此就可用相幅矢量来描述。在图 35－2(a)中，Z 是三角形的斜边，而 R 和 $(X_L - X_C)$ 为两条直角边。电流与电压之间的相角就是 ϕ。

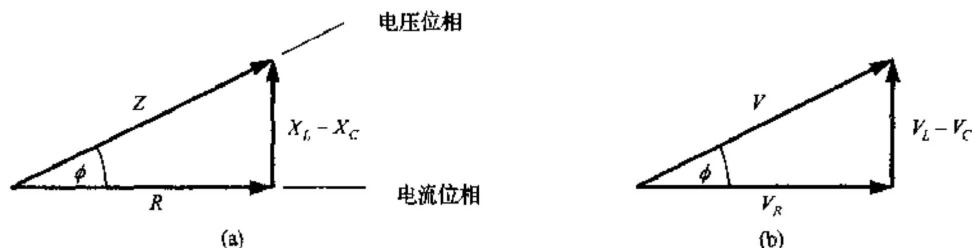


图 35－2

串联电路中各元件的电压关系与阻抗关系类似，如图 35－2(b)所示，有

$$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

由于存在相位差，串联电路的端电压并不等于各个元件电压值的代数和，而必须应用上述关系式。

共振

在 $R-L-C$ 串联电路中，若 $X_L=X_C$，就产生共振。这时，对于给定的电压，由于 $Z=R$ 达到极小值，所以电流 I 达到极大。从 $X_L=X_C$，可以求出电路的共振（或固有）频率

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

功率损耗

假设加在某阻抗两端的电压为 V，产生的电流为 I，而 V 与 I 之间的相角为 ϕ，则该阻抗上的功率损耗为 $VI\cos\phi$。$\cos\phi$ 叫作功率因数。对于纯电阻，功率因数等于 1，而对于纯电感或纯电容，它等于零，即纯电感和纯电容不消耗功率。

变压器

变压器是交流电路中升高或降低电压的元件或装置。它由绕在同一铁芯上的原、副线圈组成。通过一个线圈的交流电流会使通过铁芯截面的磁通量不断改变；而磁通的改变又在另一个线圈两端感应出电动势来。

一般变压器的效率都很高。如果忽略能量损失，则原线圈的功率等于副线圈的功率，即

$$V_1I_1=V_2I_2$$

两线圈的电压比等于它们的匝数比，线圈的电流比则与匝数比成反比：

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{N_1}{N_2},\quad \frac{I_1}{I_2}=\frac{N_2}{N_1}$$

例　　题

35.1 一台普通的电压表测量 60.0Hz 的正弦交流电，读数为 120V。(a)电压在一个周期内的最大值是多少？(b)请写出电压方程。

解☞ (a) $V=\frac{v_0}{\sqrt{2}}$

$v_0=\sqrt{2}V=\sqrt{2}(120\text{V})=170\text{V}$

(b) $v=v_0\sin2\pi ft=(170\text{V})\sin120\pi t$

t 的单位为 s。

35.2 电压 $v=(60.0\text{V})\sin120\pi t$ 加到 20.0Ω 的电阻两端。与电阻串联的交流电流表读数为多少？

解☞ 电阻两端电压的有效值为

$$V=0.707\quad v_0=(0.707)(60.0)=42.4(\text{V})$$

所以

$$I=\frac{V}{R}=\frac{42.4\text{V}}{20.0\Omega}=2.12\text{A}$$

35.3 120V 的交流电源连到 2.0μF 电容两端。若电源频率为(a)60Hz 或(b)60kHz，电路电流为多少？(c)电容上功率损耗为多少？

解☞ (a)

$$X_C=\frac{1}{2\pi fC}=\frac{1}{2\pi(60\text{s}^{-1})(2.0\times10^{-6}\text{F})}=1.33\text{k}\Omega$$

所以

$$I=\frac{V}{X_C}=\frac{120\text{V}}{1330\Omega}=0.090\text{A}$$

(b) 这时 $X_C=1.33\Omega$，所以 $I=90\text{A}$。

注意电容器的阻抗和频率成反比。

(c)　功率损耗$=VI\cos\phi=VI\cos 90°=0$

35.4　120V 的交流电源连到 0.700H 的电感器两端。若电源频率为(a)60.0Hz 或(b)60.0kHz,电路电流为多少?(c)电感上的功率损耗为多少?

解答　(a)　$X_L=2\pi fL=2\pi(60.0\ \text{s}^{-1})(0.700\ \text{H})=264\Omega$

所以

$$I=\frac{V}{X_L}=\frac{120\text{V}}{264\Omega}=0.455\text{A}$$

(b)这时 $X_L=264\times10^3\Omega$,所以

$$I=0.455\times10^{-3}\text{A}$$

注意,电感的阻抗与频率成正比。

(c)功率损耗$=VI\cos\phi=VI\cos 90°=0$

35.5　一线圈的电感为 0.14H,电阻为 12Ω,连到 110V、25Hz 的电路。试求(a)线圈电流,(b)电流与电压之间的相角,(c)功率因数和(d)线圈的功率损耗。

解答　(a)　$X_L=2\pi fL=2\pi(25)(0.14)=22.0\Omega$

而

$$Z=\sqrt{R^2+(X_l-X_C)^2}=\sqrt{(12)^2+(22-0)^2}=25.1\Omega$$

得

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{110\text{V}}{25.1\Omega}=4.4\text{A}$$

(b)

$$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{22-0}{12}=1.83,\qquad \phi=61.3°$$

电压超前电流 61°。

(c)功率因子$=\cos\phi=\cos 61.3°=0.48$

(d)功率损耗$=VI\cos\phi=(110\text{V})(4.4\text{A})(0.48)=0.23\text{kW}$

或,由于只有电阻才损耗功率,所以有功率损耗$=I^2R=(4.4\text{A})^2(12\Omega)=0.23\text{kW}$

35.6　一电容和一 30Ω 的电阻串联后接入 220V 的交流电路。电容器的容抗为 40Ω。试求(a)电路电流,(b)电流与电压之间的相角和(c)电路损耗的功率。

解答　(a)

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\sqrt{(30)^2+(0-40)^2}=50\Omega$$

所以

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{220\text{V}}{50\Omega}=4.4\text{A}$$

(b)

$$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{0-40}{30}=-1.33\quad 即\quad \phi=-53°$$

负号表明电压落后于电流 53°。图 35-2 中的角度 ϕ 要在水平轴的下边。

(c)方法一

功率损耗$=VI\cos\phi=(220)(4.4)\cos(-53°)=(220)(4.4)\cos 53°=0.58\text{kW}$

方法二

由于纯电容不损耗功率,只有电阻才损耗功率,所以有

$$功率损耗=I^2R=(4.4\text{A})^2(30\Omega)=0.58\text{kW}$$

35.7　将 100Ω 的纯电阻、0.10H 的纯电感和 20μF 的纯电容串联后接到 110V、60Hz 的电路中。试求(a)电流,(b)功率损耗,(c)电流与电源电压之间的相角和(d)跨接在三个元件上的电压。

解答　(a)对全电路　$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$,

由　$R=100\Omega$

$X_L=2\pi fL=2\pi(60\ \text{s}^{-1})(0.10\text{H})=37.7\Omega$

$$X_C=\frac{1}{2\pi fC}=\frac{1}{2\pi(60\text{s}^{-1})(20\times10^{-6}\text{F})}=132.7\Omega$$

解得

$$Z=\sqrt{(100)^2+(38-133)^2}=138(\Omega),\quad I=\frac{V}{Z}=\frac{110\text{V}}{138\Omega}=0.79\text{A}$$

(b)　所有的功率损耗都在纯电阻上，等于

$$I^2R = (0.79\text{A})^2(100\Omega) = 63\text{W}$$

(c)　$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{-95\Omega}{100\Omega}=-0.95$，　$\phi=-44°$

电压落后于电流。

(d)　$V_R=IR=(0.79\text{A})(100\Omega)=79\text{V}$

$V_C=IX_C=(0.79\text{A})(132.7\Omega)=0.11\text{kV}$

$V_L=IX_L=(0.79\text{A})(37.7\Omega)=30\text{V}$

注意，$V_C+V_L+V_R$ 并不等于电源电压。由图 35－2(b)知，正确的关系为

$$V=\sqrt{V_R^2+(V_L-V_C)^2}=\sqrt{(79)^2+(-75)^2}=109(\text{V})$$

由于计算中的四舍五入，所以结果与电源电压略有不同。

35.8　50Ω 的纯电阻、0.200H 的纯电感和 40.0nF 的纯电容串接后连到 30.0V、1780Hz 的电源上。试求(a)电流，(b)电源电压与电流之间的相角，(c)电路功率损耗和(d)用电压表测每个元件的电压读数。

解☞　(a)　$X_L=2\pi fL=2\pi(1780\text{s}^{-1})(0.200\text{H})=2.24\text{k}\Omega$

$$X_C=\frac{1}{2\pi fC}=\frac{1}{2\pi(1780\text{s}^{-1})(4.00\times10^{-8}\text{F})}=2.24\text{k}\Omega$$

而

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=R=5.00\Omega$$

所以

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{30.0V}{5.00\Omega}=6.00\text{A}$$

(b)　$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=0$，　$\phi=0°$

(c)功率损耗　$VI\cos\phi=(30.0\text{V})(6.00\text{A})(1)=180\text{W}$

或功率损耗　$I^2R=(6.00\text{A})^2(5.00\Omega)=180\text{W}$

(d)　$V_R=IR=(6.00\text{A})(5.00\Omega)=30.00\text{V}$

$V_C=IX_C=(6.00\text{A})(2240\Omega)=13.4\text{kV}$

$V_L=IX_L=(6.00\text{A})(2240\Omega)=13.4\text{kV}$

由于 $X_C=X_L$，电路发生共振。注意，尽管电源电压不高，但在电感和电容上的电压值却很高。

35.9　如图 35－3 所示，容抗为 30Ω 的电容、阻值为 44Ω 的纯电阻以及感抗为 90Ω、电阻为 36Ω 的电感线圈串接到 200V、60Hz 的电路中。试求(a)回路电流，(b)各元件的端电压，(c)线路的功率因数以及(d)电路消耗功率。

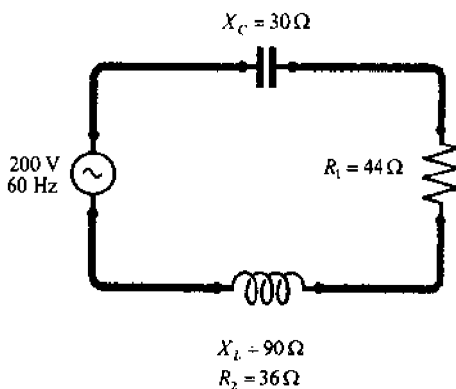


图 35－3

解☞　(a)$Z=\sqrt{(R_1+R_2)^2+(X_L-X_C)^2}$

$=\sqrt{(44+36)^2+(90-30)^2}$

$=0.10\text{k}\Omega$

所以

$$I=\frac{V}{Z}=\frac{200\text{V}}{100\Omega}=2.0\text{A}$$

(b)$V_C=IX_C=(2.0\text{A})(30\Omega)=60\text{V}$

$V_R=IR_1=(2.0\text{A})(44\Omega)=88\text{V}$

线圈阻抗$=\sqrt{R_2^2+X_L^2}=\sqrt{(36)^2+(90)^2}=97\Omega$

总电压　$V_{总}=(2.0\text{A})(97\Omega)=0.19\text{kV}$

(c)$\cos\phi=\frac{R}{Z}=\frac{80}{100}=0.80$

(d)消耗功率$=VI\cos\phi=(200\text{V})(2\text{A})(0.80)=0.32\text{kW}$

或　　$=I^2R=(2\text{A})^2(80\Omega)=0.32\text{kW}$

35.10 求电感 40.0mH 和电容 600pF 的共振频率。

解 ☞ $f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{(40.0\times10^{-3}\text{H})(600\times10^{-12}\text{F})}}=32.5\text{kHz}$

35.11 一升压变压器将 120V 的线路电压提高到 1800V。已知原线圈 100 匝。求副线圈匝数。

解 ☞
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{N_1}{N_2}$$
$$N_2=N_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)=(100)\left(\frac{1800}{120}\right)=1.50\times10^3$$

35.12 一台变压器将 120V 电路电压升至 900V 且提供 2.0A 的电流。求电路电流。假设效率为 100%。

解 ☞ 原线圈功率＝副线圈功率，即
$$I_1(120\text{V})=(2.0\text{A})(900\text{V})$$
$$I_1=15\text{A}$$

35.13 一台降压变压器从 2.5kV 的线路中降压并提供 80A 的负载电流。已知原、副线圈的匝数比为 20∶1，并设效率为 100%。试求副线圈的端电压、原线圈电流以及输出功率 P_2。

解 ☞ $V_2=\left(\frac{1}{20}\right)V_1=0.13\text{kV}$，$I_1=\left(\frac{1}{20}\right)I_2=4.0\text{A}$，$P_2=V_2I_2=10\text{kW}$

功率表达式只适用于纯电阻负载，其功率因数为 1。

习　题

35.14 当电压表跨接到频率 $f=1000\text{Hz}$ 的正弦交流电源两端时，读数为 80.0V。试写出电源的瞬时电压表达式。

（答　$v=(113\text{V})\sin 2000\pi t$，$t$ 以 s 为单位）

35.15 交流电在 10Ω 的电阻上产生 360W 的热功率。试求电压和电流的有效值。

（答　60V，6.0A）

35.16 40.0Ω 的电阻接到 15.0V 的频率可变的电子振荡器两端。求当频率为(a)100Hz 及(b)100kHz 时，电阻上的电流。

（答　(a)0.375A；(b)0.375A）

35.17 若上题中所用元件不是电阻，而是 2.00mH 的电感，情况又如何？

（答　(a)11.9A；(b)11.9mA）

35.18 若上题中不用电感，而改用 0.300μF 的电容，情况怎样？

（答　(a)2.83mA；(b)2.83A）

35.19 一线圈的电阻为 20Ω，电感为 0.35H。试求对于 25r/s 的交流电，它的感抗和阻抗为多少？

（答　55Ω，59Ω）

35.20 4.0μF 的电容接入频率 500Hz 的交流线路，线路电流为 30mA。求电容器的容抗以及端电压。

（答　80Ω，2.4V）

35.21 一线圈的电感为 0.100H，电阻为 12.0Ω，接入 110V、60Hz 的交流电路。试求(a)线圈的感抗，(b)阻抗，(c)电流，(d)电压与电流间的相角，(e)线路的功率因数以及(f)接入线路的功率表的读数。

（答　(a)37.7Ω；(b)39.6Ω；(c)2.78A；(d)电压超前 72.3°；(e)0.303；(f)92.6W）

35.22 10.0μF 的电容与 40.0Ω 的电阻串联后接到 110V、60.0Hz 的电路中。试求(a)容抗，(b)阻抗，(c)电流，(d)电压与电流间的相角，(e)功率因数。

（答　(a)266Ω；(b)269Ω；(c)0.409A；(d)电压落后 81.4°；(e)0.149）

35.23 $R-L-C$ 串联电路接 110V 交流电压。已知 $R=9.0\Omega$，$X_L=28\Omega$，$X_C=16\Omega$。试求(a)线路阻抗，(b)电流，(c)电压与电流间的相角以及(d)功率因数。

（答　(a)15Ω；(b)7.3A；(c)电压超前 53°；(d)0.60）

35.24 对于 3.0mH 的电感，想用它在电路中产生共振，共振频率为 1.0MHz。应使用多大的电容？

(答　8.9pF)

35.25　阻值为 11Ω 的电阻、感抗为 120Ω 的电感和容抗为 120Ω 的电容串接后连到 110V、60Hz 的电源上。求各元件的端电压。

(答　$V_R=0.11\text{kV}, V_L=V_C=1.2\text{kV}$)

35.26　800Ω 的纯电阻与一未知电容串联后接入 120V、60Hz 的电路中。已知电阻上的电压降为 102V。(a)电容器上的电压降为多少？(b)电容的容抗为多少？

(答　(a)63V；(b)0.50kΩ)

35.27　一纯电感线圈与 90.0Ω 的电阻串联后接入 120V、60Hz 的电路中。电阻两端的电压为 36V。试求线圈的端电压和电感值。

(答　0.11kV,0.76H)

35.28　一降压变压器将 2.2kV 变为 110V。若副线圈为 25 匝。初线圈为多少匝？

(答　5.0×10^2 匝)

35.29　一降压变压器将 1650V 的线路电压变为 110V、45A。求线路电流，假设效率为 100%。

(答　3.0A)

35.30　一升压变压器线路电压为 110V，升压后负载电流为 2.0A。若原、副线圈的匝数比为 1∶25，试求副线圈两端的电压、原线圈中的电流以及输出功率。假设负载为电阻，变压器效率为 100%。

(答　2.8kV,50A,5.5kW)

第三十六章　光的反射

光的本性

光，以及其他所有电磁辐射，是物理学重要的研究对象。时至今日，物理学家仍在努力，以深入了解它的本质。在可观测的水平，光呈现出似乎矛盾的行为：通过波动模型或粒子模型来描述的行为。通常，能量较大时，光就像理想的连续波——相互依存的电磁场的波动。然而，当涉及到原子的光辐射或光吸收过程时，这种辐射的能量又像是一股微细粒子的定向流动——光就好像是粒子流。幸运的是，在较普遍的实际情况中，我们可以预言光的行为，而不必为其本质而困扰。

反射定律

光线是垂直于光波波前的数学意义上的直线，它表示电磁能量的传播方向。光受到镜而反射时，反射角等于入射角，如图 36-1 所示。此外，入射光、反射光以及反射面的法线都在同一平面，入射面内。

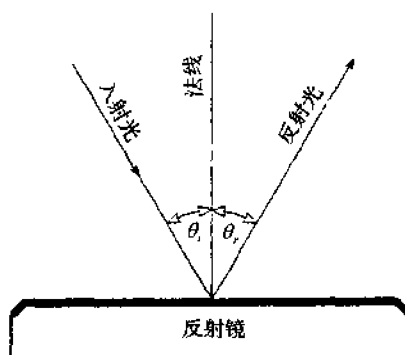


图 36-1

平面镜

平面镜成像是正立的，像与物体大小相等，位于镜的后面，且像到镜的距离等于物到镜的距离。这种像是虚像，若把屏放在像的位置，屏上并没有像，因为光并不会聚到该处的屏上。

球面镜

图 36-2 中的 F 为球面镜的主焦点，它是一束平行且又靠近镜面中心轴（光轴）的光线所会聚的点。凹面镜的焦点为实焦点，凸面镜的焦点为虚焦点。焦点在光轴上，位于镜面与镜面曲率中心 C 的中间。

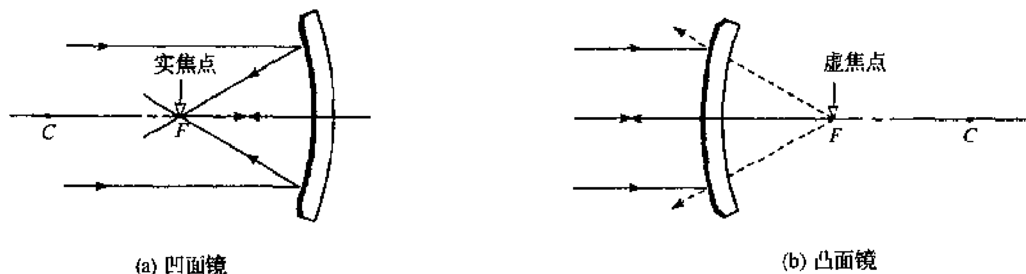


图 36-2

对于从镜面来看位于主焦点后的物体，凹面镜成倒立的实像。若物体位于主焦点与镜之间，则成正立的、放大的虚像。

而凸面镜对它前边的物体只能成正立的、缩小的虚像。

反射镜方程

无论是凹面镜还是凸面镜，反射镜方程为：

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}$$

式中s_o为从镜面算起的物距，
　　s_i为从镜面算起的像距，
　　R为镜面的曲率半径，
　　f为镜面的焦距$=R/2$。

另外有

- 当物在镜面前时，s_o为正。
- 当像在镜面前，即像为实像时，s_i为正。
- 当像在镜面后，即像为虚像时，s_i为负。
- 对于凹面镜，R和f为正；对于凸面镜，R和f为负。
- 球面镜成像的放大率＝(像的长度)/(物的长度)＝(像到镜的距离)/(物到镜的距离)＝$|s_i/s_o|$

例　题

36.1　如图 36-3 所示，在两个成 30°的平面镜中间有一发光点A。请用作图法画出它的四个像来。

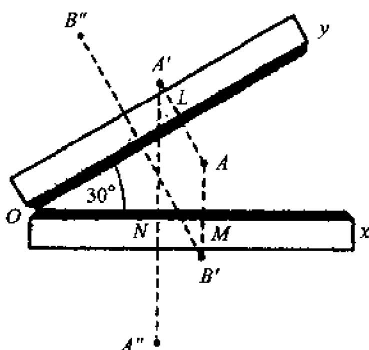


图 36-3

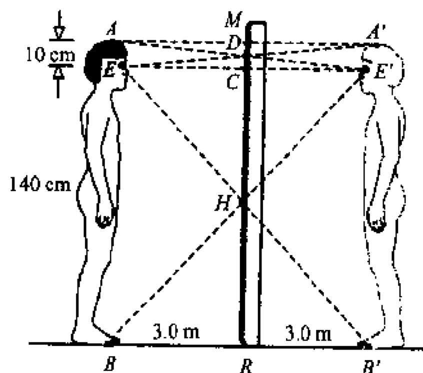


图 36-4

解　从A点作反射镜Oy和Ox的垂线AA'和AB'。令$\overline{AL}=\overline{LA'}$和$\overline{AM}=\overline{MB'}$。则$A'$和$B'$为$A$的像。

然后，从A'和B'再作Ox和Oy的垂线，令$\overline{A'N}=\overline{NA''}$和$\overline{B'P}=\overline{PB''}$。则$A''$为$A'$在$Ox$中的像，$B''$为$B'$在$Oy$中的像。$A$的四个像为$A'$、$B'$、$A''$和$B''$。另外，还可以继续成像，比如$A''$和$B''$的像。

36.2　一个 1.50m 高的儿童站在竖直的平面镜 3.0m 前，刚好能看到全身的像。他的眼睛距地面为 1.40m。求镜子可能的最小尺寸以及镜距地面的高度。

解　在图 36-4 中，AB代表这个儿童，E为他的眼睛。平面镜MR中儿童AB的像为$A'B'$。为了能看到自己全身像，镜子最小的尺寸为DH。

$\triangle DEC \cong \triangle DA'M$

所以　$\overline{CD}=\overline{DM}=5.0\text{cm}$

$\triangle HRB' \cong \triangle HCE$

所以　$\overline{RH}=\overline{HC}=70\text{cm}$

镜子尺寸为$\overline{HC}+\overline{CD}=75\text{cm}$，而镜距地面的高度$\overline{RH}=70\text{cm}$。

36.3　在图 36-5 中，光线IO入射到小反射镜MM。开始时小镜MM与直尺SC平行，相距 1.0m。假设小镜转过 8°，到了$M'M'$的位置。问反射光斑将移动多少距离。这种装置叫光杠杆，可用于测量微小偏转。

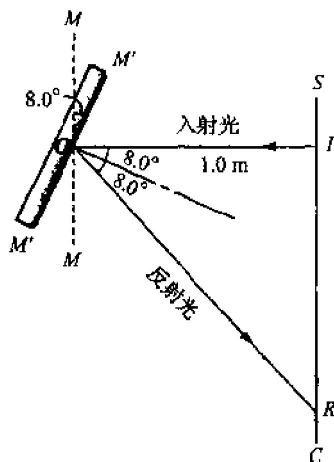


图 36-5

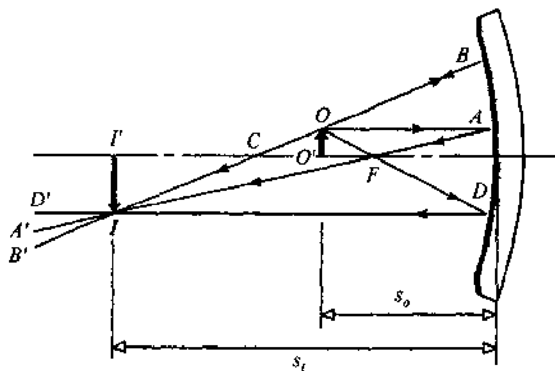


图 36-6

解答 当小镜转过 8°，其法线也转过 8°。这时入射角为 8°。由反射定律，反射角也为 8°，所以 $\angle IOR=16°$。所以

$$\overline{IR}=\overline{IO}\tan16°=(1.0\text{m})(0.287)=29\text{cm}$$

36.4 图 36-6 中的凹型球面反射镜的曲率半径为 4m。物体 OO' 在镜前 3m 处，物高 5cm。试用(a)作图法和(b)计算法确定像 II' 的位置和高度。

解答 在图 36-6 中，球面的曲率中心为 C，距镜 4m，主焦点 F 距镜面 2m。

(a)从 O 点发出的下述三条光线中的两条可以确定像的位置。

(1)平行于光轴的光线 OA，经球面镜反射后经过主焦点 F，方向为 AFA'。

(2)经过球心 C 的光线 OB，它垂直于入射镜面并原路返回成为 BCB'。

(3)经过主焦点 F 的光线 OFD，经球面反射后平行于光轴成为 DD'。

上述三条光线中的任意两条光线的交点 I 即 O 点的像。而 II' 表示物 OO' 的成像位置和大小。它是放大的倒立实像，到镜面的距离大于物到镜面的距离。(注意：若物体放在 II' 的位置，则它的像在 OO' 的位置，是缩小的倒立实像。)

(b)由镜面方程

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{2}{R}$$

代入 $s_o=3\text{m}, R=4\text{m}$，得

$s_i=6\text{m}$

由于 s_i 是正的，所以得实像，在镜前 6m 处。

又，$\dfrac{\text{像高}}{\text{物高}}=\left|\dfrac{s_i}{s_o}\right|=\dfrac{6\text{m}}{3\text{m}}=2$

所以像高 $=(2)(5\text{cm})=0.10\text{m}$。

36.5 图 36-7 中，物体 OO' 距曲率半径为 80cm 的凹型球面反射镜 25cm。试用(a)作图法和(b)镜面方程来求像 II' 的位置和相对尺寸。

解答 (a)从 O 点发出的下述三个光线中的两条将确定像。

(1)平行于光轴的光线 OA，反射后经过焦点 F，F 距镜 40cm。

(2)沿半径 COB 的光线 OB，镜面反射后原路返回，仍经过 C。

(3)光线 OD，其延长线经过 F，反射光平行于光轴。由于镜面曲率很大，这条反射光就不如另外两条光画得准确。

反射光 AA'、BB' 或 DD' 并不交会，但它们好像都是从镜面后的 I 点发出的。所以 II' 就代表物 OO' 的像，可以确定其位置和大小。像是放大的直立虚像。

(b)

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{2}{R}$$

代入 $s_o=25\text{cm}, R=80\text{cm}$ 有

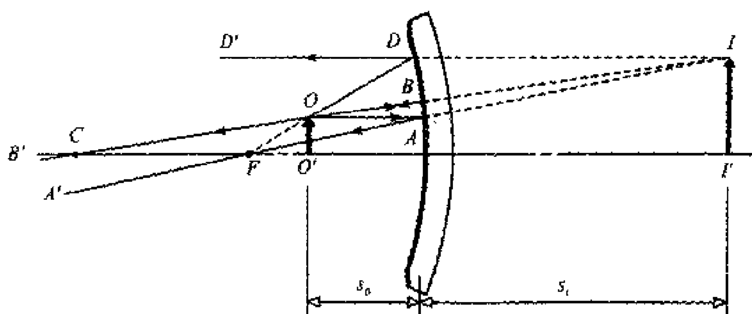


图 36 - 7

$s_i = -67\text{cm}$

由 s_i 是负值，所以像是虚像，在镜面后 67cm 处。

线放大率 $= \dfrac{像高}{物高} = \left|\dfrac{s_i}{s_o}\right| = \dfrac{66.7\text{cm}}{25\text{cm}} = 2.7$

36.6 图 36 - 8 中，凸面镜半径为 40cm，6cm 高的物体位于镜前 30cm 处。试用(a)作图法和(b)镜面方程来确定像的位置和大小。

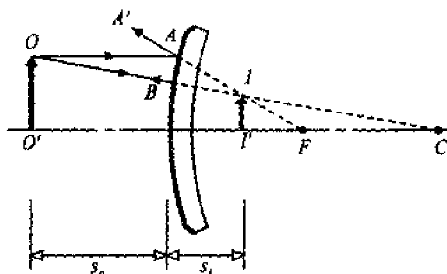


图 36 - 8

解 (a)选择 O 点发出的两条光线：

(1)平行于光轴的 OA，反射光 AA' 的延长线经过主焦点 F。

(2)指向球心 C 的光线 OB，它垂直于镜面原路返回。

反射光 AA' 和 BO 虽不相交，但它们好像来自镜面后的 I 点。所以 II' 代表了 OO' 的像，大小和位置如图示。

若物体在凸面镜之前，即实物，所有的像均是缩小的直立虚像。

(b)由
$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{2}{R}$$

代入 $s_o = 30\text{cm}, R = -40\text{cm}$，得

$s_i = -12\text{cm}$

由 s_i 是负值，得到虚像，在镜面后 12cm 处。

$\dfrac{像高}{物高} = \left|\dfrac{s_i}{s_o}\right| = \dfrac{12\text{cm}}{30\text{cm}} = 0.40$

像高 $= (0.40)(6.0\text{cm}) = 2.4\text{cm}$

36.7 要想用曲率半径 180cm 的凹面镜成实像，且像的大小只为物的一半，试问物应放在何处？

解 由像的放大率为 1/2，$s_i/s_o = 1/2$，得 $s_i = s_o/2$。由

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{2}{R}, \qquad \frac{1}{s_o}+\frac{2}{s_o}=\frac{2}{180}$$

得 $s_o = 0.27\text{m}$，物在凹面镜前 0.27m 处。

36.8 女孩站在凹面镜前多远处能看到放大 4 倍的自己脸的直立像？设凹面镜的曲率半径为 120cm。

解 该像必定是虚像，s_i 是负值，$s_i = -4s_o$。由

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{2}{R}, \qquad \frac{1}{s_o}-\frac{1}{4s_o}=\frac{2}{120}$$

得 $s_o = 45\text{cm}$，即站在镜前 45cm 处。

36.9 物体放在球面镜前 15cm 处，欲得到大小为物体五分之一的直立像，应选用何种反射

镜，其曲率半径为多少？

解 球面镜产生的直立像为虚像，所以有

$$s_i = -s_o/5 = -15/5 = -3(\text{cm})$$

由于像比物小，所以需选用凸面镜，其半径由

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{2}{R}, \qquad \frac{1}{15}-\frac{1}{3}=\frac{2}{R}$$

可得：$R=-7.5$cm(凸面镜)

36.10 太阳直径对于地球上任意一点的张角约为32′。若用曲率半径为400cm的凹面镜成像。试求像的位置和大小。参见图36-9。

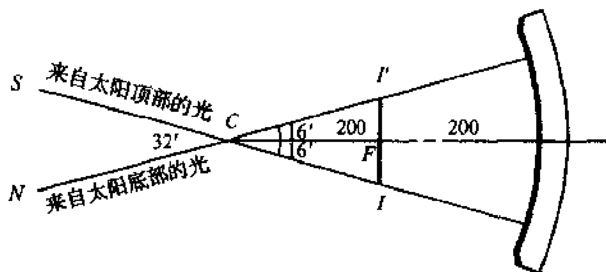


图36-9

解 由于太阳非常遥远，即 s_o 非常大，$1/s_o$ 实际上等于零。所以

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{2}{R}, \qquad 0+\frac{1}{s_i}=\frac{2}{400}$$

解得 $s_i=200$cm。像在光轴上，距镜面200cm。

由于太阳以及它的像 II' 对曲率中心C张角相等，从图中可知

$$\tan 16' = \frac{\overline{II'}/2}{\overline{CF}}$$

所以有

$$\overline{II'}=2\,\overline{CF}\tan 16'=(2)(2.00\text{m})(0.00465)=1.9\text{cm}$$

36.11 牙医用的小反射镜距牙齿0.60cm时，得到放大4倍的像。求反射镜的曲率半径。

解 由于 $|s_i/s_o|=4$，而 $s_o=0.60$cm，所以 $s_i=\pm 2.4$cm 有

$$\frac{1}{0.60}+\frac{1}{\pm 2.4}=\frac{2}{R}, \qquad 1.667\pm 0.417=\frac{2}{R}$$

解得 $R=0.96$cm 和 $R=1.6$cm，均为正值，所以反射镜为凹面镜。（凸面镜像总是缩小的，由此立即可以断定是凹面镜。）$R=0.96$cm 时得到实像(正号)不便于观察(为什么?)。所以应选 $R=1.6$cm。

习　题

36.12 如果你站在平面镜前3m处想拍摄自己的像，试问镜头应对多远聚焦？

(答　6m)

36.13 两平面镜成直角。两镜之间有一发光点。系统能形成几个像？

(答　3个)

36.14 两平面镜平行相距20cm。镜面之间有一发光点距其中一镜5.0cm。试求每个镜子中形成最近的三个像到镜子的距离。

(答　5.0cm，35cm，45cm；15cm，25cm，55cm)

36.15 两平面镜成90°，一束光入射到其中一个反射镜，反射后照到另一面镜，再反射而离开。试求入射光与最终离开的反射光之间的夹角。

(答　180°)

36.16 一束入射光与平面镜的法线成25°。若将平面镜旋转6°，使入射角变成31°。试求反射光转过多大角

度。

（答　12°）

36.17　烛光置于半径为 64cm 的凹面镜前 40cm 处。试描述像的情况。

（答　放大 4 倍的倒立实像，在镜前 0.16m 处）

36.18　物体置于半径为 60cm 的凹面镜前 20cm 处。试描述像的情况。

（答　放大 3 倍的直立虚像，位于镜后 60cm 处）

36.19　物体距半径为 36cm 的凹面镜多远，才能得到九分之一大小的实像？

（答　0.18m）

36.20　7.0cm 高的物体置于半径 45cm 的凸面镜前 15cm 处。求其像。

（答　高 4.2cm 的直立虚像，在镜后 9.0cm 处。）

36.21　物体距凸面镜 12cm，得到只有六分之一大小的像，求该凸面镜的焦距。

（答　−2.4cm）

36.22　灯泡距墙 12m，要在墙上得到放大 5 倍的灯泡像，需用何种球面镜？放在何处？

（答　凹面镜，曲率半径 5.0m，距灯 3.0m）

36.23　月球直径 3500km，距地球 384000km。试求直径为 20cm 的抛光球面所形成的月球像的位置和直径。

（答　球内 5.0cm 处，0.46mm）

第三十七章 光的折射

光速

光在不同介质中传播的速率是不同的。光在真空中传播的速率最快，为 $c=2.988\times10^8\text{m/s}$。在空气中的速率为 $c/1.0003$，在水中为 $c/1.33$，而在普通玻璃中为 $c/1.5$。然而，从微观的层面看，光由光子组成，而光子的速率就是 c。在介质中所表现出的减速是由于介质原子对行进中光的吸收和再发射。

折射率

介质的绝对折射率定义为光在真空中的速率与在该介质中速率之比，即

$$n=\frac{c}{v}$$

对于任何两种介质，介质 1 相对介质 2 的相对折射率定义为它们各自的绝对折射率之比，即 n_1/n_2。

折射

光线倾斜地照到折射率不同的两种介质的界面时，透射光会发生偏折，这种现象叫作折射，如图 37－1 所示。如果 $n_t>n_i$，入射光在界面上发生折射，使光线在第二种介质中偏向界面的法向，如图中所画的情况。而若 $n_t<n_i$，折射光线会远离法线的方向。图 37－1 中若光线的方向倒转过来就是这种情况。在上述两种情况中，入射光、折射光(或透射光)与界面法线都在同一平面内。图 37－1 中的 θ_i 和 θ_t 分别叫作入射角和折射角(或透射角)。

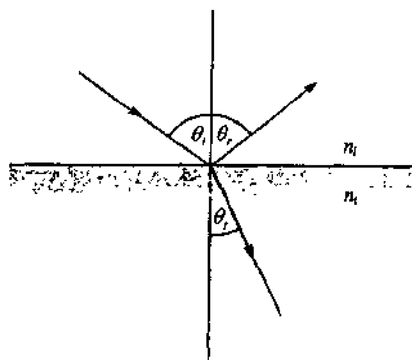


图 37－1

斯涅耳定律

在折射率分别为 n_i 和 n_t 的两种介质界面上光的折射遵循斯涅耳定律：

$$n_i\sin\theta_i=n_t\sin\theta_t$$

式中 θ_i 和 θ_t 如图 37－1 所示。如果光线倒转方向，同样满足斯涅耳定律方程，所以路径并不改变。

全反射

光线从折射率为 n_i 的介质入射到折射率为 n_t 的介质，在界面会发生反射。若 $n_i<n_t$，叫外反射；而 $n_i>n_t$，则叫内反射。若光从折射率较大的介质(光密媒质)入射到折射率较低的介质(光疏媒质)，如图 37－2 所示，有一部分发生折射，另有一部分发生反射。由于 θ_t 大于 θ_i，当 θ_i 足够大时，有 $\theta_t=90°$。这时入射角称临界角，记以 θ_c。当 θ_i 大于 θ_c 时，不产生折射，入射光受到全反射。

全反射发生的条件为 θ_i 大于 θ_c，由于

$$n_i\sin\theta_c=n_t\sin90°$$

所以

$$\sin\theta_c=\frac{n_t}{n_i}$$

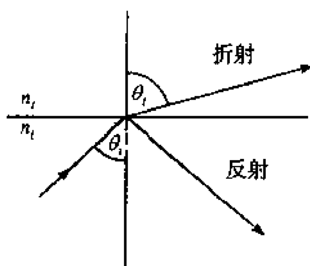


图 37－2

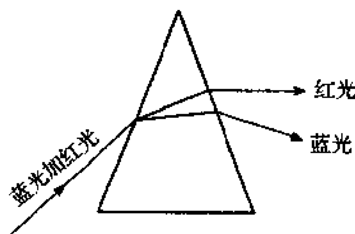


图 37－3

因为正弦值永远小于等于 1，所以只有当 $n_i>n_t$ 时才有可能产生全反射。

棱镜

如图 37－3 所示，棱镜可以使光色散，从而呈现出不同的颜色来。由于介质的折射率与光的波长有关，不同颜色的光折射角有所不同。几乎所有的介质都对红光折射最小，而对蓝光折射最大。

例　题

37.1 光在水中的速率为$(3/4)c$。试求光从真空（或空气，光在这两种介质中的行为极为相似）进入水中对光的频率以及波长的影响，并求水的折射率。

解 光波每秒钟的波峰数并不因为光从真空（或空气）进入水中而有任何改变。所以光在这两种介质中的频率是相等的。然而波长＝(速率)/(频率)，所以光在水中波长为在空气中的四分之三。

水的绝对折射率为

$$n=\frac{\text{光在真空中速率}}{\text{光在水中速率}}=\frac{c}{(3/4)c}=\frac{4}{3}=1.33$$

37.2 玻璃板厚 0.60cm，折射率为 1.55。试求一个光脉冲垂直地透过玻璃板要花多长时间。

解 $t=\frac{x}{v}=\frac{0.0060\text{m}}{(2.998\times10^8/1.55)\text{m/s}}=3.1\times10^{-11}\text{s}$

37.3 如图 37－4 所示，光从空气入射到玻璃板（$n=1.50$）。已知入射角为 50°，求反射角和折射角。

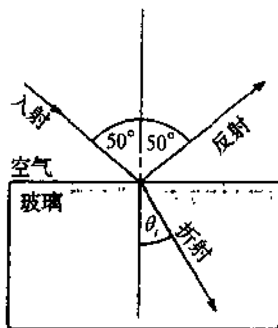


图 37－4

解 由反射定律知，反射角等于入射角，50°。

又由 $n_i\sin i_i=n_t\sin\theta_t$　有

$$\sin\theta_t=\frac{n_i}{n_t}\sin\theta_i=\frac{1.0}{1.5}\sin50°=0.51$$

所以 $\theta_t=31°$。

37.4 金刚石的折射率为 2.42。求光从金刚石射入空气时的临界角。

解 由 $n_i\sin\theta_i=n_t\sin\theta_t$

有$(2.42)\sin\theta_c=(1)\sin90°$

解得 $\sin\theta_c=0.413$，　$\theta_c=24.4°$

37.5 求光从玻璃（$n=1.54$）进入水（$n=1.33$）时的临界角。

解 $n_i\sin\theta_i=n_t\sin\theta_t$

代入已知折射率，且 $\sin\theta_t=\sin90°=1$ 有

$$\sin\theta_c=\frac{n_t}{n_i}=\frac{1.33}{1.54}=0.864$$

解得 $\theta_c=59.7°$

37.6 水($n_{水}=1.33$)面上漂浮一层油($n_{油}=1.45$)。光线从空气($n_{气}=1.0003$)入射到油层，入射角为 40.0°，求光线在水中的折射角。(见图 37－5)

解 对于空气-油界面有

$$n_{气}\sin40^{\circ}=n_{油}\sin\theta_{油}$$

而在油-水界面有

$$n_{油}\sin\theta_{油}=n_{水}\sin\theta_{水}$$

所以有

$$n_{气}\sin40.0^{\circ}=n_{水}\sin\theta_{水}$$

这个表达式反映出的情况就好像不存在油层一样。

40°
空气
水

图 37－5

解

$$\sin\theta_{水}=\frac{n_{气}\sin40.0^{\circ}}{n_{水}}=\frac{(1)(0.643)}{1.33}$$

得

$$\theta_{水}=28.9^{\circ}$$

37.7 如图 37－6 所示。2.00m 深的水下有一小发光体向各方向发光。在水面上形成了一个圆形亮区。已知水折射率 $n=4/3$，求亮区的半径 R。

解 圆形亮区是由于光线从水中折射出来所致。光在水-空气界面上的入射角大于临界角 θ_c 时，会发生全反射，而不产生折射。这时得到最大的圆形亮区。由

$$\sin\theta_c=\frac{n_a}{n_w}=\frac{1}{4/3}$$

得

$$\theta_c=48.6^{\circ}$$

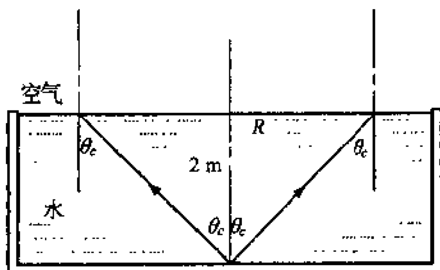


图 37－6

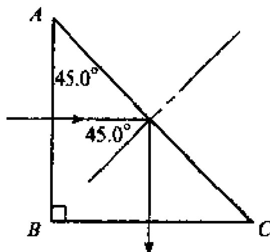


图 37－7

由图上的几何关系有

$$R=(2.00\text{m})\tan\theta_c=(2.00\text{m})(1.13)=2.26\text{m}$$

37.8 图 37－7 所示的 45.0°棱镜用全反射原理将光束偏转 90°。求满足此要求的棱镜折射率最小的极限值。

解 光线垂直于 AB 面入射不发生偏转。所以在 AC 面的入射角为 45.0°。要求光在 AC 面发生全反射且转过 90.0°，棱镜的临界角必须小于 45.0°。由

$$n_i\sin\theta_c=n_t\sin90^{\circ},\quad n_t=1.00$$

所以 n_i 的极小值为 $1/(\sin45.0^{\circ})=1.41$。

37.9 图 37－8 中的棱镜折射率为 1.55，光线垂直射入棱镜。求光线射出棱镜偏转了多大角度 D。

解 由于光线垂直入射第一个界面，光不改变方向。在第二个界面处 $\theta_i=30^{\circ}$。由斯涅耳定律 $n_i\sin\theta_i=n_t\sin\theta_t$

有 $\sin\theta_t=\frac{1.55}{1}\sin30^{\circ}$

解得 $\theta_t=50.8^{\circ}$

$D=\theta_t-\theta_i=21^{\circ}$

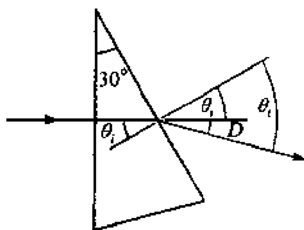


图 37-8

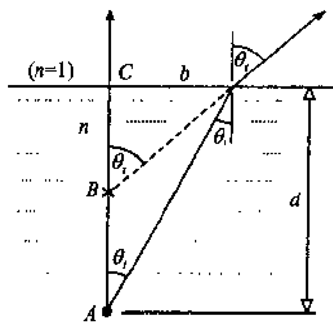


图 37-9

37.10 如图 37-9 所示，一物体在透明介质(折射率为 n)表面下 d 处。若人在差不多正上方看这个物体，会感到物体在什么位置？

解 物体 A 所发出的光就好像从介质中的 B 点出射一样。因此其视觉深度为$\overline{CB}$。从图可知

$$\frac{b}{\overline{CB}}=\tan\theta_t,\quad \frac{b}{\overline{CA}}=\tan\theta_i$$

人几乎在物的正上方观察，所以 θ_i 和 θ_t 都非常小，角度的正弦值近似于其正切值。即

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}=\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_t}\approx\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}$$

而 $n\sin i=(1)\sin r$，得

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t}=\frac{1}{n}$$

所以

$$\overline{CB}=\frac{\overline{CA}}{n}$$

即视觉深度为实际深度的 n 分之一。

37.11 玻璃板厚 4.00mm。若显微镜由观察其上表面改变成观察下表面，须将镜头向下移动 2.58mm。求玻璃的折射率。

解 由上题，玻璃的视觉厚度为其实际厚度的 $1/n$。所以有

视觉厚度 $=2.58\text{mm}=(4.00\text{mm})/n$

解得 $n=1.55$

37.12 如图 37-10 所示，光线从矩形玻璃块的端面入射。试证明，若要所有入射光线均受到全反射，必有玻璃折射率 $n_2>1.414$。

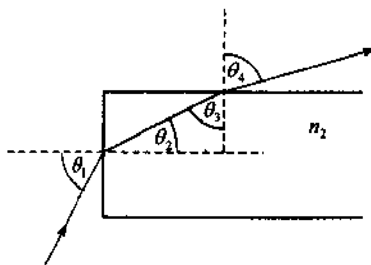


图 37-10

解 在图中，θ_1 越大，θ_3 就越小。因此，很可能当 $\theta_1=90°$时，光线射出玻璃块。这时有

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

即$(1)(1)=n_2\sin\theta_2$

对于光刚好射出玻璃，有 $\theta_4=90°$

$$n_2\sin\theta_3=n_1\sin\theta_4$$

变成 $n_2\sin\theta_3=(1)(1)$

即要满足两个等式

$n_2\sin\theta_2=1$ 和 $n_2\sin\theta_3=1$

二者之比为

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_3}=1$$

然而由图可知

$$\sin\theta_3=\cos\theta_2$$

即　$\tan\theta_2 = 1$　　　或 $\theta_2 = 45.00°$

由于 $n_2\sin\theta_2 = 1$，得

$$n_2 = \frac{1}{\sin 45.00°} = 1.414$$

要想使所有射入玻璃的光线都受到全反射；玻璃的折射率至少为1.414。通过考察和分析这张图也可得到结论，怎样做？

习　题

37.13 光在某种玻璃中的速率为 1.91×10^8 m/s。求其折射率。

（答　1.57）

37.14 光在空气中的波长为546nm，求其频率。这种光在水（$n=1.33$）中的频率、速率和波长为多少？

（答　549Hz，549Hz，2.25×10^8 m/s，411nm）

37.15 一束光入射到水的表面，入射角为60°。求反射光和折射光的方向。

（答　反射角为60°，折射角为41°）

37.16 光从岩盐到空气的临界角为40.5°。求岩盐的折射率。

（答　1.54）

37.17 光从玻璃（$n=1.50$）到空气的临界角为多少？

（答　41.8°）

37.18 金刚石和冕牌玻璃的绝对折射率分别为5/2和3/2。试求（a）金刚石对冕牌玻璃的相对折射率和（b）它们之间的临界角。

（答　(a)5/3；(b)37°）

37.19 池水60cm深。求竖直看去，水的视觉深度。水的折射率为4/3。

（答　45cm）

37.20 容器中有4cm水（$n=1.33$），水面上有6cm汽油（$n=1.50$）。从空气中竖直看，汽油的上表面到容器底的视觉距离为多少？

（答　7cm）

37.21 平面镜由1.0cm厚的平玻璃（$n=3/2$）背面镀银组成。人站在镜前50.0cm，垂直看自己的像。人像在镜的外表面后边多远？

（答　51.3cm）

37.22 在空气中竖直观察，一直杆插入水中的部分好像与水面成45°，试求直杆实际的倾角。水折射率为1.33。

（答　$\arctan 1.33 = 53°$）

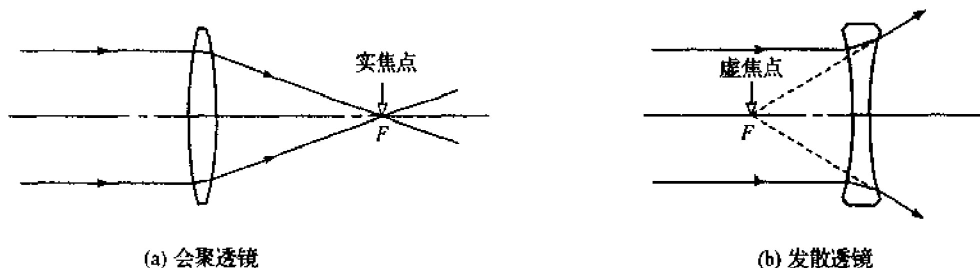
37.23 某种玻璃对蓝光的折射率为1.640，而对红光的折射率为1.605。若一束白光（包括各种颜色）以40°入射到平板玻璃，求玻璃中蓝色和红色折射光之间的夹角。

（答　0.53°）

第三十八章 薄透镜

透镜的分类

如图 38－1 所示，透镜中心比边缘厚的为会聚透镜、凸透镜或正透镜，它将平行光会聚到一个实焦点。而中心比边缘薄的透镜叫发散透镜、凹透镜或负透镜，它将平行光发散，好像发散光来自一个虚焦点。



(a) 会聚透镜　　(b) 发散透镜

图 38－1

球面透镜使近轴、且平行于光轴的光线会聚到一点，F，这个点称为薄透镜的主焦点或简称焦点。对于凸透镜，为实焦点；而对凹透镜，则为虚焦点。焦距 f 为从透镜到焦点的距离。图 38－1 中的凸、凹透镜如果左右面倒置，将不改变光的路径。所以每种透镜都有左右对称的两个焦点。

物像关系

对于凸透镜和凹透镜都有

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$$

式中 s_o 为物到透镜的距离（物距），s_i 为像到透镜的距离（像距），f 为焦距。我们假设透镜为薄透镜，光线为近轴光线。

对于实物，s_o 为正；对于虚物（见下一章），s_o 为负。对于实像，s_i 为正；对于虚像，s_i 为负。对于凸透镜，f 为正；对凹透镜，f 为负。透镜的线放大率为像的大小与物的大小之比，也等于像距与物距之比，即

$$\text{线放大率}=\left|\frac{s_i}{s_o}\right|$$

物体在凸透镜焦点以外，成倒立的实像。物体在焦点和凸透镜之间，则成一个放大的直立的虚像（与物都在透镜同一侧）。

凹透镜对实物成缩小的、直立的虚像。

透镜制造者方程

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

式中 n 为透镜材质的折射率，r_1 和 r_2 为透镜两表面的曲率半径。该公式对于各类薄透镜都成立。当曲率中心在透镜右侧时，曲率半径 r 取正值；反之，当曲率中心在左侧时，r 取负值。

若透镜的折射率为 n_1，而周围物质的折射率为 n_2，则透镜制造者方程中的 n 应代之以 n_1/n_2。

光焦度(D)

焦距若以 m 米为单位,则焦距的倒数称作光焦度。光焦度的单位为 D,量纲为 m^{-1},$1D=1m^{-1}$。若焦距为 f_1 和 f_2 的两个薄透镜紧贴在一起,则这个透镜组合的光焦度等于各透镜光焦度之和:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

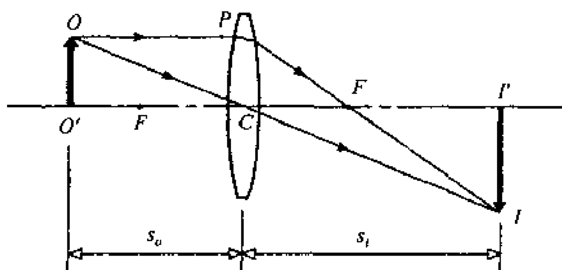


图 38-2

例 题

38.1 物 OO'高 4.0cm,距薄凸透镜 20cm,透镜焦距 +12cm。试求像 II'的位置和高度.(a)用作图法,(b)用计算法

解 (a)见图 38-3,从 O 点画两条特定的光线可以确定像:

(1)平行于光轴的光线 OP,经透镜折射后必经过焦点 F。

(2)通过光心 C 的光线不发生偏转,所以光线 OCI 为一条直线。

这两条光线的交点 I 即为物 O 的像点,而 II'就代表了像的位置和大小。像为放大的、倒立的实像,到透镜的距离比物到透镜的距离要远。(若物在 II'处,而像就在 OO'处,为缩小的、倒立的实像。)

(b) $\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$

代入 $s_o=20cm$,$f=12cm$,得

$$s_i=30cm$$

由 s_i 为正,所以像为实像,在透镜后 30cm 处。由

$$\left|\frac{s_i}{s_o}\right|=\frac{30cm}{20cm}=1.5$$

所以像高 $=(1.5)(4.0)cm=6.0cm$。

38.2 物 OO'在凸透镜前 5.0cm 处。透镜焦距为 +7.5cm。求其像 II'的位置和放大率。(a)用作图法,(b)用计算法。

解 (a)从 O 作两条特定光线,如图 38-3。

(1)平行于光轴的 OP,折射后经过 F。

(2)通过透镜光心的直线 OCN,

这两条光线并不相交,然而它们都好像是从 I 点发出来的。II'代表了 OO'的像的位置和大小。

(b)

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$$

代入 $s_o=5.0cm$,$f=7.5cm$ 得

$s_i=-15cm$

由于 s_i 为负值,像为虚像,和物一样,均在透镜的同一边。像在透镜前 15cm 处。

$$\text{线放大率}=\left|\frac{s_i}{s_o}\right|=\frac{15cm}{5.0cm}=3$$

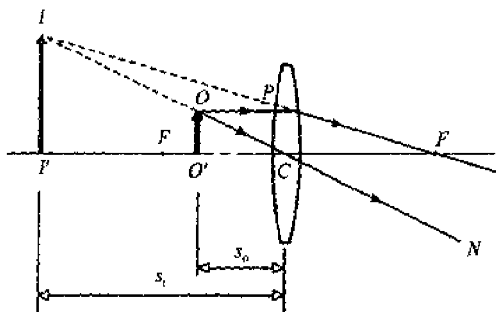


图 38 - 3

38.3 物 OO' 高 9.0cm，在焦距为 −18cm 的凹透镜前 27cm 处。求像 II' 的位置和大小。(a)用作图法，(b)用计算法。

解 (a)如图 38 - 4，从 O 点画两条光线。

(1)平行于光轴的光线 OP，经透镜向外折射，就好像从焦点 F 发出的光线 PD。

(2)经过透镜中心的直线 OC。

II' 为 OO' 的像，为缩小的、直立的虚像。

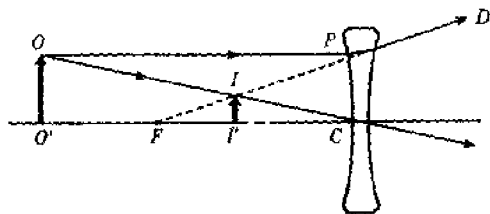


图 38 - 4

(b) $\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$

代入 $s_o=27\text{cm}$，$f=-18\text{cm}$，得

$s_i=-10.8\text{cm}=-11\text{cm}$

由于 s_i 为负值，像为虚像，在透镜前 11cm 处。

线放大率 $=\left|\frac{s_i}{s_o}\right|=\frac{11\text{cm}}{27\text{cm}}=0.40$

像的大小 $=(0.40)(9.0\text{cm})=3.6\text{cm}$

38.4 一个会聚透镜($f=20\text{cm}$)放在屏幕前 37cm 处。若使物体在屏幕上成像，物该放在何处？

解 已知 $s_i=+37\text{cm}$，$f=+20\text{cm}$，

由透镜方程知

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{37\text{cm}}=\frac{1}{20\text{cm}}$$

得 $s_o=43.5\text{cm}=44\text{cm}$

即，物应放在透镜前 44cm 处。

38.5 一会聚透镜将灯泡的像放大 4 倍呈现在距灯泡 10.0m 远的屏幕上。透镜应放在什么位置？焦距为多少？

解 由已知：$s_o+s_i=10.0\text{m}$，$s_i=4s_o$，

可知 $s_o=2.0\text{m}$，$s_i=8.0\text{m}$ 代入

$\frac{1}{f}=\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}$ 得

$f=+1.6\text{m}$

38.6 发光物体到屏幕距离 40.0cm，试问，焦距为 +9.00cm 的会聚透镜应放在哪两个位置上，可在屏幕上得到物体的两个实像？

解 由 $s_o+s_i=40.0\text{cm}$，$f=+9.00\text{cm}$，有

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{40.0\text{cm}-s_o}=\frac{1}{9.0\text{cm}}$$

或 $s_o^2-40.0s_o+360=0$

由二次方程公式有

$$s_o=\frac{40.0\pm\sqrt{1600-1440}}{2}$$

解得 $s_o=13.7\text{cm}$ 和 $s_o=26.3\text{cm}$，即透镜的两次位置分别距物体 13.7cm 和 26.3cm。

38.7 焦距 50cm 的会聚透镜形成 2.5 倍于物体的实像。求物体和像之间的距离。

解 已知线放大率为 2.5，所以 $s_i=2.5s_o$。

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{2.5s_o}=\frac{1}{50\text{cm}}$$

解得 $s_o=70\text{cm}$

$$s_i=(2.5)(70\text{cm})=175\text{cm}$$

物像间距离 $s_o+s_i=70\text{cm}+175\text{cm}=245\text{cm}=2.5\text{m}$

38.8 焦距为 f 的透镜将物体放大了 M 倍的像投到屏幕上。试证明透镜到屏幕的距离为 $f(M+1)$。

解 因像可以投到屏幕上，所以为实像，$s_i>0$。我们有

$$M=\frac{s_i}{s_o}=s_i\left(\frac{1}{s_o}\right)=s_i\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{s_i}\right)=\frac{s_i}{f}-1$$

即 $s_i=f(M+1)$

38.9 玻璃透镜的折射率为 1.54。其凸球面的曲率半径为 20cm，而另一面为凹球面，半径为 40cm。求该透镜的焦距，它是会聚透镜还是发散透镜？

解 首先，由于透镜两表面的曲率中心都在透镜的右侧，我们知道 $r_1>0$，$r_2>0$，

由

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=(1.54-1)\left(\frac{1}{20\text{cm}}-\frac{1}{40\text{cm}}\right)=\frac{0.54}{40\text{cm}}$$

得　$f=+74\text{cm}$

f 为正值，所以透镜为会聚透镜。

38.10 凸透镜的两表面均为凸球面，其半径分别为 18cm 和 20cm。物体距透镜 24cm，在透镜后 32cm 处得到实像。求(a)该透镜的焦距和(b)透镜材质的折射率。

解 (a) $\frac{1}{f}=\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{24\text{cm}}+\frac{1}{32\text{cm}}=\frac{7}{96\text{cm}}$，$f=\frac{96\text{cm}}{7}=+13.7\text{cm}=14\text{cm}$

(b) $\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$，$\frac{1}{13.7}=(n-1)\left(\frac{1}{18\text{cm}}-\frac{1}{-20\text{cm}}\right)$，$n=1.7$

38.11 一玻璃透镜($n=1.50$)在空气中的焦距为 +10cm。试求它在水中的焦距，水的折射率为 1.33。

解 由

$$\frac{1}{f}=\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

对空气：$\frac{1}{10}=(1.50-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

对水：$\frac{1}{f}=\left(\frac{1.50}{1.33}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$

两式相除得　$f=5.0/0.128=39(\text{cm})$

38.12 一凸透镜两表面的曲率半径都是 20.0cm。玻璃的折射率为 1.50。试求(a)它在空气中和(b)在二硫化碳($n=1.63$)中的折射率。

解 ☞ (a)由

$$\frac{1}{f}=\left(\frac{n_1}{n_2}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{f}=(1.50-1)\left(\frac{1}{20\text{cm}}-\frac{1}{-20\text{cm}}\right),\quad f=+20.0\text{cm}$$

(b) $$\frac{1}{f}=\left(\frac{1.50}{1.63}-1\right)\left(\frac{1}{20\text{cm}}-\frac{1}{-20\text{cm}}\right),\quad f=-125\text{cm}$$

这时,焦距为负值,为发散透镜。

38.13 焦距为+9.0cm 和−6.0cm 的两个透镜相接触,求其组合的焦距。

解 ☞ 由 $\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{9.0\text{cm}}-\frac{1}{6.0\text{cm}}=-\frac{1}{18\text{cm}}$

得 $f=-18$cm (为发散透镜) .

38.14 消色差透镜由两个相接触的薄透镜组成,其光焦度分别+10.0m^{-1}和−6.0m^{-1}。求其组合的光焦度以及焦距。

解 ☞ 出焦距倒数相加的关系,得组合透镜光焦度=+10.0−6.0=+4.0(m^{-1})

焦距=1/光焦度=$\frac{1}{+4.0\text{m}^{-1}}$=+25cm

习 题

38.15 用作图法定性说明焦距为 f 的凸透镜成像的位置、性质和大小,当物距为(a)无限远,(b)大于 $2f$,(c)等于 $2f$,(d)在 $2f$ 与 f 之间,(e)等于 f,(f)小于 f。

38.16 求焦距为+100cm 的薄凸透镜对于物距为(a)150cm,(b)75.0cm 的物体成像的性质、位置和线放大率。

(答 (a)倒立实像,透镜后 300cm,2∶1;(b)直立虚像,透镜前 300cm,4∶1)

38.17 若想用焦距为+4.0cm 的透镜得到放大 8 倍的像,试问物应放在何处?

(答 距透镜 4.5cm,得倒立实像,或距透镜 3.5cm,得直立虚像。)

38.18 一透镜能使物距为 9.0cm 的物体成实像,且像的大小为物的三分之一。试求该透镜的性质和焦距。

(答 凸透镜,+2.3cm)

38.19 物体 10cm 高、距凹透镜($f=-7.0$cm)28cm 远。试全面描述其像的性质。

(答 缩小的直立虚像,在透镜前 5.6cm,2.0cm 高。)

38.20 若物体距透镜(a)200cm,(b)非常远,要得到距透镜 10cm 的直立的像,透镜的焦距应为多少?

(答 (a)−11cm;(b)−10cm)

38.21 发光体与屏幕的间距为 12.5m。若想在屏幕上得到放大 24 倍的像,透镜应放在何处?焦距为多少?

(答 距物 0.50cm,+48cm)

38.22 一平凹透镜焦距为−22.2cm,凹球面的曲率半径为 12cm。求透镜材质的折射率。

(答 1.5)

38.23 一凸凹透镜两表面的曲率半径分别为 3.0cm 和 4.0cm。材料折射率为 1.6。试求(a)透镜焦距和(b)当物离透镜 28cm 时,像的放大率。

(答 (a)+20cm;(b)2.5∶1)

38.24 凸透镜两表面的曲率半径都是 8cm,折射率为 1.5。试求它在空气中和水中($n=1.33$)的焦距。

(答 +8cm,+0.3m)

38.25 焦距分别为+12cm 和−30cm 的两个薄透镜接触在一起。求该组合的焦距和光焦度。

(答 +20cm,+5.0m^{-1})

38.26 两个相接触的薄透镜焦距分别为 16cm 和−23cm。还要贴上第三个透镜,使组合透镜的焦距为−12cm。求第三个透镜的焦距。

(答 −9.8cm)

第三十九章 光学仪器

薄透镜组合

要确定两透镜组合的成像位置,需两步走:(1)先计算第一个透镜的成像位置而不考虑第二个透镜;(2)然后把这个像作为第二个透镜的物,再求第二个透镜的成像。这个像就为这透镜组合的像。

若所求出的第一个透镜的成像在第二个透镜的后边,则这个像便是第二个透镜的虚物,它到第二透镜的距离为负值。

眼睛

眼睛是一个焦距可变的透镜,将物体成像在眼睛后部的视网膜上。眼睛能看清楚物体的最近距离(叫作眼睛的近点),用 d_n 来表示,通常为 25cm 左右。远视眼只能看清远处的物体,而近视眼只能看清近处的物体。

放大镜

放大镜是凸透镜,它能使一倍焦距以内的物体成一个放大的直立虚像。若焦距为 f 的放大镜成像在近点处,则其放大率为 $(d_n/f)+1$。若成像在无限远,则放大率为 d_n/f。

显微镜

显微镜由物镜(焦距 f_o)和目镜(焦距 f_e)组成,它们都是凸透镜。其放大率为

$$\left(\frac{d_n}{f_e}+1\right)\left(\frac{q_o}{f_o}-1\right)$$

式中 q_o 是物镜到它所成像的距离(像距),一般 q_o 接近 18cm。

望远镜

望远镜由物镜(透镜或反射镜)和目镜组成,它们的焦距分别为 f_o 和 f_e。望远镜的放大率为 $M=f_o/f_e$。

例 题

39.1 某近视眼的人不能看到 80cm 以外的物体。若戴上眼镜能看清远处的物体,求镜片的光焦度。

解 远处物体的像必须和物在镜片的同侧,像为虚像,$s_i=-80\text{cm}$,且像比物更靠近镜片,因此需要发散透镜,即负透镜。由于物体很远,s_o 很大,$1/s_o$ 可视为零。

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$$

成为

$$0-\frac{1}{80}=\frac{1}{f}$$

得 $f=-80\text{cm}$ (发散透镜)

光焦度 $=1/f=1/(-0.80\text{m})=-1.3\text{m}^{-1}$

39.2 某人远视,看不清 75cm 以内的物体。试求需多大光焦度的透镜就可以看清 25cm 处的符号。

---

* 我国叫明视距离——译注。

解 符号与像必须在镜片的同侧，所以像为虚像，$s_i=-75$cm，且像比符号距透镜较远。因此需用会聚透镜，或正透镜。

由$\frac{1}{f}=\frac{1}{25}-\frac{1}{75}$

得 $f=+37.5$cm

光焦度$=1/f=1/(+0.375\text{m})=2.7\text{m}^{-1}$

39.3 一投影镜($f=30$cm)将 2.0cm×3.0cm 的幻灯片投射到距镜头 10m 远的屏幕上。求像的大小。

解 由

$\frac{1}{s_o}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_i}=\frac{1}{0.30}-\frac{1}{10}=3.23(\text{m}^{-1})$

而线放大率$=\left|\frac{s_i}{s_o}\right|=\frac{10\text{m}}{(1/3.23)\text{m}}=32$

所以像的长宽尺寸为

$$(32\times2.0\text{cm})\times(32\times3.0\text{cm})=64\text{cm}\times96\text{cm}$$

39.4 照相机镜头距底片 8cm 时对远处风景清晰成像。若要对 72cm 处的地图成像，需如何调整镜头位置？

解 当相机对远处物体聚焦时，入射光可视为平行光，镜头到底片的距离即焦距，8cm。对 72cm 处的物体，由

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_o}=\frac{1}{8}-\frac{1}{72}$$

得 $s_i=9$cm

相机镜头应向物的方向移动(9−8)cm=1cm。

39.5 对于不变的照明和同种底片，若相机镜头光圈调至 $f/12$，合适的曝光时间为(1/5)s。若镜头调至 $f/4$，需曝光时间多少？

解 $f/12$ 表示相机镜头的光阑(即光圈)直径为焦距的 1/12。$f/4$ 表示光阑直径为焦距的 1/4。

通过光圈的光照正比于其面积，即直径的平方，光圈 $f/4$ 的直径为 $f/12$ 的 $3^2=9$ 倍，即通过 $f/4$ 光圈的光通量为 $f/12$ 的 9 倍，因而合适的曝光时间应为

(1/9)(1/5)s=1.45s

39.6 一个视力正常的雕刻家使用一个凸透镜($f=8.0$cm)，镜片紧靠眼睛。要使透镜距离他的作品保持多远，透镜的放大率为多少？

解 方法一

当凸透镜用作放大镜时，应使物体距透镜在一倍焦距以内。而在明视距离，25cm 以远处形成物的放大的直立虚像。

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$$

代入 $s_i=-25$cm，$f=8.0$cm

得　$s_o=6.1$cm，即作品距透镜 6.1cm 处。

线放大率$=\left|\frac{s_i}{s_o}\right|=\frac{25\text{cm}}{6.06\text{cm}}=4.1$

方法二

按公式

$$\text{线放大率}=\frac{d_n}{f}+1=\frac{25}{8.0}+1=4.1$$

39.7 两正透镜的焦距分别为+2.0cm 和+5.0cm，且相距 14cm，如图 39-1 所示。物体 AB 在焦距为+2.0cm 的透镜前 3.0cm 处。求透镜组合最终所成像 $A''B''$的位置和放大率。

解 +2.0cm 透镜成像 $A'B'$由下式计算

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_o}=\frac{1}{2.0}-\frac{1}{3.0}=\frac{1}{6.0}$$

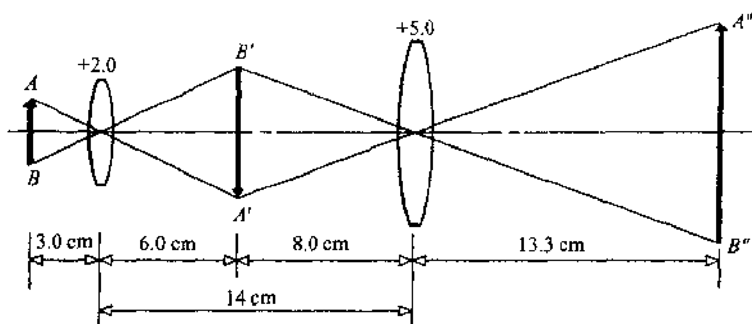


图 39 - 1

得 $s_i=6.0\text{cm}$，即 $A'B'$ 为倒立的实像，在 $+2.0\text{cm}$ 透镜后 6.0cm 处。

而 $A'B'$ 位于 $+5.0\text{cm}$ 透镜前 $(14-6.0)\text{cm}=8.0\text{cm}$ 处，对于该透镜为实物。

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{5.0}-\frac{1}{8.0}$$

得 $$s_i=13.3\text{cm}=13\text{cm}$$

$A''B''$ 为直立的实像，在 $+5.0$ 透镜后 13cm 远处。

$$\text{总线放大率}=\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\times\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}=\frac{6.0}{3.0}\times\frac{13.3}{8.0}=3.3$$

注意，透镜组合的放大率等于各透镜放大率的乘积。

39.8 如图 39 - 2 所示，复合显微镜的物镜和目镜的焦距分别为 $+0.80\text{cm}$ 和 $+2.5\text{cm}$。物镜形成的实像 $A'B'$ 距物镜 16cm。若眼睛紧贴目镜观察，且最终的虚像距眼睛 25cm，求显微镜的线放大率。

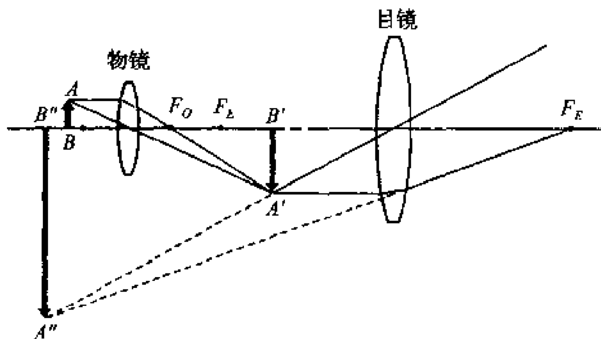


图 39 - 2

解析　方法一

对于物镜，令 s_{oO} 为物距，s_{iO} 为像距，

对于目镜，令 s_{oE} 为物距，s_{iE} 为像距。由

$$\frac{1}{s_{oO}}=\frac{1}{f_O}-\frac{1}{s_{iO}}=\frac{1}{0.80}-\frac{1}{16}=\frac{19}{16}(\text{cm}^{-1})$$

所以物镜的放大率为

$$\left|\frac{s_{iO}}{s_{oO}}\right|=(16\text{cm})\left(\frac{19}{16}\text{cm}^{-1}\right)=19$$

而目镜的放大率为

$$\left|\frac{s_{iE}}{s_{oE}}\right|=\left|s_{iE}\left(\frac{1}{f_E}-\frac{1}{s_{iE}}\right)\right|=\left|\frac{s_{iE}}{f_E}-1\right|=\left|\frac{-25}{+2.5}-1\right|=11$$

所以总放大率为 $11\times19=2.1\times10^2$。

另外，在这种情形下，目镜的放大率可由

$$\frac{25}{f_E}+1=\frac{25}{2.5}+1=11$$

求得。

方法二

按公式

$$放大率=\left(\frac{25}{2.5}+1\right)\left(\frac{16}{0.8}-1\right)=2.1\times10^2$$

39.9 图 39-3 所示的望远镜头由一个焦距为+6.0cm 的凸透镜和一个焦距为-2.5cm 的凹透镜组成，两透镜相距 4.0cm。(a)试求远处物体的像的位置。(b)试比较透镜组合形成的像与单由凸透镜形成的像的大小。

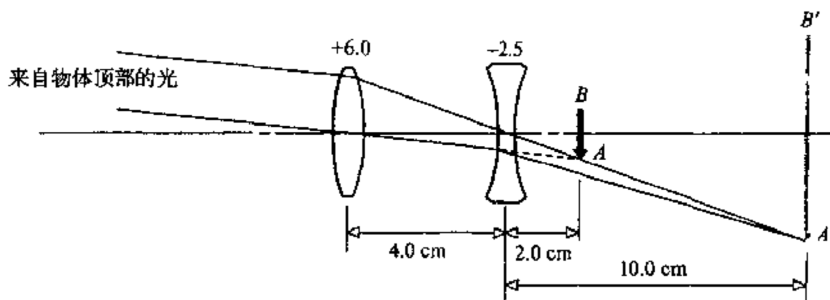


图 39-3

解 (a)若不看凹透镜，凸透镜对远处物体成像 AB 在它的焦平面处，即距凸透镜 6.0cm。而凹透镜减小了凸透镜对折射光线的会聚程度，使它们聚焦到 $A'B'$ 处，而不是 AB 处。

只由凸透镜形成的像 AB 在凹透镜后 2.0cm，对于焦距为-2.5cm 的凹透镜来说是虚物。即 $s_o=-2.0\text{cm}$，而

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_o}=-\frac{1}{2.5\text{cm}}+\frac{1}{2.0\text{cm}}=\frac{1}{10\text{cm}}$$

得 $s_i=+10\text{cm}$

最终成像 $A'B'$ 在凹透镜后 10cm 处。

(b)凹透镜的放大率为

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\left|\frac{s_i}{s_o}\right|=\frac{10\text{cm}}{2.0\text{cm}}=5.0$$

凹透镜的放大率为 5.0，即透镜组合比单个凸透镜成像又放大了 5.0 倍。

39.10 一台显微镜有两个物镜(3.0mm 和 7.0mm)和两个目镜(3.0cm 和 5.0cm)可供选择。若物镜和目镜间距 17cm。利用不同的透镜组合，这台显微镜能有几种不同的放大率?

解 显微镜物镜的像非常靠近目镜，即其像距 $s_{iO}=17\text{cm}$。对于 $d_n=25\text{cm}$，显微镜放大率公式给出以下 4 种 M 值：

对于 $f_E=3\text{cm}, f_O=0.3\text{cm}$：　$M=(9.33)(56.6)=528=5.3\times10^2$

对于 $f_E=3\text{cm}, f_O=0.7\text{cm}$：　$M=(9.33)(24.2)=226=2.3\times10^2$

对于 $f_E=5\text{cm}, f_O=0.3\text{cm}$：　$M=(5)(56.6)=283=2.8\times10^2$

对于 $f_E=5\text{cm}, f_O=0.7\text{cm}$：　$M=(5)(24.2)=121=1.2\times10^2$

39.11 一台望远镜对平行光聚调，已知物镜和目镜的焦距分别为+60cm 和+3.0cm。求其放大率。

解 $放大率=\dfrac{物镜焦距}{目镜焦距}=\dfrac{60\text{cm}}{3.0\text{cm}}=20$

39.12 反射型望远镜使用一个凹面反射镜取代透镜式的物镜，使远处物体会聚到其焦点处。若反射镜面曲率半径为 250cm，目镜焦距为 5.0cm。求这台望远镜的放大率。

解 和折射型(即两个透镜型)的望远镜一样，反射型望远镜也有 $M=f_o/f_E$。这时 $f_o=R/2=125\text{cm}$。所以

$$M=\frac{125\text{cm}}{5.0\text{cm}}=25$$

39.13 如图 39－4 所示，物体放在凸透镜（$f=+8.0$cm）前 40cm 处。透镜后 30cm 处放置一平面反射镜。求这一系统所有像的位置。

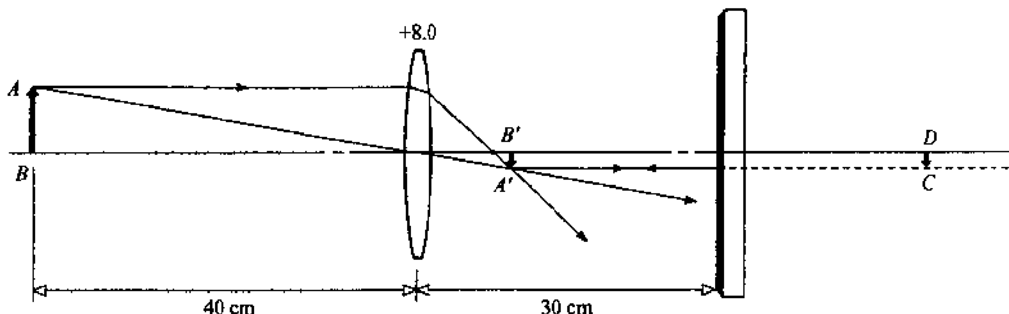


图 39－4

解 对于透镜有

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_o}=\frac{1}{8.0}-\frac{1}{40}=\frac{4}{40}$$

得 $s_i=10$cm

这个像即为图中的 $A'B'$，它是倒立的实像。$A'B'$ 对于平面镜而言是距离 20cm 的物体，所以在镜后 20cm 处得到一个虚像 CD。

平面镜反射的光好像来自 CD。CD 作为透镜的物，在透镜的左侧成像。这个像到透镜的距离 s_i 由下式得出

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_o}=\frac{1}{8}-\frac{1}{50}=0.105$$

$$s_i=9.5\text{cm}$$

系统共得到三个象：在透镜右侧 10cm 处和左侧 9.5cm 处得到实像，后者为直立的。还有一个倒立的虚像在平面镜后 20cm 处。

习　题

39.14 某人远视，看不清 60.0cm 以内的物体。若为她配戴眼镜，使她能看清 25.0cm 远的文字，需配多少焦距和光焦度的镜片？

（答　+42.9cm，+2.33D）

39.15 某人近视，看不清超过 50cm 远的物体，要能看清远处物体，他需配多少焦距和光焦度的眼镜？

（答　−50cm，−2.0D）

39.16 用透镜将 3.0cm×4.0cm 的幻灯片投影到屏幕上，欲得到 2.4m×3.2m 的像，透镜焦距应为多少？已知幻灯片到透镜距离为 25cm。

（答　31cm）

39.17 一照相机，当镜头距底片 20cm 时，拍摄的花朵像与实物一般大小。试问要拍摄高处飞翔的鸟群，镜头与底片的距离应为多少？

（答　10cm）

39.18 一个标称焦距为＋10cm、镜头直径为 2.0cm 的相机，其最大光圈数为多少？若对于 $f/6$ 的合适曝光时间为(1/90)s，当光圈调到 $f/9$ 时，曝光时间多长才合适？

（答　$f/5$，(1/40)s）

39.19 焦距为＋2.0cm 的透镜贴近眼睛，当作放大镜（即简易显微镜）。若需在明视距离 25cm 处成虚像，求该透镜的放大率。

（答　14）

39.20 一透镜将 5.0cm 处的物体成实像，像距离透镜 20cm 远。若将该透镜用作放大镜，成像在明视距离

25cm，它能放大多少倍？

（答　7.3）

39.21　显微镜的物镜和目镜焦距分别为＋0.50cm 和＋2.0cm。仪器对距物镜 0.52cm 的物体聚焦，若在明视距离 25cm 得一虚像。求仪器放大倍率。

（答　3.4×10^2）

39.22　将一台折射型天文望远镜调节好，使观测者眼睛不太疲劳，这时放大倍率为 150 倍。若其目镜焦距为＋1.20cm。(a)求其物镜焦距。(b)要将远处物体在距目镜 12.0cm 处的屏幕上成实像，两透镜应距离多远？

（答　(a)＋180cm；(b)181cm）

39.23　装置在帕罗莫山上的大型望远镜的物镜为直径 5.0m、曲率半径为 46m 的凹球面反射镜。若配用焦距为 1.25cm 的目镜，求仪器的放大倍率。

（答　1.8×10^3）

39.24　一台天文望远镜的物镜焦距为＋80cm。仪器对月球聚焦。若改对距物镜 40m 远处的物体聚焦，其目镜应移动多少距离？

（答　1.6cm）

39.25　一透镜组合由焦距分别为＋4.0cm 和＋8.0cm 的透镜组成，两透镜间距 16cm。一物体位于＋4.0cm 透镜前 12cm 处。求系统成像的位置和性质。

（答　位于＋8.0cm 透镜后 40cm 处，直立实像）

39.26　两透镜相距 1.5cm，焦距分别为＋6.0cm 和－10cm。物体位于＋6.0cm 透镜前 30cm 处。求系统成像的位置和性质。

（答　位于负透镜后 15cm 处，为倒立的实像，为物大小的 5/8）

39.27　一望远镜头由焦距为＋3.5cm 的正透镜和焦距为－1.8cm 的负透镜组成，两镜相距 2.0cm，正透镜在前。(a)求系统对远处物体成像的位置。(b)若换用一个单透镜，它对远处物体的成像与用上述望远镜头的成像一般大小，试求这单透镜的焦距。

（答　(a)在负透镜后 9.0cm 处得实像；(b)＋21cm）

39.28　一剧场用望远镜由焦距为＋3.60cm 的物镜和焦距为－1.20cm 的目镜组成。若用它将远处物体成像在眼睛前方 25.0cm 处，这两透镜间距应为多少？

（答　2.34cm）

39.29　在 39.13 题中，若平面镜与透镜相距 8.0cm，情况又如何？

（答　透镜右侧 6.0cm 处得一实像，右侧 24cm 处得一虚像）

39.30　若 39.13 题中的平面镜用一曲率半径为 20cm 的凹面反射镜代替，情况如何？

（答　透镜右侧 10cm 处有一倒立实像又有一直立实像，在透镜左侧 40cm 处(即物所在的位置)形成一倒立实像）

第四十章　光的干涉和衍射

相干波

频率相同且相位差恒定(即一个波的波峰相对于另一个波的波峰所超前或落后的量不随时间改变)的同种形式的波动叫相干波。

沿同一波线一起传播的两个相干波之间的相对相位决定了它们在这波线上的相对位置。如果两个波的波峰相重合,它们是同位相的;若一个波的波峰落在另一个波的波谷处,它们相差 180°,或相差半个波长,它们是相位相反的。

干涉效应

当两个或多个相干波相遇时会产生干涉效应。如果两个相干波的振幅相等,但相位相反就发生全相消干涉(抵消、变暗);而相位相同时,就发生全相长干涉(增强、变亮)。

衍射

衍射指光偏离直线传播的现象,通常指光在障碍物边缘或通光孔径的边缘所产生的弯曲和扩展。用光学手段观测物体的细节由于衍射效应而受到一定的限制。

单缝衍射

当波长为 λ 的平行光垂直入射宽度为 D 的单缝时,在缝后便出现衍射图形。在对于直接透射光束成 $\theta_{m'}$ 的角度上光强完全消失:

$$m'\lambda = D\sin\theta_{m'}$$

式中 $m'=1,2,3,\cdots$为衍射暗区的级数。

分辨率极限

如果用一台光学仪器观察两个物体,由通光孔径造成的衍射图形限制了人们分辨两个物体的能力。这两个物体对于孔径所张的角度必须大于一个临界值 θ_{cr}才能够被分辨出来:

$$\sin\theta_{cr} = (1.22)\frac{\lambda}{D}$$

式中 D 为圆形孔径的直径。

衍射光栅方程

孔径或障碍物可以改变光的振幅和位相。而一系列重复排列的孔径或障碍就组成了光栅。通常,光栅由大量等间距的平行狭缝或条棱组成,狭缝的间距称为光栅常数 a。当波长为 λ 的波垂直照明缝间距为 a 的光栅时,在光栅后面与光栅法向成 θ_m 角的方向可观察到极大值,其关系式为

$$m\lambda = a\sin\theta_m$$

式中 $m=1,2,3,\cdots$为衍射像的级数。

这关系也适应于由两条缝或三条缝所产生的干涉效应的主极大位置。然而,这时的极大并没有由数百条狭缝组成的光栅所产生的极大那么明锐。如果光栅狭缝宽度较大,每条狭缝的单缝衍射花样中又包括若干极小,光栅衍射图样就非常复杂了。

X 射线的衍射

晶体对波长为 λ 的 X 射线的反射遵从布拉格方程。在一系列闪耀角 ϕ_m上有强反射(ϕ_m 为

晶面与反射束之间的夹角)，其关系由布拉格方程描述：

$$m\lambda = 2d\sin\phi_m$$

式中 d 为晶体中反射面之间的距离，$m=1,2,3,\cdots$为反射级数。

光程

光在折射率为 n 的物质中传播距离 d 所花的时间与光在空气或真空中传播 nd 所花的时间相等。所以定义 nd 为光在这种物质中的光程。

例　题

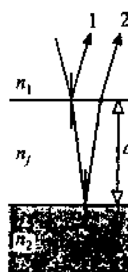


图 40－1

40.1 图 40－1 描述在折射率为 n_1 和 n_2 的物质之间有一层折射率为 n_f 的透明薄膜，且 $n_1<n_f<n_2$。膜厚用 d 来表示。光在膜内的波长为 600nm。若反射光线 1 和 2 能完全(a)相长或(b)相消干涉，求膜的三种最小厚度。

解 (a)光线 2 比光线 1 大约多走 $2d$ 的距离。如果这距离为 $0,\lambda,2\lambda,\cdots,m\lambda$，其中 m 为整数，则两光线相互增强，即

$$m\lambda = 2d \quad 或 \quad d=\left(\frac{1}{2}m\right)(600\text{nm})=300m\ \text{nm}$$

所以 d 的三个最小值分别为 0，300nm 和 600nm。

(b)两反射光波若位相差为 180°，则它们相消干涉，即 $2d$ 为 $\frac{1}{2}\lambda$，$\left(\lambda+\frac{\lambda}{2}\right)$，$\left(2\lambda+\frac{\lambda}{2}\right)$，…，$\left(m\lambda+\frac{\lambda}{2}\right)$，$m$ 为整数。所以有

$$2d=m\lambda+\frac{1}{2}\lambda \quad 或 \quad d=\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda=\left(m+\frac{1}{2}\right)(300)\text{nm}$$

发生完全相消干涉的 d 值的三个最小值为 150nm、450nm 和 750nm*。

40.2 如图 40－2 所示，波长为 500nm 的光照到两条平行的水平狭缝(间距 $a=0.60$mm)。在某些角度 θ，衍射光加强，面在另一些角度，则相抵消。分别求出产生光(a)加强和(b)抵消的 θ 的三个最小值(见图 40－3)。

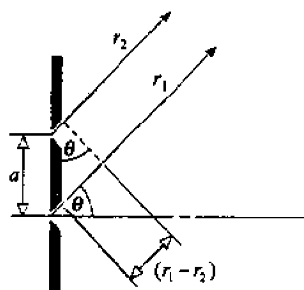


图 40－2

解 两束光的光程差为(r_1-r_2)，由图可知

$$\sin\theta=\frac{r_1-r_2}{a}$$

(a)对于增强效应，有$(r_1-r_2)=0,\lambda,2\lambda,\cdots$，相应三个最小的 θ 值由下列三式得出：

$\sin\theta_0=0$，　$\theta_0=0$

$\sin\theta_1=\dfrac{500\times10^{-9}\text{m}}{6\times10^{-4}\text{m}}=8.33\times10^{-4}$，　$\theta_1=0.048°$

$\sin\theta_2=\dfrac{2(500\times10^{-9}\text{m})}{6\times10^{-4}\text{m}}=16.7\times10^{-4}$，　$\theta_2=0.095°$

(b)对于相消效应，有$(r_1-r_2)=\frac{\lambda}{2},\lambda+\frac{\lambda}{2},2\lambda+\frac{\lambda}{2},\cdots$。相应的三个最小的 θ 值为

$\sin\theta_1=\dfrac{250\text{nm}}{600\ 000\text{nm}}=4.17\times10^{-4}$，　$\theta_1=0.024°$

$\sin\theta_2=\dfrac{750\text{nm}}{600\ 000\text{nm}}=0.00125$，　$\theta_2=0.072°$

---

* 当光线垂直入射时，其发生在两个界面的反射光线 1 和 2 之间的光程差为：$n_f d$。所以产生完全相长干涉的条件为 $m\lambda=2n_f d$，产生完全相消干涉的条件为 $m\lambda+\frac{\lambda}{2}=2n_f d$。题解未加说明 n_f 的值，显然是一种疏忽。题解中给出的膜厚只适用于 $n_f=1$ 的情况——译注。

$\sin\theta_3=\frac{1250\text{nm}}{600\ 000\text{nm}}=0.00208$，$\theta_3=0.12°$

40.3 如图40-3所示，单色点光源照到两条水平的平行狭缝，缝间距 $a=0.80\text{mm}$。在距狭缝50cm的屏幕上形成干涉图样。由图可知，亮纹和暗纹是等间距排列的，$y=0.304\text{mm}$。求光的波长。

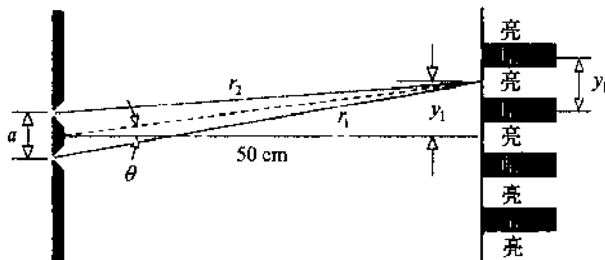


图40-3

解 首先要说明，图40-3不是按比例画的。从两狭缝射出的光实际上是近乎平行的。因此可应用上题的结论，亮纹(极大)的条件为 $(r_1-r_2)=m\lambda$，m 为整数。而

$$\sin\theta=\frac{(r_1-r_2)}{a}$$

变成为 $m\lambda=a\sin\theta_m$。

或者，我们也可应用光栅方程，因为双缝装置就是一个只有两条缝的光栅。两种想法都得到同一结果：$m\lambda=a\sin\theta_m$。

由已知，干涉图的中央极大到两侧第一级极大的距离均为0.304mm。由图有

$$\sin\theta_1=\frac{0.0304\text{cm}}{50\text{cm}}=0.000608$$

对于 $m=1$

$m\lambda=a\sin\theta_m$　成为 $(1)\lambda=(0.80\times10^{-3}\text{m})(6.08\times10^{-4})$ 解得 $\lambda=486\text{nm}$，或精确到两位有效数字，$a=0.49\times10^3\text{nm}$。

40.4 在40.1题中，若 $n_1<n_f>n_2$ 或 $n_1>n_f<n_2$，情况如何？

解 实验表明，对于这种情况，当膜厚 d 趋于零时发生相消干涉。这是由于光受到反射时，常常伴有位相突变的原因。一般说来，这个过程是很复杂的。但若入射角小于30°左右，内反射光与外反射光之间有180°的净位相差存在，这是相当肯定的。这时，膜厚比起 λ 要小得多，$d\approx0$，光线1和光线2之间表现出 $\frac{1}{2}\lambda$ 的光程差，因而发生相抵消的情况。而对于40.1题，两束光都属外反射，并不表现出这一光程差。

如上述，$d=0$ 时发生相消干涉；当 $d=\frac{1}{2}\lambda$，$d=\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\lambda$ 时，即当 $d=0$，300nm和600nm，均发生反射光相抵消的情况。

当 $d=\frac{1}{4}\lambda$ 时，光线2在膜中传播好像附加了 $\frac{1}{2}\lambda+(2)\left(\frac{1}{4}\lambda\right)=\lambda$ 一样，所以与光线1发生相长干涉的增强效应。当 d 增加 $\frac{1}{2}\lambda$ 和 λ 时，又出现这种情况，即当 $d=150\text{nm}$、450nm和750nm时，出现两束反射光的干涉增强效应。

40.5 缓慢增加迈克耳孙干涉仪一臂的长度，视场中扫过150条暗纹。若光的波长 $\lambda=480\text{nm}$，这一臂的反射镜移动了多少距离？

* 两种折射率不同的物质，折射率较低的叫光疏物质，折射率较高的叫光密物质。若光从光疏到光密物质，在两物质界面的反射叫外反射。这时反射光会发生相位突变，若入射角小于30°左右，相位突变为180°，即程差跃变半个波长。因此这种现象也叫作"半波损失"。而光从光密物质到光疏物质，在界面的反射叫内反射，这时反射光就没有这种相位突变——译注。

解 当干涉仪两臂的光相差 180°时，观察到暗纹。一个臂的长度增加$\frac{1}{2}\lambda$，光程就增加 λ，视场中就由暗到亮再到暗。当视场中变化 150 条暗纹时，臂长的改变量为

$$(150)\left(\frac{1}{2}\lambda\right)=(150)(240\text{nm})=36000\text{nm}=0.0360\text{mm}。$$

40.6 如图 40-4 所示，两片平玻璃，一端接触，另一端用垫片分开。用 $\lambda=589.0$nm 的光垂直照明且垂直观察，从玻璃板的这一端到另一端共有 5 条暗纹(D)。求垫片的厚度。

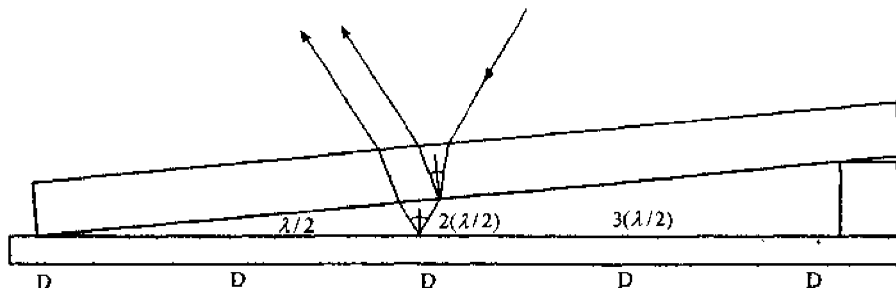


图 40-4

解 两块成楔状的玻璃板之间形成了空气尖劈。空气尖劈上下表面反射光的干涉产生了条纹。但上表面是光密物质(玻璃)到光疏物质(空气)，而下表面则相反，因此两反射光性质不同，有 180°的相位差。所以左端呈现暗条纹。

从一个暗条纹到另一个暗条纹，上下表面反射光的程差将改变一个波长 λ。由于光束两次通过尖劈(向下再向上)，所以尖劈厚度仅改变了$\frac{1}{2}\lambda$。所以垫片厚度为

$$4\left(\frac{1}{2}\lambda\right)=1178\text{nm}。$$

40.7 在称为牛顿环的实验中，将一平凸透镜放在一平面玻璃之上，如图 40-5 所示(曲率被夸大了)。光从正上方照明这个装置。人在上方观察到以接触点为中心的一系列同心圆环，在接触点处为暗斑。若光波长为 500nm。求在下面两处空气隙的厚度：(a)第三条暗环处和(b)等二条亮环处。

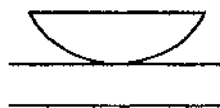


图 40-5

解 (a)在中心暗区，空气隙厚度为零。从一个暗区到另一个暗区，空气隙厚度增加$\frac{1}{2}\lambda$(为什么?)。因此在第三个暗环处，空气隙厚度$=3\left(\frac{1}{2}\lambda\right)=3(250\text{nm})=750\text{nm}$。

(b)在第一条亮环处，空气隙厚度必须足以使上下表面反射光的程差增加$\frac{1}{2}\lambda$。由于下表面反射光两次穿过空气隙，其厚度仅为$\frac{1}{4}\lambda$。所以在第二条亮环处，空气隙厚度为$=\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{2}\lambda=375\text{nm}$

40.8 用钠光($\lambda=589.3$nm)照明肥皂泡，在垂直于肥皂泡膜的方向观察到暗色。求膜的最小厚度。已知肥皂溶液的折射率为 1.38。

解 示意图如图 40-6。光线 b 具有附加的等效光程 $2nd=2.76d$。此外，如 40.4 和 40.6 题的情况，两光束 a 和 b 之间具有 180°的相位突变。

若 a 和 b 之间的程差为$\frac{1}{2}\lambda$、$\frac{3}{2}\lambda$ 或$\frac{5}{2}\lambda$，会发生相消干涉而变暗。这时

$$2.76d+\frac{1}{2}\lambda=m\left(\frac{1}{2}\lambda\right),$$

$m=1,3,5,\cdots$

对于 $m=1$，$d=0$. 对于 $m=3$，

$$d=\frac{\lambda}{2.76}=\frac{589.3\text{nm}}{2.76}=214\text{nm}$$

即肥皂泡最小厚度除了零以外为 214nm。

40.9 波长为 600nm 的平行光照明单缝（缝宽 $D=0.10\text{mm}$），在 40cm 远处的屏幕上得到衍射图。求第三个暗区到中心亮区的距离（见图 40－7）。

解 单缝衍射的暗区位置由

$$m'\lambda = D\sin\theta_{m'}$$

给出。所以

$$\sin\theta_3=\frac{3\lambda}{D}=\frac{3(6.00\times10^{-7}\text{m})}{0.10\times10^{-3}\text{m}}=0.018$$

得 $\theta_3=1.0°$

由图知，$\tan\theta=y/40\text{cm}$。所以

$$y=(40\text{cm})(\tan1.0°)=0.72\text{cm}$$

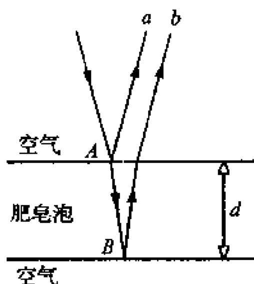


图 40－6

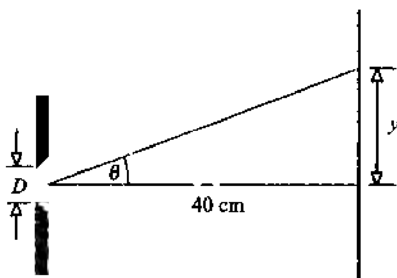


图 40－7

40.10 红光垂直照明衍射光栅，已知光栅为 4000 线/cm。其第二级衍射光偏离光栅法向 34.0°。求光的波长。

解 由光栅方程　$m\lambda=a\sin\theta$，有

$$\lambda=\frac{a\sin\theta_2}{2}=\frac{\left(\frac{1}{4000}\text{cm}\right)(0.559)}{2}=6.99\times10^{-5}\text{cm}=699\text{nm}$$

40.11 图 40－8 为一光栅实验装置。5000 线/cm 的衍射光栅距狭缝 1.00m。且光栅刻线与狭缝平行。用钠光照明狭缝。狭缝两侧有标尺。眼睛贴近光栅看到标尺处呈现狭缝的虚像。若两个第一级虚像距狭缝都为 31.0cm。求光源的波长。

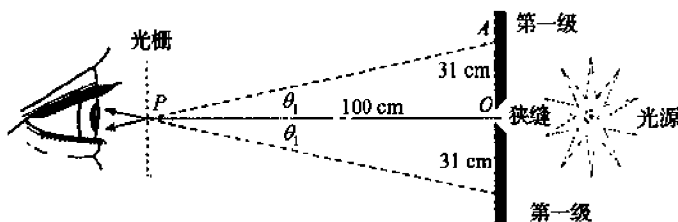


图 40－8

解

$$\tan\theta_1=31.0/100$$

得 $\theta_1=17.2°$

$$\lambda=\frac{a\sin\theta_1}{1}=\frac{(0.000200\text{cm})(0.296)}{1}=592\text{nm}$$

40.12 波长为 540nm 的绿光受到 2000 线/cm 的光栅衍射。(a)试求第三级衍射的偏角。(b)有可能出现第十级衍射吗？

解 (a)

$$\sin\theta_3=\frac{3\lambda}{a}=\frac{3(5.40\times10^{-5}\text{cm})}{5.00\times10^{-4}\text{cm}}=0.324$$

得 $\theta_3=18.9°$

(b)

$$\sin\theta_{10}=\frac{10\lambda}{a}=\frac{10(5.40\times10^{-5}\text{cm})}{5.00\times10^{-4}\text{cm}}=1.08$$

由于角度的正弦不可能大于1，所以不存在第十级衍射光。

40.13 试证明，在白光的光栅衍射谱中，红色($\lambda_r=700\text{nm}$)的第二级衍射光与紫色($\lambda_v=400\text{nm}$)的第三级衍射光发生重叠。

解 对于红光 $\sin\theta_2=\frac{2\lambda_r}{a}=\frac{2(700)}{a}=\frac{1400}{a}$

对于紫光 $\sin\theta_3=\frac{3\lambda_v}{a}=\frac{3(400)}{a}=\frac{1200}{a}$

由于 $\theta_2>\theta_3$，红光的第二级衍射角大于紫光的第三级衍射光，即发生衍射光的重叠情况。

40.14 一束平行的X射线受到食盐晶体的衍射。当掠射角(光束与晶面之间的夹角)为6°50′时，出现第一级强反射。已知晶体反射面的间距为2.8Å。求X射线的波长。(1Å(埃)=0.1nm)

解 注意，布拉格方程中所用到的是掠射角，而非入射角，

$$\lambda=\frac{2d\sin\phi_1}{1}=\frac{(2)(2.8\text{Å})(0.119)}{1}=0.67\text{Å}$$

40.15 两个点光源相距50cm。人在 L 远处观察它们，如图40－9所示。瞳孔的直径为3.0mm，且假设人眼是理想透镜，只有衍射效应影响对两点光源的分辨率。若能分辨出两光源，L 应多远？

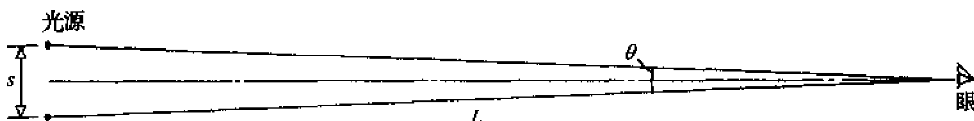


图40－9

解 在极限情况下 $\theta=\theta_c$，而 $\sin\theta_c=(1.22)(\lambda/D)$，由图知 $s\ll L$，$\sin\theta\approx s/L$。所以

$$L\approx\frac{sD}{1.22\lambda}\approx\frac{(0.50\text{ m})(3.0\times10^{-3}\text{m})}{(1.22)(5.0\times10^{-7}\text{m})}=2.5\text{km}$$

这里我们取光波长 $\lambda=500\text{nm}$，大约为可见光波段的中间波长。

习 题

40.16 两个相同波源沿 $+x$ 方向发射波长为20cm的声波。若面朝声源的人听到(a)最强的声音或(b)最弱的声音，两波源应相距多少？

(答 (a)m(20cm)，$m=0,1,2,\cdots$；(b)10cm+m(20cm))

40.17 在40.1题中的装置中，当膜厚为 2.90×10^{-7}m、5.80×10^{-7}m 和 8.70×10^{-7}m 时，观察到最亮情形。(a)光的波长是多少？(b)膜厚为多少时能观察到最暗情形？

(答 (a)580nm；(b)145(1+2m)nm)

40.18 双缝实验中光波长为480nm，缝间距为0.050cm。求(a)第三级亮纹和(b)第二级暗纹相对于透射光束所张的角度。

(答 (a)0.17°；(b)0.083°)

40.19 在上题中，若狭缝到屏幕距离200cm，上述两处距中央主极大的距离为多少？

(答 (a)0.58cm；(b)0.29cm)

40.20 波长为644nm的红光点光源照明两条平行狭缝，缝间距1.00mm，在1.00m以远的屏幕上形成干涉条纹。求中央亮纹到第三级暗纹的距离。

(答 1.61mm)

40.21 两片平玻璃，一边接触，另一边夹一片锡箔，用黄光(589nm)垂直照明这个空气尖劈并观察两表面垂

直反射的光的干涉,发现共有 42 条暗条纹。求锡箔的厚度。

（答　12.4μm）

40.22 波长为 580nm 的黄光和波长为 450nm 的蓝光共同垂直照明 290nm 厚的空气膜。求反射光的颜色。

（答　蓝色）

40.23 在 40.1 题中若膜的折射率为 1.40,入射光的真空波长为 600nm,情况如何?

（答　(a)0,214nm,429nm;(b)107nm,321nm,536nm）

40.24 在 40.6 题中的空气尖劈中注满折射率为 1.50 的液体,情况如何?

（答　785nm）

40.25 宽度为 0.140mm 的狭缝被单色光照明,在 2.00m 远的屏上得到衍射图样。若其第二个暗纹距中央亮纹 16.0mm,求光的波长。

（答　560nm）

40.26 波长为 500nm 的绿光垂直照明光栅,其第二级衍射光与光栅法向夹角为 32.0°。求光栅每厘米有多少条线。

（答　5.30×10^3/cm）

40.27 一窄束波长为 600nm 的黄光垂直照明一光栅,在 1.00m 远处的屏上得到衍射条纹。已知光栅 2000 线/cm。求屏上中心亮纹到第一级亮纹之间的距离。

（答　12.1cm）

40.28 波长为 4.7×10^{-7}m 的蓝光被 2000/cm 的光栅衍射。(a)求第二级光的偏角。(b)用这个光栅和这种光波,理论上能产生的最高衍射级次是多少?

（答　(a)28°;(b)4 级）

40.29 同一光栅对某波长的第二级衍射光与对另一波长的第三级衍射光重合。求这两波长的比率。

（答　3∶2）

40.30 用 2500 线/cm 的光栅得到白光的衍射谱。求紫光($\lambda_v=400$nm)和红光($\lambda_r=700$nm)之间的角距离:(a)都是第一级衍射和(b)都是第二级衍射。(c)第三级黄光与第四级紫光发生重叠吗?

（答　(a)4°20′;(b)8°57′;(c)重叠）

40.31 一衍射光栅得到太阳辐射在红外波段的谱。若红外光的第一级衍射光与法向成 25.0°,而氢光谱中 656.3nm 光的第四级衍射与法向成 30.0°。求所考察的红外光波长。

（答　2.22×10^{-6}m）

40.32 NaCl 晶体对波长为 1.54Å 的 X 射线的第一级衍射光的掠射角为 15°54′。求衍射晶面的间距。

（答　2.81Å）

第四十一章 相 对 论

参考系

参考系是一个坐标系，物理测量都是相对于参考系进行的。以常速度运动(即不作加速运动)的参考系叫惯性参考系。

狭义相对论

阿尔伯特·爱因斯坦于1905年提出的狭义相对论是有关以常速度运动的物体的。该理论建立在如下两个公设的基础上：

(1)物理学定律在所有的惯性参考系内都是相同的。因此，一切运动都是相对的，一个物体的运动速度只能是相对于其他物体而得出。

(2)在自由空间中光的速率 c 对所有的观察者都相等，而与光源或观测者是否运动无关。

从这两个公设得到下述结论。

相对论线动量

质量为 m、速率为 v 的物体的相对论线动量为

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2)}} = \gamma mv$$

式中 $\gamma=1/\sqrt{1-(v/c^2)}$ 且 $\gamma>1$。有些物理学家喜欢将 γ 与质量联系起来，而引入相对论质量 m_R，$m_R=\gamma m$。这样，可将动量写成 $p=m_R v$，而 m_R 为与速率有关的量。以下我们只应用与速率无关的质量 m(译注：称静止质量)。质量与电荷与自旋一样，是反映物质粒子基本性质的物理量。

速率极限

当 $v=c$ 时，物体的动量为无穷大。因此，我们认为物体的速率不可能加速到光速 c。c 为速率的上限。

相对论能量

质量为 m 的物体的总能量为

$$E = \gamma mc^2$$

所谓总能量＝动能＋静止能量，即

$$E = \mathrm{KE} + E_0$$

当物体静止时，$\gamma=1$，KE＝0，静止能量(E_0)为

$$E_0 = mc^2$$

静止能量包括该物体中所有形式的内能。

质量为 m 的物体的动能 KE 为

$$\mathrm{KE} = \gamma mc^2 - mc^2$$

若物体运动速率不大，上式即归结为常见的动能表达式

$$\mathrm{KE} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (v \ll c)$$

考虑到 $p=\gamma mv$，物体总能量可以写成

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$$

时间膨胀

时间是相对的，对于彼此作相对运动的观察者而言，时间的“流速”是不同的。假设飞船与一行星的相对速率为 v，在飞船上和行星上各有一只相同的钟。宇航员看到固定在飞船上的钟走过时间间隔为 Δt_s。地面上的观察者与飞船上的钟有相对运动。他用地面上的钟测量那段时间，得到 Δt_M，然而 $\Delta t_M \neq \Delta t_s$。他看到飞船上时钟走得比较慢：

$$\Delta t_M = \gamma \Delta t_s$$

同样，宇航员看地面上的时钟也走得比较慢。

在事件发生地，由静止的观察者所记录下来某事件延续的时间叫原时。一切相对事件发生地作运动的观察者所记录的时间都要长一些。所以原时为事件延续时间的最短测量值。

同时性

如果对于某观察者而言，两个事件同时发生在不同的地点，这两个事件对于这个观察者是同时的。然而，对于相对第一个观察者作相对运动的别的观察者来说，一般而言，这两个事件就不再是同时的了。

长度缩短

假设某物体静止时测得其长度的 x 分量为 L_S（L_S 叫作原长）。然后，该物体沿 x 方向相对于观察者运动，运动速率为 v。这时观察者将看到物体的 x 方向缩短了（但 y 方向和 z 方向不缩短）。观察者所测量的该运动物体的长度（L_M）为

$$L_M = L_S\sqrt{1-(v/c)^2}$$

显然 $L_M > L_S$。

速度叠加公式

在图 41-1 中，坐标系 S' 相对于坐标系 S 作速率为 $v_{O'O}$ 的运动。现在考察物体 P 沿 x 方向相对于 O' 点的运动，速率为 $v_{PO'}$。这个物体相对于 O 点的速率并不是 $v_{PO'} + v_{O'O}$ 的经典值，而是

$$v_{PO} = \frac{v_{PO'} + v_{O'O}}{1+\frac{v_{PO'}v_{O'O}}{c^2}}$$

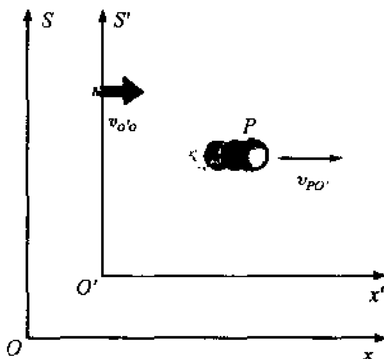


图 41-1

注意，既使 $v_{PO'} = v_{O'O} = c$，仍然有 $v_{PO} = c$。

例 题

41.1 物体运动多快才能使其相应的 γ 值比物体静止时的 γ 值大 1.0%？结论写成两位有效数字。

解 由定义式

$\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$，当 $v=0$ 时，$\gamma=1$。

按题意，要求 $\gamma=(1.01)(1.0)$，所以

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{1.01}\right)^2 = 0.980$$

解得 $v=0.14c=4.2\times10^7$ m/s。

41.2 试求以光速一半运动的粒子的 γ 值，要求三位有效数字。

解 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.500)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.750}} = \frac{1}{0.866} = 1.15$

41.3 若 1.00g 物质释放出全部能量，按每千瓦小时 10.0 美分的价格，这些能量值多少美元？

解 $\Delta E_0=(\Delta m)c^2=(1.00\times10^{-3}\text{kg})(2.998\times10^8\text{m/s})^2$

$=8.99\times10^{13}\text{J}$

价值$=(8.99\times10^{13}\text{J})\left(\frac{1\text{kW}\cdot\text{h}}{3.600\times10^6\text{J}}\right)\left(\frac{\$0.10}{\text{kW}\cdot\text{h}}\right)=\$2.50\times10^6$

即1.00g物质若释放出全部能量,则值250万美元。

41.4 2.0kg物体从地板上升高30cm,试求由于地球和这物体组成的系统的势能PE_G的增加,物体质量增加了多少?

解 由$\Delta E_0=(\Delta m)c^2$,这里$\Delta E_0=mgh$,所以

$$\Delta m=\frac{\Delta E_0}{c^2}=\frac{mgh}{c^2}=\frac{(2.0\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)(0.30\text{m})}{(2.998\times10^8\text{m/s})^2}=6.5\times10^{-17}\text{kg}$$

41.5 一电子受1.5MV电势差加速,从静止开始获得1.5MeV的能量。求其末速率。

解 由 $KE=\gamma mc^2-mc^2$ 和 $KE=\Delta PE_E$,有

$$KE=(1.5\times10^6\text{eV})(1.6\times10^{-19}\text{J/eV})=2.4\times10^{-13}\text{J}$$

所以 $(\gamma m-m)=\frac{KE}{c^2}=\frac{2.4\times10^{-13}\text{J}}{(2.998\times10^8\text{m/s})^2}=2.67\times10^{-30}\text{kg}$

而$m=9.11\times10^{-31}\text{kg}$,所以$\gamma m=3.58\times10^{-30}\text{kg}$。

由 $\gamma=1/\sqrt{1-(v/c)^2}$,得

$$\frac{1}{\gamma^2}=1-\left(\frac{v}{c}\right)^2=\left(\frac{m}{\gamma m}\right)^2=\left(\frac{0.91}{3.58}\right)^2=0.0646$$

解得 $v=c\sqrt{1-0.0646}=0.967c=2.9\times10^8\text{m/s}$

41.6 试求将电子从静止加速至光速的0.90倍所需要的能量。

解 $KE=(\gamma m-m)c^2=\left[\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-m\right]c^2=mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right]$

$=(9.11\times10^{-31}\text{kg})(2.998\times10^8\text{m/s})^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0.90)^2}}-1\right]$

$=1.06\times10^{-13}\text{J}=0.66\text{MeV}$

41.7 试证明,当$v\ll c$时,$KE=(\gamma m-m)c^2$就可以化为$KE=\frac{1}{2}mv^2$。

证明 $KE=(\gamma m-m)c^2=\left[\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-m\right]c^2=mc^2\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}-1\right]$

令$b=-v^2/c^2$,按二项式定项展开有

$$(1+b)^{-1/2}=1+(-1/2)b+\frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}b^2+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots$$

所以 $KE=mc^2\left[\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\right)-1\right]=\frac{1}{2}mv^2+\frac{3}{8}mv^2\frac{v^2}{c^2}+\cdots$

当$v\ll c$,$\frac{1}{2}mv^2$以后各项可以忽略,所以得到$KE=\frac{1}{2}mv^2$。

41.8 一个具有相对论速率的电子垂直子磁场方向运动。磁感应强度为0.20T。电子轨道半径为15m。试求电子的(a)动量,(b)速率和(c)动能。在非相对论情况,磁场力qvB提供了电子的向心力mv^2/r。于是由于$p=mv$,得到

$$p=qBr$$

这一关系对于相对论效应显著时依然成立。

解 先求出电子的线动量

(a) $p=qBr=(1.60\times10^{-19}\text{C})(0.20\text{T})(15\text{m})$

$=4.8\times10^{-19}\text{kg}\cdot\text{m/s}$

(b) 由 $p=mv/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$,代入m值有

$$4.8\times10^{-19}\text{kg}\cdot\text{m/s}=\frac{(mc)(v/c)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$

将两边平方解$(v/c)^2$得

$$\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{1+3.23\times10^{-7}} \quad 或 \quad \frac{v}{c}=\frac{1}{\sqrt{1+3.23\times10^{-7}}}$$

手工计算很是繁杂，我们应用

$$1/\sqrt{1+x}\approx1-\frac{1}{2}x \qquad (对于 x\ll1)$$

则 $v/c\approx1-1.61\times10^{-7}=0.999\,999\,84$

(c) $KE=(\gamma m-m)c^2=mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}-1\right]$

我们已求出$(v/c)^2=1/(1+3.23\times10^{-7})$。若应用$1/(1+x)\approx1-x$ （对于$x\ll1$），有

$$(v/c)^2=1-3.23\times10^{-7}，则$$

$$KE=mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{3.23\times10^{-7}}}-1\right)=(mc^2)(1.76\times10^3)$$

将上两式联立得

$$KE=1.4\times10^{-10}J=9.0\times10^8 eV$$

注意，应用$E^2=p^2c^2+m^2c^4$ 以及$KE=E-mc^2$的方法也可解此题。

41.9 太阳向四面八方等量地辐射能量。在地球的距离($\gamma=1.50\times10^{11}$ m)，太阳的辐射为1.4kW/m²。试求，由于这种辐射，太阳每天要损失多少质量？

解 以太阳为中心且通过地球的球面面积为

$$4\pi r^2=4\pi(1.50\times10^{11}m)^2=2.83\times10^{23}m^2$$

通过这个球面的每平方米面积，每秒钟太阳辐射1.4kW/m²。因此每秒钟总辐射能为

$$(面积)(1400W/m^2)=3.96\times10^{26}W$$

$$每日辐射总能量=(3.96\times10^{26}W)(86400s/d)=3.42\times10^{31}J/d,$$

由质能关系$\Delta E_0=\Delta mc^2$，损失质量为

$$\Delta m=\frac{\Delta E_0}{c^2}=\frac{3.42\times10^{31}J}{(2.998\times10^8m/s)^2}=3.8\times10^{14}kg$$

而太阳质量为2×10^{30}kg。

41.10 当一束放射性粒子通过实验室时进行测量，平均每个粒子“存活”2.0×10^{-8}s。以后粒子就变成新的形态。而同样的粒子静止在实验室却平均“存活”0.75×10^{-8}s。求该束粒子的运动速率。

解 伴随粒子的某种计时装置确定粒子“存活”多长。这种时钟给出原时寿命，它遵从时间膨胀关系$\Delta t_M=\gamma\Delta t_s$。$\Delta t_M=2.0\times10^{-8}$s是相对于粒子束（包括计时装置）运动的观测者所看到的时间间隔。因此

$$2.0\times10^{-8}s=\gamma(0.75\times10^{-8}s) \quad 或$$

$$0.75\times10^{-8}=(2.0\times10^{-8})\sqrt{1-(v/c)^2}$$

平方后得 $v=0.927c=2.8\times10^8$m/s.

41.11 一对双胞胎兄妹25.0岁时，哥哥出发作宇宙遨游，飞船速率几乎不变。哥哥用飞船上的表计时。当他返回地面时，他说他是31.0岁。而留在地球上的妹妹却说自己43.0岁了。求飞船的速率。

解 作为宇航员的哥哥看到飞船上时钟记录的航行时间为$\Delta t_s=6.0$年。而在地球上的钟却告诉妹妹已过了$\Delta t_M=18.0$年。

$$\Delta t_M=\gamma\Delta t_s \quad 即$$

$$6=18\sqrt{1-(v/c)^2}$$

或 $(v/c)^2=1-0.111$

解得 $v=0.943c=2.83\times10^8$m/s

41.12 细胞在地球上每10.0s分裂一次。求飞船中两个细胞从地球冲进太阳时变成多少细胞。设飞船速率为$0.850c$，日地距离为1.50×10^{11}m。

解 对于地球上的观察者，细胞作相对运动。从地球到太阳的航行时间为

$$\Delta t_M = \frac{x}{v} = \frac{1.50\times10^{11}\text{m}}{(0.850)(2.998\times10^8\text{m/s})} = 588\text{s}$$

而飞船里的时钟由于相对地球运动,从地球上看要走得较慢。飞船里的钟读数为

$$\Delta t_s = \Delta t_M/\gamma = \Delta t_M\ \sqrt{1-(v/c)^2}$$

所以　$\Delta t_s = 310\text{s}$。

细胞将按照与它们相对静止的时钟所显示的时间分裂。因为每 10.0s 分裂一次,它们共分裂 31 次。所以到冲进太阳时,细胞总数为

$$(2)^{31} = 2.1\times10^9$$

41.13 当飞船从地球旁边飞过时,其速度方向与地面平行,大小为 v。宇航员手握米尺,并将尺从平行于飞船运动方向转到垂直方向。问宇航员会发现什么?

解 在宇航员看来,米尺对他没有平移运动,因此不改变长度。然而,当米尺与飞船运动平行时,在地面上的观察者看来,米尺长度应为(1m) $\sqrt{1-(v/c)^2}$;而当米尺与飞船运动垂直时,其长度就是 1m。

41.14 宇宙飞船以 $0.95c$ 的速率从地球飞向 4.5 光年远的半人马星座。求旅行要多长时间:(a) 按地球时钟和 (b) 按飞船上的时钟。(c)在宇航员看来,这旅途有多远?(d) 宇航员计算的飞船速度是多少?

解 1 光年等于光在一年中走过的距离:

$$1\text{ 光年} = (2.998\times10^8\text{m/s})(3.16\times10^7\text{s})$$
$$= 9.47\times10^{15}\text{m}$$

在地球人看来,这次星际旅行长度为

$$d_e = (4.5)(9.47\times10^{15}\text{m}) = 4.3\times10^{16}\text{m}$$

(a) $\Delta t_e = \frac{d_e}{v} = \frac{4.3\times10^{16}\text{m}}{(0.95)(2.998\times10^8\text{m/s})} = 1.5\times10^8\text{s}$

(b) 由于飞船上的时钟比较慢,它计量的时间为

$$\Delta t_{飞船} = \Delta t_e\ \sqrt{1-(v/c)^2} = (1.51\times10^8\text{s})(0.312) = 4.7\times10^7\text{s}$$

(c) 对于宇航员来说,地球到半人马座的距离以 $0.95c$ 的速率相对他们运动。因此距离将缩短为

$$d_{飞船} = (4.3\times10^{16}\text{m})\sqrt{1-(0.95)^2} = 1.3\times10^{16}\text{m}$$

(d) 对宇航员而言,他们的相对速度为

$$v = \frac{d_{飞船}}{\Delta t_{飞船}} = \frac{1.34\times10^{16}\text{m}}{4.71\times10^7\text{s}} = 2.8\times10^8\text{m/s}$$

即 $0.95c$。不管是地球上还是飞船上的观察者都测量得到相同的速率。

41.15 当火箭飞船以速率 v 飞越地球时向前方发射一光脉冲,对地面上观察者而言,光脉冲的速率为多少?

解 方法一

由狭义相对论第二公设,光速 c 不变。

方法二

这时 $v_{O'O} = v$　和　$v_{PO'} = c$。按速度叠加原理,所观察的速率为

$$v_{PO} = \frac{v_{PO'} + v_{O'O}}{1+\frac{v_{PO'}v_{O'O}}{c^2}} = \frac{v+c}{1+(v/c)} = \frac{(v+c)c}{c+v} = c$$

习　题

41.16 若要 $\gamma = 2.0$,粒子速率须多大?

(答　$2.6\times10^8\text{m/s}$)

41.17 粒子运动速率为 v,$v/c = 0.99$。求该粒子的 γ 值。

(答　7.1)

41.18 试求一个电子的静止能量,即与其质量 $m = 9.11\times10^{-31}\text{kg}$ 相应的能量。

（答　0.512MeV=820pJ）

41.19　电子的动能为 1.0×10^5eV（或相当于 1.6×10^{-14}J），求其速率。

（答　1.6×10^8m/s）

41.20　中子（$m=1.67\times10^{-27}$kg）被加速到动能等于 200MeV。求其速率。

（答　1.70×10^8m/s）

41.21　由线动量的定义和质能关系式出发，试证明 $E^2=p^2c^2+m^2c^4$，并据此证明粒子的平动动能 KE=$\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}-mc^2$。

41.22　某种细菌每 20 天数量增加一倍，将两个细菌放到飞船上，使飞船以 $0.9950c$ 的速率航行 1000 个地球天。问届时飞船中将有多少个细菌？

（答　64）

41.23　某光源每秒发射 2×10^{15}个光脉冲。当飞船以 $0.90c$ 速率飞过地球时，飞船上的光源朝垂直于飞船行进的方向发射脉冲。地球上每秒钟记录到多少脉冲？

（答　8.7×10^{14}）

41.24　某飞船舱外画的标志为一圆圈和一斜线，斜线与竖直方向成 45°角。当两飞船在太空相对速率为 $0.95c$ 时，第二个飞船中的宇航员观察到这个标志中的斜线将与垂直线成多大角度？

（答　$\tan\theta=0.31$，$\theta=17°$）

41.25　飞船以 $0.92c$ 的速率飞越地球。这时地球上和飞船中的人员各自将相同的闹钟调至 6.0 小时后鸣响。在地球人看来，飞船上闹钟响起时，地球上闹钟指示什么时间？

（答　15 小时）

41.26　中子（$m=1.67\times10^{-27}$kg）加速至 2000MeV（即 2GeV）能量时，其速率和动量为多少？要求三位有效数字。

（答　$0.948c$，1.49×10^{-18}kg·m/s）

第四十二章　量子物理和波动力学

辐射的量子性

包括光在内的一切形式的电磁辐射都具有二象性的本质。在空间传播时，它们的行为像波动，并产生干涉和衍射。而当电磁辐射与原子、分子相互作用时，它们的行为又像是具有能量的粒子流，这种粒子称为光子或光量子。

每个光子的能量(E)取决于辐射的频率 f(或波长 λ)：

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

式中 $h=6.626\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$，是一个自然常数，叫普朗克常数。

光电效应

某些金属表面受到电磁辐射的作用可以释放出电子。能量为 hf 的光子进入金属并被电子吸收。若得到足够的能量，这个电子就可以到达表面，进而具有动能离开金属而发射出来。发射出来的电子的动能有一定范围，这取决于它们原本在金属中的深度。电子离开表面所需要的能量用 ϕ 表示，称为功函数。金属表层的电子可能获得($hf-\phi$)的能量，这是它们动能的极大值，

爱因斯坦光电效应方程为

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = hf - \phi$$

对装置加适当的电压可以阻止电子的发射，于是可以求出光电子的能量：$\frac{1}{2}mv^2=V_se$。对于动能最大的电子有

$$hf - \phi = V_se$$

式中 V_s 称为截止电压(或遏止电压)。

对于任何表面，要能产生光电子发射，辐射的波长必须足够短，以使光子能量 hf 大得足以激发出电子来。在临界波长(或频率)，光子的能量刚好等于金属的功函数。普通金属的临界波长在可见光或紫外光波段。用X射线很容易激发出光电子，而红外光则不能。

光子的动量

由 $E^2=m^2c^4+p^2c^2$，当 $m=0$ 时，有 $E=pc$。又 $E=hf$，所以有

$$E = pc = hf,\quad p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

光子的动量为 $p=h/\lambda$。

康普顿效应

光子可以与一个具有质量的粒子，如电子，发生碰撞。碰撞后，光子受到散射而具有新的波长和动量。若初始波长为 λ_i 的光子与一个质量为 m_e 的静止的自由电子碰撞，光子受到反射而偏离了一个角度 θ，则散射后光子的波长增加到 λ_s：

$$\lambda_s = \lambda_i + \frac{h}{m_ec}(1-\cos\theta)$$

一般而言，散射后波长改变的相对量是非常小的，只有高能辐射，如X射线或γ射线的散射才会有较大的改变。

德布罗意波

质量为 m、动量为 p 的粒子通过下式与一个德布罗意波长相联系起来：

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

一束粒子可以衍射，也可以产生干涉现象。把粒子束当成具有德布罗意波长的波，就可以计算出粒子的这种波动特性。

德布罗意波的共振

被局限在一定空间的粒子称为束缚粒子。封闭容器内的气体分子或原子中的电子都是束缚粒子的典型实例。如果描述束缚粒子的德布罗意波波长与这个局限区域恰好成某种比例，德布罗意波就会产生共振。我们称每种可能的共振态为系统的稳定态。在共振波（即驻波）的波腹处找到粒子的几率最大，而在波节处则从来找不到粒子。

能量量子化

因为每种共振态都有与之相联系的分立的能量，所以束缚粒子的能量是量子化的。而只在共振态才能找到粒子，即所观测到的粒子能量是分立的，量子化的。只有在原子或比较小的粒子系统中，不同共振态之间的能量差别比较大，人们才得以方便地观测到这种差别。

例　题

42.1　试证明，波长为 1240nm 的红外波段的一个光子具有 1.00eV 的能量。

证明 ☞　$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\,\text{m/s})}{1240\times10^{-9}\,\text{m}}$

$= 1.602\times10^{-19}\,\text{J} = 1.00\,\text{eV}$

42.2　试计算波长为 450nm 的蓝光的一个光子的能量。

解 ☞　$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\,\text{m/s})}{450\times10^{-9}\,\text{m}} = 4.42\times10^{-19}\,\text{J} = 2.76\,\text{eV}$

42.3　要打破人皮肤分子的化学键产生光灼伤，光子的能量需达到 3.50eV。这对应的波长为多少？

解 ☞　$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{(6.63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\,\text{m/s})}{(3.50\,\text{eV})(1.602\times10^{-19}\,\text{J/eV})} = 354\,\text{nm}$

紫外光产生光灼伤。

42.4　金属钠的功函数为 2.3eV。能使钠产生光电子发射的光，波长最大为多少？

解 ☞　在临界情况下，将电子从金属中激发出来的光子能量应等于功函数，即

$$\phi = \frac{hc}{\lambda}$$

$$(2.3\,\text{eV})\left(\frac{1.602\times10^{-19}\,\text{J}}{1.00\,\text{eV}}\right) = \frac{(6.63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\,\text{m/s})}{\lambda}$$

$$\lambda = 5.4\times10^{-7}\,\text{m}$$

42.5　金属镍的表面在波长为 200nm 的紫外光作用下产生光电子。欲阻止住可能产生的最快的光电子，需施加多大的电压？已知镍的功函数为 5.01eV。

解 ☞　$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\,\text{m/s})}{2000\times10^{-10}\,\text{m}} = 9.95\times10^{-19}\,\text{J} = 6.21\,\text{eV}$

由光电效应方程，最快的光电子能量为

$$6.21\,\text{eV} - 5.01\,\text{eV} = 1.20\,\text{eV}$$

所以需加反向遏止电压 1.20V，即为镍的遏止电压。

42.6　试问，用可见光照射铜表面，能否产生光电子。已知铜的功函数为 4.4eV。

解 解法同 42.4 题，阈值波长 λ 为

$$\lambda = \frac{hc}{\phi} = \frac{(6.63\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s})(2.998\times10^{8}\mathrm{m/s})}{4.4(1.602\times10^{-19})\mathrm{J}} = 282\mathrm{nm}$$

所以可见光(400nm 到 700nm)不可能使铜产生光电子。

42.7 一种学生用激光器的光束(λ=633nm)强度为 3.0mW。每秒钟有多少光子通过光束中的指定一点？

解 每秒钟通过该点的能量为 0.0030J。而每个光子的能量为 hc/λ，即 3.14×10^{-19}J，每秒钟通过指定点的光子数等于

$$\frac{0.0030\mathrm{J/s}}{3.14\times10^{-19}\mathrm{J}} = 9.5\times10^{15}$$

42.8 在粒子对生成过程中，一个光子转化成一个电子和一个正电子。正电子的质量与电子相同，但电荷反号，为$+e$。试求，若得以发生这个过程，光子最少需要有多大能量，相应的波长是多少。精确到三位有效数字。

解 光子的能量必须相当于它转换的粒子的质量，即

$$mc^2 = (2)(9.11\times10^{-31}\mathrm{kg})(2.998\times10^{8}\mathrm{m/s})^2$$
$$= 1.64\times10^{-13}\mathrm{J} = 1.02\mathrm{MeV}$$

这个能量等于 hc/λ，所以

$$\lambda = \frac{hc}{1.64\times10^{-13}\mathrm{J}} = 1.21\times10^{-12}\mathrm{m}$$

属于硬 X 射线波段，γ 射线波段。

42.9 若一束电磁辐射束中，一个光子的动量与一个以 2.00×10^{5}m/s 运动的电子的动量相同，求电磁辐射的波长。

解 由题意，$(mv)_{电子}=(h/\lambda)_{光子}$。所以

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}}{(9.11\times10^{-31}\mathrm{kg})(2.00\times10^{5}\mathrm{m/s})} = 3.64\mathrm{nm}$$

属于 X 射线波段。

42.10 假定波长 3.64nm 的光子沿 x 正方向运动并与速率为 2×10^{5}m/s，沿$-x$ 方向运动的电子正面发生完全弹性碰撞，求碰撞后的情况。

解 由动量守恒知，系统碰撞前的动量$\left(\frac{h}{\lambda_0}-mv_0\right)$应等于碰撞后的动量$\left(\frac{h}{\lambda}-mv\right)$。即

$$\frac{h}{\lambda_0} - mv_0 = \frac{h}{\lambda} - mv$$

由上题知，$h/\lambda_0=mv_0$，所以有 $h/\lambda=mv$。

又因为是完全弹性碰撞，系统碰撞前后的动能相等，即

$$\frac{hc}{\lambda_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{hc}{\lambda} + \frac{1}{2}mv^2$$

代入 $h/\lambda_0=mv_0$ 和 $h/\lambda=mv$，得

$$v_0(c+\frac{1}{2}v_0) = v(c+\frac{1}{2}v)$$

所以 $v=v_0$，即碰撞后电子以原来的速率朝$+x$ 方向运动。而由于 $h/\lambda=mv=mv_0$，光子的波长不变，也"反弹"朝$-x$ 方向传播。

42.11 一光子(λ=0.400nm)与一静止电子碰撞后发生散射，传播方向与原来方向成 150°角。求碰撞后光子的速率和波长。

解 光子的速率永远等于真空中光速 c。为得到碰撞后的波长，应用康普顿效应方程

$$\lambda_s = \lambda_i + \frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

$$\lambda_s = 4.00\times10^{-10}\mathrm{m} + \frac{6.63\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}}{(9.11\times10^{-31}\mathrm{kg})(2.998\times10^{8}\mathrm{m/s})}(1-\cos150^\circ)$$

$$\lambda_s = 4.00\times10^{-10}\mathrm{m} + (2.43\times10^{-12}\mathrm{m})(1+0.866) = 0.405\mathrm{nm}$$

42.12 一粒子运动速率为 2.0×10^6 m/s，求其相应的德布罗意波长，如果这粒子为(a)电子，(b)质子或(c) 0.20kg 的球。

解 应用德布罗意波的定义：

$$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{m(2.0\times10^6\,\mathrm{m/s})}=\frac{3.31\times10^{-40}\,\mathrm{m\cdot kg}}{m}$$

代入相应的 m 值，得到电子的波长为 3.6×10^{-10} m，质子为 2.0×10^{-13} m，而对于 0.20kg 的球为 1.7×10^{-39} m。

42.13 一静止电子通过了 100V 的电场，求其德布罗意波长。

解 电场加速后的电子，其速率仍然远远小于光速，所以可以忽略相对论效应。电子获得的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 等于它损失的电势能 Vq。即

$$v=\sqrt{\frac{2Vq}{m}}=\sqrt{\frac{2(100\,\mathrm{V})(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})}{9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}}}=5.927\times10^6\,\mathrm{m/s}$$

$$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{(9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg})(5.927\times10^6\,\mathrm{m/s})}=0.123\mathrm{nm}$$

42.14 在电子显微镜中，若要电子的波长为 0.500Å，需多大的加速电压？

解 电子动能 $=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{h}{m\lambda}\right)^2=\frac{h^2}{2m\lambda^2}$

以上计算应用了德布罗意关系。代入有关数值得动能 $\mathrm{KE}=9.66\times10^{-17}$ J。

由 $\mathrm{KE}=Vq$，有

$$V=\frac{\mathrm{KE}}{q}=\frac{9.66\times10^{-17}\,\mathrm{J}}{1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}}=600\mathrm{V}$$

42.15 求一个热中子的动能 KE 和波长。

解 按定义，热中子是处于 20℃(293K)左右的中子气体中的自由中子。由第十七章的内容，一个气体分子的热能量等于 $3kT/2$，k 为玻尔兹曼常数(1.38×10^{-23} J/K)，所以

$$\mathrm{KE}=\frac{3}{2}kT=6.07\times10^{-21}J$$

这属于非相对论情况，所以可以写成

$$\mathrm{KE}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{m^2v^2}{2m}=\frac{p^2}{2m},\quad p^2=(2m)(\mathrm{KE})$$

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{(2m)(\mathrm{KE})}}=\frac{6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{\sqrt{(2)(1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg})(6.07\times10^{-21}\,\mathrm{J})}}=0.147\mathrm{nm}$$

42.16 若 42.7 题中光束截面积为 $3.0\mathrm{mm}^2$，垂直入射到物体表面并完全反射，求这束激光对物体表面的压强。

解 每个光子的动量为

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{633\times10^{-9}\,\mathrm{m}}=1.05\times10^{-27}\,\mathrm{kg\cdot m/s}$$

当光子反射时，其动量由 $+p$ 改变为 $-p$，改变量为 $2p$。在 40.7 题中已求得每秒钟有 9.5×10^{15} 个光子击中物体表面，所以每秒动量改变量为

$$(9.5\times10^{15}/\mathrm{s})(2)(1.05\times10^{-27}\,\mathrm{kg\cdot m/s})=1.99\times10^{-11}\,\mathrm{kg\cdot m/s^2}$$

由动量方程(见第八章)

$$\text{冲量}=Ft=\text{动量改变}$$

得　$F=1.99\times10^{-11}\,\mathrm{kg\cdot m/s^2}$

$$\text{压强}=\frac{F}{A}=\frac{1.99\times10^{-11}\,\mathrm{kg\cdot m/s^2}}{3.0\times10^{-6}\,\mathrm{m^2}}=6.6\times10^{-6}\,\mathrm{N/m^2}$$

42.17 一质量为 m 的粒子束缚在一长度为 L 的狭窄管子里。试求(a)在管中共振的德布罗意波的波长，(b)粒子相应的动量和(c)能量，(d)若电子束缚在 $L=0.50$m 长的细管中，求它的能量。

解 (a) 由于细管两端是封闭固定的，德布罗意波共振时，管端必为波节处。图 42-1 描述了几种可能的共振形式，共振时有

$$L=\frac{1}{2}\lambda_1,2\left(\frac{1}{2}\lambda_2\right),$$

$$3\left(\frac{1}{2}\lambda_3\right),\cdots,n\left(\frac{1}{2}\lambda_n\right)$$

或 $L=\frac{2L}{n}$, $\quad n=1,2,3,\cdots$

(b) 德布罗意波有 $\lambda_n=h/p_n$，所以共振动量为

$$p_n=\frac{nh}{2L}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

(c) 由 42.15 题知，$p^2=(2m)(\text{KE})$，即

$$(\text{KE})_n=\frac{n^2h^2}{8L^2m} \quad n=1,2,3,\cdots$$

注意，粒子只有分立的能量，即能量量子化。

(d) 代入 $m=9.1\times10^{-31}$kg 和 $L=0.50$m，得

$$(\text{KE})_n=2.4\times10^{-19}n^2\text{J}=1.5n^2\text{eV}$$

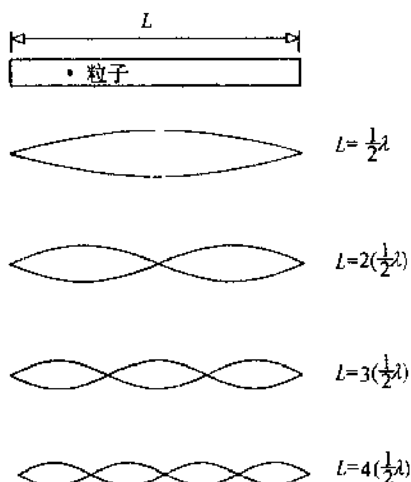


图 42-1

42.18 一质量为 m 的粒子束缚在半径为 R 的圆形轨道上。若其德布罗意波在此轨道上共振，该粒子具有多少能量？试计算电子在 $R=0.50$nm 的轨道上的情况。

解 要在圆形轨道上形成共振，波沿轨道传播，使波腹永远落在波腹上，波节永远落在波节上。图 42-2 就表示了一种可能的共振形式，轨道周长为 4 个波长。一般而言，发生共振时，圆周等于 n 倍波长的长度，$n=1,2,3,\cdots$。对于这样的德布罗意波有

$$n\lambda_n=2\pi R, \quad p_n=\frac{h}{\lambda_n}=\frac{nh}{2\pi R}$$

在上题中有

$$(\text{KE})_n=\frac{p_n^2}{2m}=\frac{n^2h^2}{8\pi^2R^2m}$$

能量是量子化的。代入有关数据得

$$(\text{KE})_n=2.4\times10^{-20}n^2\text{J}=0.15n^2\text{eV}$$

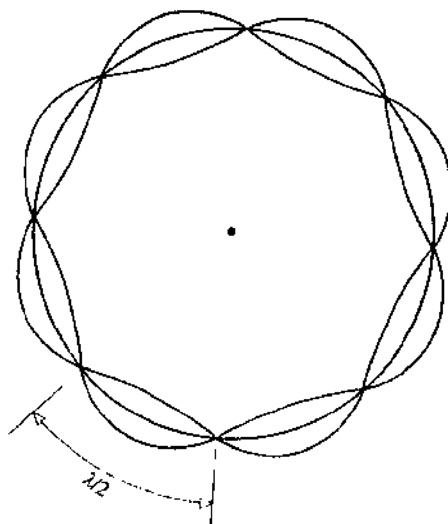


图 42-2

习　题

42.19 试求蓝光($\lambda=450$nm)光子的能量，分别以 J 和 eV 为单位。

(答　4.41×10^{-19}J=2.76eV)

42.20 光子能量为 600eV，试求光的波长。

(答　2.07nm)

42.21 一钠光灯辐射黄光($\lambda=589$nm)的功率为 20W。每秒钟辐射出多少光子?

(答　5.9×10^{19})

42.22 钠的光电效应阈值波长(译注：称红限)为 680nm。试求钠的功函数。

(答　1.82eV)

42.23 波长 200nm 的紫外光照射钾的表面，已知钾的红限为 440nm。试求这时钾发射的光电子的最大动能。若遏止光电子发射，遏止电压为多少?

(答　3.38eV，3.38V)

42.24 某物质的红限为 600nm，其表面受到波长为 4×10^{-7}m 的光照。求所发射的最快的光电子的速率。

(答　6×10^5m/s)

42.25 波长为 150nm 的紫外光照到某金属，从金属表面发出的光电子的最大动能为 3.00eV。试求这种金属的功函数、红限和遏止电压。

(答　5.27eV，235nm，3.00V)

42.26 求 500nm 光子的速率和动量。

(答　2.998×10^8m/s，1.33×10^{-27}kg · m/s)

(译注：原文为 133×10^{-27}kg · m/s)

42.27 波长为 5.00×10^{-14}m 的一束 X 射线受到一个静止质子($m=1.67\times10^{-27}$kg)的散射，散射角为 110°。求散射的 X 射线的波长。

(答　5.18×10^{-14}m)

42.28 一光子产生了正负电子对，正、负电子的动能均为 220keV。求光子的能量和波长。

(答　1.46MeV，8.49×10^{-13}m)

42.29 试证明，静止电子受到加速电压 V(伏)的作用，其德布罗意波长为 $1.226/\sqrt{V}$nm。

42.30 电子受到 9.0kV 的加速电压作用，试求其德布罗意波长。不计相对论效应。

42.31 电子受到 1.0MV 的加速电压作用，试求其德布罗意波长，在这种高能情况，必须应用相对论的质能关系式。

(答　8.7×10^{-13}m)

42.32 将速率为 400m/s 的一束电子通过一衍射光栅。若使强衍射电子束与透射束的夹角达到 25°，光栅的缝间距应为多少?

(答　$n(4.3\times10^{-6}\text{m})$，$n=1,2,3,\cdots$)

第四十三章 氢 原 子

氢原子

氢原子直径约为 0.1nm，由一个质子（半径约 10^{-15}m）和一个电子组成，质子为核。

电子轨道

原子的第一个令人信服的模型是尼尔斯·玻尔于 1913 年提出来的。尽管有了更为科学的量子力学的解释，玻尔模型的许多简单结论仍是有价值的。最早期的玻尔模型描述的是电子在圆形轨道上绕核运动的图像。而氢原子就是一个电子绕一个质子作圆周运动。电子的德布罗意波在半径为 r 的轨道上共振，或者说德布罗意波长与轨道成某种比例时（见图 42-2），有下式成立（见 42.18 题）

$$mv_n r_n = \frac{nh}{2\pi}$$

式中 n 为整数。$mv_n r_n$ 为电子在第 n 级轨道上的角动量。v 表示电子的速率，m 为电子质量，$h = 6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$，为普朗克常数。

使电子在轨道上作圆周运动的向心力是核与电子之间的库仑引力。即 $F = ke^2/r^2 = ma = mv_n^2/r_n$，所以有

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = k\frac{e^2}{r^2}$$

方程的解给出了一系列稳定轨道的半径值：$r_n = (0.053\text{nm})n^2$。电子在第 n 级轨道上运动，也即原子处在第 n 级能态时能量为

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2}\text{eV}$$

正如 42.17 题和 42.18 题的结论，由于稳定态对应于这个束缚体系的一种共振形式，所以原子的能量是量子化的。对于单电子绕带电 Ze 的核作轨道运动，相应的关系式为

$$r_n = (0.053\text{nm})\left(\frac{n^2}{Z}\right)$$

和

$$E_n = -\frac{13.6Z^2}{n^2}\text{eV}$$

式中 Z 为核的原子序数。

能级图

能级图概括了系统允许的能量状态。图中竖直方向为能量标度，而水平线为允许的能量。氢原子的能级图见图 43-1。每一条水平线都代表氢原子的一种共振态的能量。取原子被电离，即轨道半径为无穷大时原子的能量为零。电子离核近，则势能小于零，即原子的能量为负值，如图右侧所标。$n=1$，相当于电子在最小的轨道上运动的能量最低态，称为基态。

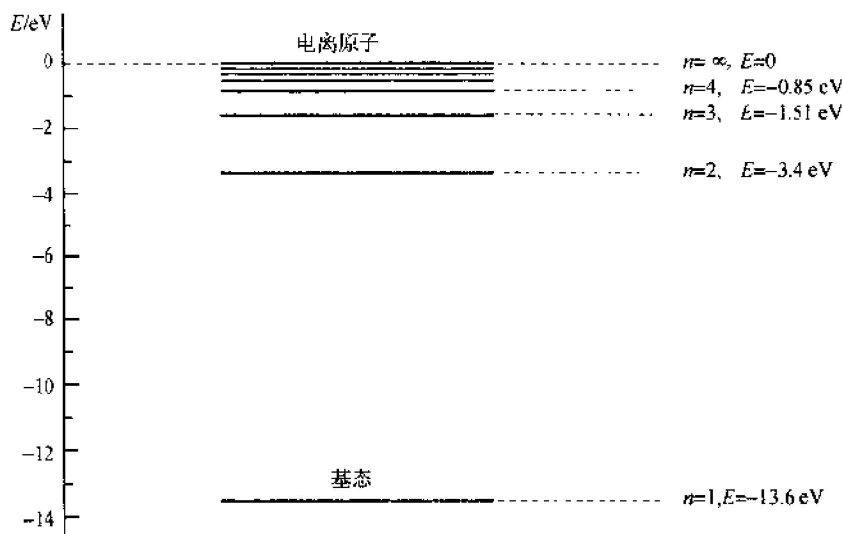


图 43-1

光辐射

当一个孤立原子从一个能级落到较低的能级时，就会辐射出一个光子，而原子跃迁到较低能级时损失的能量就是这个光子的能量。光子的波长和频率为

$$hf=\frac{hc}{\lambda}=\text{系统损失的能量}$$

这种辐射具有精确的波长，在原子辐射谱中产生一条谱线。请记住，1240nm 的光子具有 1eV 能量，光子的能量与其波长成反比。

谱线

处于激发态的孤立原子所辐射的谱线形成不同线系。典型的线系是在可见光波段的巴耳末系，如图 43-2。还有别的线系，在紫外波段的叫莱曼系，红外波段还有一些线系，其中靠近可见光波段的线系叫帕邢系。各线系的波长由下列各式得出：

莱曼系 $\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)$, $n=2,3,\cdots$

巴耳末系 $\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)$, $n=3,4,\cdots$

帕邢系 $\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right)$, $n=4,5,\cdots$

式中 $R=1.0974\times10^{7}\text{m}^{-1}$ 叫里德伯常数。

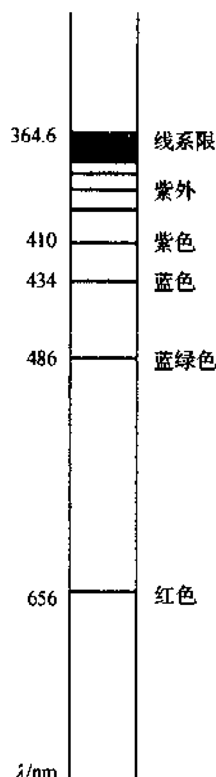


图 43-2

谱线系的产生

图 43-2 中巴耳末系是由原子中的电子从较高能级落到 $n=2$ 的能级时所产生的。从 $n=3$ 跃迁到 $n=2$ 产生的光子能量为 $\Delta E_{3,2}=1.89\text{eV}$，它相当于波长 656nm，为该线系的第一条谱线。而由 $n=4$ 到 $n=2$ 的跃迁则产生第二条谱线。同样，向 $n=1$ 态的跃迁产生

莱曼系，向 $n=3$ 态跃迁产生帕邢系。

光吸收

如果光子能使处于基态的原了上升到较高的能级，原子就吸收了这个光子，这个过程叫共振吸收。

例　题

43.1 当氢原子中受激发的电子从 $n=5$ 跃迁到 $n=2$ 时，辐射光的波长为多少？精确到三位有效数字。

解 ☞ 由 $E_n=-13.6/n^2\text{eV}$，有

$$E_5=-0.54\text{eV}$$
$$E_2=-3.40\text{eV}$$

两种能量状态的差为 $3.40-0.54=2.86(\text{eV})$。而 1240nm 对应 1eV，又波长与能量成反比，所以该辐射波长为

$$\lambda=\left(\frac{1.00\text{eV}}{2.86\text{eV}}\right)(1240\text{nm})=434\text{nm}$$

43.2 氢原子受到轰击，可能会升至较高的能态。当受激发的电子跃迁到较低的能级时，便会产生光辐射。试求从较高能级跃迁到 $n=1$ 时，氢原子辐射光中三种最长的波长。

解 ☞ 参见图 43-1，我们对以下三种跃迁感兴趣：

$$n=2\rightarrow n=1:\quad \Delta E_{2,1}=-3.4-(-13.6)=10.2\text{eV}$$
$$n=3\rightarrow n=1:\quad \Delta E_{3,1}=-1.5-(-13.6)=12.1\text{eV}$$
$$n=4\rightarrow n=1:\quad \Delta E_{4,1}=-0.85-(-13.6)=12.8\text{eV}$$

我们可以参照 43.1 题求出它们的波长，或应用 $\Delta E=hf=hc/\lambda$ 来求。比如，从 $n=2$ 到 $n=1$ 的跃迁有

$$\lambda=\frac{hc}{\Delta E_{2,1}}=\frac{(6.63\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s})(2.998\times10^{8}\text{m/s})}{(10.2\text{eV})(1.60\times10^{-19}\text{J/eV})}=1.22\text{nm}$$

用同样的方法可求得另外两谱线的波长分别为 102nm 和 96.9nm。这就是莱曼系中前三条谱线。

43.3 巴耳末系的线系限波长为电子从 $n=\infty$ 落到 $n=2$ 时的辐射。求这条谱线的波长（三位有效数字）。

解 ☞ 由图 43-1，$\Delta E=3.40-0=3.40(\text{eV})$。由 $\Delta E=hc/\lambda$，可得相应的波长为 365nm。

43.4 若将一个不处于激发态的氢原子电离，需要的辐射光的最大波长为多少？

解 ☞ 人射光的光子能量必须足够大，以便当它被原子吸收后，使电子从 $n=1$ 能级上升到 $n=\infty$ 能级。由于 $E_\infty-E_1=13.6\text{eV}$，利用 $E_\infty-E_1=hc/\lambda$，求 $\lambda=91.2\text{nm}$。若光的波长比这还短，不但能使电子离开原子，而且还使这个电子获得附加动能。

43.5 一价氦离子（氦原子中有两个电子，只失去了一个电子）的能级由下式给出：

$$E_n=-(54.4/n^2)\text{eV}$$

试画出该体系的能级图。

解 ☞ 见图 43-3

43.6 求一价氦离子巴耳末系的两个最长的波长。

解 ☞ 相应的能级图见图 43-3。巴耳末系谱线相应于从较高的能级向 $n=2$ 能级的跃迁。因此，两个能量最小（波长最长）的跃迁分别为

$$n=3\rightarrow n=2,\quad \Delta E_{3,2}=13.6-6.04=7.6\text{eV}$$
$$n=4\rightarrow n=2,\quad \Delta E_{4,2}=13.6-3.4=10.2\text{eV}$$

记住，1eV 对应于 1240nm，上述跃迁对应的波长分别为 163nm 和 122nm，均处在远紫外波段或 X 射线的长波段。

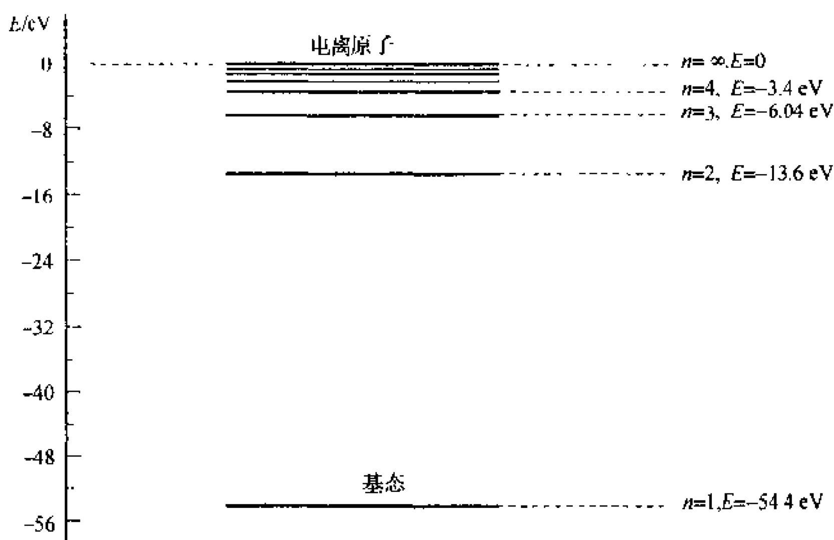


图 43-3

43.7 基态氢原子受到 12.0V 电压加速的电子的轰击，其辐射的波长为多少？

解 ☞　当基态原子获得 12.0eV 的能量(即轰击电子所能提供的最大能量)，其激发态不会超过基态 12.0eV。在这个能量区间只有一个态，即 $n=2$。所以惟一可能的跃迁为

$$n=2\rightarrow n=1;\quad \Delta E_{2,1}=13.6-3.4=10.2\text{eV}$$

其波长为

$$\lambda=(1240\text{nm})\left(\frac{1.00\text{eV}}{10.2\text{eV}}\right)=122\text{nm}$$

这是莱曼系中波长最大的谱线。

43.8 处于非激发态的氢气是绝缘体，因为它没有自由电子。若要光照使之导电，求入射光子束的波长的最大值。

解 ☞　入射光子必须使原子电离才能使之导电，这称为原子光电效应。为此，光子能量至少为 13.6eV。其相应波长的最大值为

$$\lambda=(1240\text{nm})\left(\frac{1.00\text{eV}}{13.6\text{eV}}\right)=91.2\text{nm}$$

这是莱曼系的线系限。

习　题

43.9 氢光谱中有一谱线的波长为 821nm，试求产生此谱线的两个能级的能量差。

(答　1.51eV)

43.10 试求氢光谱帕邢系中两个波长最大的谱线的能量及其相应的波长，答案精确到两位有效数字。

(答　0.66eV，0.97eV，1.9×10^{-6}m 和 1.3×10^{-6}m)

43.11 试求氢光谱帕邢系的线系限波长。

(答　821nm)

43.12 锂原子的核电荷为 $+3e$。若锂原子已经失去了两个电子，第三个电子处于基态。若要移去这个电子，需多大能量？

(答　122eV)

43.13 加速电压 V 作用下的电子束轰击基态氢原子。若要求碰撞为完全弹性碰撞，试求加速电压的极大值。

(答　<10.2V)

43.14 试求基态一价氦离子能强烈吸收的三种波长最大的辐射。

(答　30.4nm, 25.6nm, 24.3nm)

43.15 试求将一价氦离子中的第二个电子移走所需的能量。若入射光能使这个电子脱离氦离子,光的最大波长为多少?

(答　54.4eV, 22.8nm)

43.16 试求一价氦离子光谱中巴耳末系的线系限,

(答　91nm)

第四十四章　多电子原子

中性原子

如果原子的核电荷为$+Ze$，而核外电子数为 Z 个，则称为中性原子。当核外电子具有可能的最低能量时，原子处于基态。原子态由它的各个电子的量子数来表示。

量子数

用于表明原子中电子的各项参量的量子数如下：

- 主量子数 n：它表明电子所处的轨道或壳层。在氢原子中，它通过 $E_n=-13.6/n^2\text{eV}$ 来表明电子的能量。
- 轨道量子数 l：它表明轨道电子的角动量 L

$$L=\left(\frac{h}{2\pi}\right)\sqrt{l(l+1)}$$

式中 h 为普朗克常数，$l=0,1,2,\cdots,n-1$。

- 磁量子数 m_l 它描述电子轨道角动量矢量相对于外加磁场方向 z 的取向

$$L_z=\left(\frac{h}{2\pi}\right)(m_l)$$

式中 $m_l=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm l$。

- 自旋量子数 m_s：它只有$\pm\frac{1}{2}$两个值。

泡利不相容原理

泡利不相容原理指出，同一原子中不可能有两个电子具有同一组量子数。换句话说，不可能有两个电子处于同一状态。

例　题

44.1　试估算将金原子($Z=79$)$n=1$(内壳层)的一个电子移走所需的能量。

解答　处于原子最内层的电子受外层电子的影响很小，我们可以认为只有这么一个电子。考虑到核电荷为(Ze)，我们可将上章的能量公式适当修正以给出能量的近似值。对于 $n=1$，$E_n=-13.6Z^2/n^2$ 给出

$$E_1=-13.6(79)^2\text{eV}=-84900\text{eV}=-84.9\text{keV}$$

将 $n=1$ 的一个电子移到 $E_\infty=0$ 的能级，需大约 84.9keV 的能量。

44.2　求基态锂原子中各电子的量子数。

解答　泡利不相容原理指出，锂原子的三个电子可以取如下的电子数：

电子 1：$n=1,\ l=0,\ m_l=0,\ m_s=+\frac{1}{2}$

电子 2：$n=1,\ l=0,\ m_l=0,\ m_s=-\frac{1}{2}$

电子 3：$n=2,\ l=0,\ m_l=0,\ m_s=+\frac{1}{2}$

注意，当 $n=1$ 时，l 必须为零，m_l 必须为零(为什么?)。所以 $n=1$ 有两种可能，而第三个电子就必须到 $n=2$ 壳层。处在玻尔轨道的第二层的电子比起 $n=1$ 的电子，比较容易脱离原子。所以也比较容易得到一价锂离子 Li^+。

44.3 为什么钠($Z=11$)成为锂之后最容易成为一价离子的元素？

解 钠只有一个 $n=3$ 的电子。何以见得？泡利不相容原理只允许 $n=1$ 壳层有两个电子。还有 8 个电子适合 $n=2$ 的壳层

$$n=2,\ l=0,\ m_l=0,\ m_s=\pm\frac{1}{2}$$

$$n=2,\ l=1,\ m_l=0,\ m_s=\pm\frac{1}{2}$$

$$n=2,\ l=1,\ m_l=1,\ m_s=\pm\frac{1}{2}$$

$$n=2,\ l=0,\ m_l=-1,\ m_s=\pm\frac{1}{2}$$

于是第 11 个电子只有到 $n=3$ 的壳层，从而比较容易离开原子，使原子变成一价离子 Na^+。

44.4 (a) 试估算金原子($Z=79$)中一个 $n=2$ 电子落到 $n=1$ 壳层时辐射光的波长。
(b) 若使金原子激发而产生这种辐射，必须用多大能量的电子轰击金原子？

解 (a) 如 44.1 题中所说，作为一级近似，作为 Z 比较大的原子的最内层电子，其能量为 $E_n=-13.6Z^2/n^2$ eV。所以有

$$\Delta E_{2,1}=13.6(79)^2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)=63\ 700\text{eV}$$

相应的波长为

$$\lambda=(1\ 240\text{nm})\left(\frac{1\text{eV}}{63\ 700\text{eV}}\right)=0.0195\text{nm}$$

由此显见，大原子序数元素的内层跃迁产生 X 射线辐射。

(b) 在 $n=2$ 电子落到 $n=1$ 壳层以前，$n=1$ 的一个电子必须上升到 n 很大的有空位的壳层，近似到 $n=\infty$(即 $E_\infty=0$)的状态，所需能量为

$$\Delta E_{1,\infty}=0-\frac{-13.6Z^2}{n^2}=\frac{13.6(79)^2}{1}=84.9\text{keV}$$

即轰击电子必须具有 84.9keV 左右的能量。

44.5 假设电子没有自旋，即不存在自旋量子数，而对于其他的量子数，泡利不相容原理依然成立。那末前三个最容易成为一价离子的元素是什么？

解 按题意的假设，电子将取如下的量子数：

电子 1：$n=1,\ l=0,\ m_l=0$ (一价)
电子 2：$n=2,\ l=0,\ m_l=0$ (一价)
电子 3：$n=2,\ l=1,\ m_l=0$
电子 4：$n=2,\ l=1,\ m_l=+1$
电子 5：$n=2,\ l=1,\ m_l=-1$
电子 6：$n=3,\ l=0,\ m_l=0$ (一价)

每个标有"一价"的电子为处在新壳层中的第一个电子。而处于最外层的一个电子是最容易离开原子的，因此具有相应电子数的原子最容易被电离，它们是：$Z=1$(氢)，$Z=2$(锂)，$Z=6$(碳)。你能证明，$Z=15$(磷)也容易被电离成一价离子吗？

44.6 原子中 l 相同而 m_l 和 m_s 不同的电子是处于同一亚壳层中的。在 $l=3$ 亚壳层有多少个电子？

解 由于 m_l 的可能值限制在 $0,\pm1,\pm2,\pm3$，而 $m_s=\pm\frac{1}{2}$。所以对 $l=3$ 的各种可能性为

$$(m_l,m_s)=(0,\pm\frac{1}{2}),(1,\pm\frac{1}{2}),(-1,\pm\frac{1}{2}),$$
$$(2,\pm\frac{1}{2}),(-2,\pm\frac{1}{2}),(3,\pm\frac{1}{2}),(-3,\pm\frac{1}{2})$$

共有 14 种可能性。即该亚壳层中可以有 14 个电子。

44.7 X 射线管内的电子束受到 40kV 加速电压作用而轰击到钨靶。求该射线管能辐射波长最短的光。

解 ☞　当靶受到电子束轰击，所辐射的光子具有能量上限，即入射电子的能量，40keV。与之相应的光波长为

$$\lambda=(1\ 240\mathrm{nm})\left(\frac{1.0\mathrm{eV}}{40\ 000\mathrm{eV}}\right)=0.031\mathrm{nm}$$

习　题

44.8　假若没有磁量子数 m_l，那末前四个最容易被电离的元素是什么？

（答　H,Li,N,Al）

44.9　氦原子具有封闭（即填满）的外壳层，不容易失去电子，因而为惰性元素。试证明氖（$Z=10$）为下一个惰性元素。

44.10　若要通过原子的光电效应使铀（$Z=92$）原子 $n=1$ 壳层的一个电子离开，所需光子的最长波长为多少？

（答　0.0108nm）

44.11　试证明在第 l 亚壳层内能容纳电子最多为 $2(2l+1)$ 个。

第四十五章　原子核与放射性

原子核

在原子的中心处有带正电的原子核，其半径约为 10^{-15} m，即原子半径的 10^{-5} 左右。氢是最轻、最简单的原子，它的核只有一个质子。其他元素的原子核既包括质子，又包括中子。质子和中子统称核子。尽管带正电的质子相互排斥，然而有更加强大的短程核力将这些核子维系在一起。这表明存在一种基本力——强力。核子之间的相互引力随距离增大而迅速减小，当核子相距 5×10^{-15} m 时，这种引力实际上已不存在了。

核电荷与原子序数

原子核中的每个质子带电 $-e$，而中子不带电。若原子核中有 Z 个质子，则核带电 $+Ze$。我们称 Z 为核的原子序数。

原子一般是电中性的，其核外还有 Z 个电子。这些电子决定了这种原子的化学性质。所以同种化学元素的所有原子都具有相同的 Z 值。比如，所有的氢原子，$Z=1$；而所有的碳原子，$Z=6$。

原子质量单位(u)

计算中常用的核质量单位是原子质量单位(u)。定义 1u 为地球上常见形态的碳原子质量的十二分之一，其具体值为

$$1\mathrm{u} = 1.6605\times10^{-27}\mathrm{kg} = 931.494\mathrm{MeV}/c^2$$

表 45－1 列出了某些常见的粒子和核的质量以及它们的带电量。

表 45－1

粒子	符号	质量/u/	电荷	粒子	符号	质量/u/	电荷
质子	p，$^1_1\mathrm{H}$	1.007 276	$+e$	正电子	e^+，β^+，$^0_{+1}e$	0.000 548 6	$+e$
中子	n，$^1_0\mathrm{n}$	1.008 665	0	氘核	d，$^2_1\mathrm{H}$	2.013 55	$+e$
电子	e^-，β^-，$^0_{-1}e$	0.000 548 6	$-e$	α粒子	α，$^4_2\mathrm{He}$	4.001 5	$+2e$

质量数(A)

原子的质量数等于该原子核内的核子(中子和质子)数。因为每个核子的质量近似 1u，所以原子的质量数近似等于原子的质量(以 u 为单位)。另外，由于原子中电子的质量非常小，所以 A 基本上就等于原子的质量(以 u 为单位)。

同位素

除了最轻的几个元素以外，原子核内中子数对于元素的化学性质的影响微乎其微。自然界中，同种元素(即原子序数 Z 相同)的原子，其核内的中子数有所不同，这样的原子称为同位素。例如，普通的氧有三种同位素，每种同位素的 $Z=8$，但其质量却分别为 16、17 和 18，也即它们核内的中子数分别 $16-8=8$、$17-8=9$ 以及 $18-8=10$。通常用 $^{16}_8\mathrm{O}$、$^{17}_8\mathrm{O}$ 和 $^{18}_8\mathrm{O}$ 表示这些同位素，或简单地用 $^{16}\mathrm{O}$、$^{17}\mathrm{O}$、和 $^{18}\mathrm{O}$(即理解为氧的原子序数永远为 8)表示。

和这种表示法相一致，我们规定在元素符号的左上角标记核的质量数 A，左下角标记原子序数，用以表示该元素及其原子核

$^{A}_{Z}$(元素符号)

结合能

原子的质量并不等于组成它的质子、中子以及电子质量的总和。我们设想一个反应：自由的电子、质子和中子结合形成一个原子。人们发现，原子的质量比各个组分的质量总和稍稍小一点，而发生这种反应时，会释放出大量的能量。按照爱因斯坦的质能关系 $\Delta E_0=(\Delta m)c^2$，质量的亏损正是这些释放出来的能量所对应的质量。反之，若将原子完全分裂成组成它的粒子，就必须加入这同样多的能量 ΔE_0。ΔE_0 称之为原子的结合能。$\Delta m=1\mathrm{u}$ 的质量亏损相当于 931MeV 的结合能：

$$(1.66\times10^{-27}\mathrm{kg})(2.99\times10^{8}\mathrm{m/s})^2=1.49\times10^{-10}\mathrm{J}=931\mathrm{MeV}$$

不同元素的各同位素质量亏损的比例是不同的。某些轻元素同位素的质量见表45-2。这里是指中性原子(包括轨道电子)的质量。

表 45-2

中性原子	原子量	中性原子	原子量	中性原子	原子量	中性原子	原子量
$^{1}_{1}$H	1.007 83	$^{4}_{2}$He	4.002 60	$^{7}_{4}$Be	7.016 93	$^{14}_{7}$N	14.003 07
$^{2}_{1}$H	2.014 10	$^{6}_{3}$Li	6.015 13	$^{9}_{4}$Be	9.012 19	$^{16}_{8}$O	15.994 91
$^{3}_{1}$H	3.016 04	$^{7}_{3}$Li	7.016 00	$^{12}_{6}$C	12.000 00		

放射性

自然界中原子序数大于 82(铅)的原子核不稳定，具有放射性。许多人工产生的原子序数较小的元素也具有放射性。放射性原子核在衰变成为其他原子核时，会自发地放射出一种或几种粒子来。

核自发衰变的快慢，即其稳定性用其半衰期 $t_{1/2}$ 表示。所谓半衰期即同种原子核的较大试样衰变掉一半所需要的时间。对于每种同位素，半衰期是确定的。

放射性衰变是一个随机过程。无论什么时间开始观测，过了半衰期 $t_{1/2}$ 以后，样品中尚未衰变的原子就只剩一半了；而再过 $t_{1/2}$ 以后，原来样品中就只剩下 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 尚未衰变了。而 n 倍半衰期以后，样品中就只有 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 没衰变了。

在短时间 Δt 内将要发生衰变的原子数 ΔN 与当前放射性原子总数 N 之间存在简单的关系：

$$\Delta N=\lambda N\Delta t$$

式中 λ 称为衰变常数，它与半衰期的关系为

$$\lambda t_{1/2}=0.693$$

衰变率 $\Delta N/\Delta t$ 称为样品的放射性活度或强度，等于 λN，它随时间递减。在 SI 制中，放射性活度的单位为贝可(Bq)，1Bq 即每秒衰变一次。

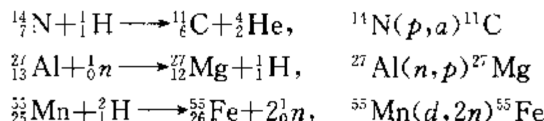
核反应方程式

在平衡的方程式中，方程两边各项左下角的原子序数的总和必须相等；同时各项左上角的质量数的总和也必须相等。这样，镭初级衰变的放射性方程就是



$$^{226}_{88}\mathrm{Ra}\longrightarrow{}^{222}_{86}\mathrm{Rn}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

人们也用简略的形式表达核过程：在表示靶材原子核与最终生成物的符号之间加一圆括号，在括号内用符号表示较轻的轰击粒子和较轻的生成粒子。符号 n、p、d、α、e^- 和 γ 分别表示中子、质子、氘核、α 粒子、电子和伽玛光子。以下是三个核方程式及其对应的简略形式：



$$^{14}_{7}N+^{1}_{1}H\longrightarrow^{11}_{6}C+^{4}_{2}He,\qquad ^{14}N(p,a)^{11}C$$
$$^{27}_{13}Al+^{1}_{0}n\longrightarrow^{27}_{12}Mg+^{1}_{1}H,\qquad ^{27}Al(n,p)^{27}Mg$$
$$^{55}_{25}Mn+^{2}_{1}H\longrightarrow^{55}_{26}Fe+2^{1}_{0}n,\qquad ^{55}Mn(d,2n)^{55}Fe$$

中子由于其不带正电，接近原子核时不受斥力作用，因此慢中子便成为引起核衰变的有效媒介。相反，带正电的粒子，如质子，则需具有很高的能量才能引起核衰变。电子质量太小，即使高能电子也难以引起核衰变。

例　题

45.1 碳原子核的半径约为 3×10^{-15}m，质量为 12u。求其核的平均密度，是水密度的多少倍？

解☞ $\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{4\pi r^3/3}=\frac{(12\text{u})(1.66\times10^{-27}\text{kg/u})}{4\pi(3\times10^{-15}\text{m})^3/3}=1.8\times10^{17}\text{kg/m}^3$

$\frac{\rho}{\rho_{水}}=\frac{1.8\times10^{17}}{1000}=2\times10^{14}$

45.2 在质谱仪中，通过对运动离子在磁场中偏转量的测量，可以求出离子的质量。假设氯的一价离子以 5.0×10^4 m/s 的速率垂直进入 $B=0.15$T 的磁场中(离子运动速率可通过速率选择器测量)。氯有两种主要的同位素，质量分别为 34.97u 和 36.97u。试求这两种同位素在磁场中的轨道半径。见图 45 - 1。

解☞ 两种同位素离子的质量分别为

$$m_1=(34.97\text{u})(1.66\times10^{-27}\text{kg/u})=5.81\times10^{-26}\text{kg}$$
$$m_2=(36.97\text{u})(1.66\times10^{-27}\text{kg/u})=6.14\times10^{-26}\text{kg}$$

磁场力 qvB 提供圆周运动的向心力 mv^2/r，

$$r=\frac{mv}{qB}=\frac{m(5.0\times10^4\text{m/s})}{(1.6\times10^{-19}\text{C})(0.105\text{T})}=m(2.98\times10^{24}\text{m/kg})$$

代入 m_1 和 m_2，得轨道半径分别为 0.17m 和 0.18m。

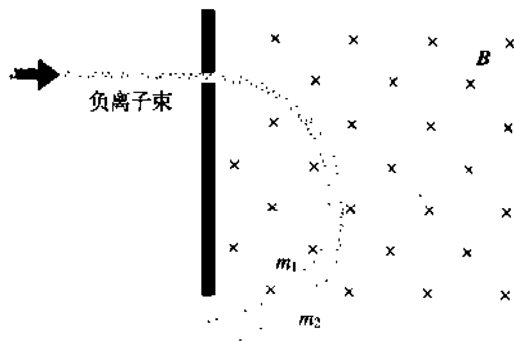


图 45 - 1

45.3 求在(a) ^{3}He，(b) ^{12}C 和(c) ^{206}Pb 中各有多少质子、中子和电子？

解☞ (a) He 的原子序数为 2，所以有 2 个质子。而这种同位素的质量数为 3，为质子数和中子数之总和。所以中子数为 1。而原子中电子与质子数量相等，所以电子数为 2。

(b) 碳的原子序数为 6，即碳核内有 6 个质子，而中子数=12−6=6。电子数也等于原子序数 6。

(c) 铅的原子序数为 82，所以铅核中有 82 个质子，206−82=124 个中子，电子数也为 82。

45.4 求^{12}C 的结合能。

解☞ 一个^{12}C 原子包含 6 个原子、6 个中子和 6 个电子。其没结合的质子和电子的质量等于 6 个^{1}H 原子的质量(如果忽略每对质子和电子的很小的结合能的话)。组成^{12}C 的各粒子可以看成为 6 个^{1}H 和 6 个中子，其质量由下式得出：

6个^{1}H原子的质量=6×1.0078u　=6.0468u
6个中子的质量=6×1.0087u　=6.0522u
所有组分的总质量　=12.0990u
^{12}C原子的质量　=12.0000u
形成^{12}C的质量亏损　=0.0990u
结合能=(931×0.0990)MeV　=92MeV

45.5 钴60(^{60}Co)常作为医用放射源，其半衰期为5.25年。试求投入新样品后多久，其放射性活度降低到(a)原来的八分之一左右，(b)原来的三分之一左右。答案精确到两位有效数字。

解☞ 放射性活度正比于尚未衰变的原子数

$$\Delta N/\Delta t=\lambda N$$

(a) 每过半衰期，实际样品衰减一半。由于$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，即3个半衰期约16年后，样品放射性为初始值的$\frac{1}{8}$。

(b) 利用每5.25年实际样品便衰减一半的事实，可以画出图45-2。从图中可得大约需8.3年，样品放射性衰减到初始值的$\frac{1}{3}$。

45.6 利用指数函数解上题中的(b)。

解☞ 图45-2中的曲线为指数衰减曲线，可表示成

$$\frac{N}{N_0}=e^{-\lambda t}$$

式中λ为衰变常数，N/N_0为经过t时间后尚未衰变的粒子数与其初始值之比。由于$\lambda t_{1/2}=0.693$，$\lambda=0.693/t_{1/2}=0.132/\text{a}$，而$N/N_0=0.333$，所以有

$$0.333=e^{-0.132t/\text{a}}$$

对两边取自然对数得到　$\ln(0.333)=-0.132t/\text{a}$

解之得　$t=8.3\text{a}$。

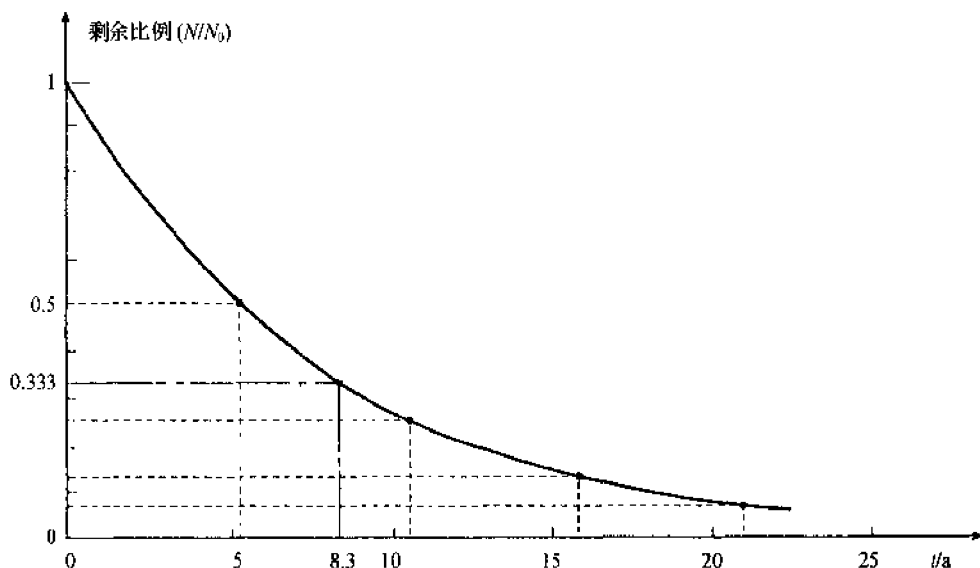


图45-2

45.7 对于45.5题的情况，20年后N/N_0为多少？

解☞ 由上题作法有

$$\frac{N}{N_0}=e^{-\lambda t}=e^{-(0.132)(20)}=e^{-2.64}$$

解得　$N/N_0=0.071$

在这两道题中，因为 λ 用 a^{-1} 表示，所以 t 的单位为 a。一般情况 λ 的单位为 s^{-1}，t 的单位就为秒(s)。必须注意 λ 和 t 的单位必须对应。

45.8 自然界中的钾有两种同位素。其一占总量的 93.4%，原子量为 38.975u。另外的 6.6%原子量为 40.974u。求自然界中钾的原子量。

解☞ 天然钾的原子量为两种同位素按其在自然界中丰度的比例相加得到

$$\text{原子量}=(0.934)(38.975\text{u})+(0.066)(40.974\text{u})=39.1\text{u}$$

45.9 镭的半衰期为 1.62×10^3a。其千摩尔质量为 226kg/kmol。求 1.00g 样品 1.00s 内有多少原子衰变。

解☞ 1.00g 样品为(0.00100/226)kmol，内含原子数目为

$$N=\left(\frac{0.001\,00}{226}\text{kmol}\right)\left(6.02\times10^{26}\ \frac{\text{原子}}{\text{kmol}}\right)=2.66\times10^{21}\ \text{原子}$$

衰变常数为

$$\lambda=\frac{0.693}{t_{1/2}}=\frac{0.693}{(1620\text{y})(3.156\times10^7\,\text{s/y})}=1.36\times10^{-11}\,\text{s}^{-1}$$

所以 $\frac{\Delta N}{\Delta t}=\lambda N=(1.36\times10^{-11}\,\text{s}^{-1})(2.66\times10^{21})=3.61\times10^{10}\,\text{s}^{-1}$

即每秒钟有 3.61×10^{10}个原子衰变。

上述结果引出了另一个放射性活度的单位：居里(Ci)：

$$1\text{Ci}=3.7\times10^{10}\,\text{s}^{-1}$$

为每秒钟衰变的原子数。尽管在国际单位制(SI)中放射性活度的单位是贝可[勒尔](Bq)，但“居里”(Ci)所表示的物理量的量级在实际使用中比较方便。在以下的解题过程中，有时还会用到它。

45.10 锝 99($^{99}_{43}$Tc)存在一个激发态，通过辐射伽玛射线而衰变。其半衰期为 360min。试求 1.00mg 这种处于激发态的同位素的放射性活度，以居里为单位。

解☞ 样品的放射性活度为 λN。在本题中

$$\lambda=\frac{0.693}{t_{1/2}}=\frac{0.693}{21\,600\text{s}}=3.21\times10^{-5}\,\text{s}^{-1}$$

由于 99.0kg 的 Tc 包含 6.02×10^{26}个原子。质量 $m=1.00\times10^{-6}$kg 的物质包含有

$$\left(\frac{1.00\times10^{-6}\,\text{kg}}{99.0\text{kg}}\right)(6.02\times10^{26})$$

个原子。所以

$$\lambda N=(3.21\times10^{-5}\,\text{s}^{-1})\left(\frac{1.00\times10^{-6}\,\text{kg}}{99.0\text{kg}}\right)(6.02\times10^{26})$$

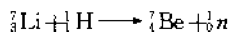
$$=1.95\times10^{14}\,\text{s}^{-1}=1.95\times10^{14}\,\text{Bq}=5.27\times10^{3}\,\text{Ci}$$

45.11 用多大能量的质子轰击才能产生如下的反应(答案精确到三位有效数字)：



$$^7\text{Li}(p,n)^7\text{Be}$$

解☞ 将题中反应方程写成



$$^7_3\text{Li}+^1_1\text{H}\longrightarrow{}^7_4\text{Be}+^1_0n$$

表 45-2 中所给出的质量包括了原子中电子的质量，所以求核质量必须减去相应的电子质量。

	反应物		生成物
$^7_3$Li	$7.016\,00-3m_e$	$^7_4$Be	$7.016\,93-4m_e$
$^1_1$H	$1.007\,83-1m_e$	^1_0n	$1.008\,66$
总计	$8.023\,83-4m_e$	总计	$8.025\,59-4m_e$

从生成物总质量中减去反应物总质量得到质量增加：0.00176u。（注意，电子质量抵消了，这是经常发生的，但不总是这样。）
要使反应中产生这个质量，必须给反应物提供能量。相应于 0.00176u 的能量为(931×0.00176) MeV=1.65MeV。它将由轰击质子的动能提供。入射质子必须要大于此能量，因为即使反应后系统仍然要有一定动能方可使动量守恒。考虑到动量守恒，入射粒子动能的极小值由下式给出：

$$\left(1+\frac{m}{M}\right)(1.65)\text{MeV}$$

式中 M 为靶物质粒子的质量，m 为入射粒子的质量。所以入射粒子的能量至少为

$$\left(1+\frac{1}{7}\right)(1.65)\text{MeV}=1.89\text{MeV}$$

45.12 完成下列核反应方程式

(a) ${}^{14}_{7}N+{}^{4}_{2}He\longrightarrow{}^{17}_{8}O+?$ (b) ${}^{9}_{4}Be+{}^{4}_{2}He\longrightarrow{}^{12}_{6}C+?$ (c) ${}^{9}_{4}Be(p,\alpha)?$

(d) ${}^{30}_{15}P\longrightarrow{}^{30}_{14}Si+?$ (e) ${}^{3}_{1}H\longrightarrow{}^{3}_{2}He+?$ (f) ${}^{43}_{20}Ca(\alpha,?){}^{46}_{21}Sc$

解 (a) 方程左边下标之和为 7+2=9。而右边第一项下标为 8，所以第二项下标必为 1(即净电荷)。另外，方程左边上标之和为 14+4=18，而右边第一项上标为 17，所以第二项上标必为 1(即质量数)。该粒子的核电荷数等于 1，质量数等于 1，所以粒子为${}^{1}_{1}H$。
(b) 第二个生成物的核电荷数等于(9+4)−12=0，而质量数(见上标)为(9+4)−12=1，所以该粒子为中子${}^{1}_{0}n$。
(c) 反应物${}^{9}_{4}B$和${}^{1}_{1}H$结合的核电荷数为 5，质量数为 10。生成物除了 α 粒子外，另一生成物的电荷数为 5−2=3，质量数为 10−4=6，所以必是${}^{6}_{3}Li$。
(d) 第二项生成物的核电荷数等于 15−14=1，其质量数等于 30−30=0。所以它是正电子，${}_{+1}^{0}e$。
(e) 第二项生成物的核电荷数等于 1−2=−1，其质量为 3−3=0。该粒子为电子，${}_{-1}^{0}e$。
(f) 反应物${}^{43}_{20}Ca$和${}^{4}_{2}He$的总核电荷数为 22，质量数为 47。其生成物的电荷数为 22−21=1，质量数为 47−46=1。该粒子为质子，在括号内填 p。
在以上的有些反应中还会产生中微子、光子。但它们的质量和电荷数均为零。在本讨论中予以忽略。
最后完成这 6 个方程如下：
(a) ${}^{14}_{7}N+{}^{4}_{2}He\longrightarrow{}^{17}_{8}O+{}^{1}_{1}H$
(b) ${}^{9}_{4}Be+{}^{4}_{2}He\longrightarrow{}^{12}_{6}C+{}^{1}_{0}n$
(c) ${}^{9}_{4}Be(p,\alpha){}^{6}_{3}Li$
(d) ${}^{30}_{15}P\longrightarrow{}^{30}_{14}Si+{}_{+1}^{0}e$
(e) ${}^{3}_{1}H\longrightarrow{}^{3}_{2}He+{}_{-1}^{0}e$
(f) ${}^{43}_{20}Ca(\alpha,p){}^{46}_{21}Sc$

45.13 铀 238(${}^{238}_{92}U$)具有放射性，它通过依次发射下列粒子，一直衰变至稳定形态：α，β，β，α，α，α，α，α，β，β，α，β，β，α。其中 β 为具他粒子 e^-。求最终稳定形态的核。

解 原始的核共辐射出 8 个 α 粒子和 6 个 β 粒子。每个 α 粒子带走 $+2e$ 电荷，所以每发射一个 α 粒子，Z 减去 2。而 β 粒子则带有 $-1e$，所以发射一个 β 粒子，核电荷要增加至$(Z+1)e$。最终结果为

$$Z=92+6-(2)(8)=82$$
$$A=238-(6)(0)-(8)(4)=206$$

最终稳定的核为${}^{206}_{82}Pb$。

45.14 铀 238 的半衰期约为 4.5×10^9a，其最终衰变物为铅 206。人们发现，地球上最古老的含铀岩石中铀与铅的比例为 50∶50。试求这些岩石的年龄。

解 自岩石生成至今，约一半的${}^{238}U$衰变成为${}^{206}Pb$。因此，这些岩石的年龄就是 4.5×10^9a。

45.15 一个 5.6MeV 的 α 粒子直接射击铀核($Z=92$)。试求它能接近核的中心到什么程度。

解 对于这样的高能粒子，原子中电子的影响可以忽略。另外，铀核质量很大，与粒子碰撞时可以认为是静止的。于是 α 粒子的动能将转变成静电势能。对于电荷 q' 距点电荷 q 的距离为 r，电

习　题

45.18 试求$^{235}_{92}U$中有多少质子、中子和电子。

（答　92，143，92）

45.19 当一个重核辐射出一个4.8MeV的γ光子后，其质量改变了多少？

（答　$5.2\times10^{-3}u=8.6\times10^{-30}kg$）

45.20 求$^{107}_{47}Ag$的结合能。已知其原子量为106.905u。答案要求三位有效数字。

（答　915MeV）[*]

45.21 周期表中铁附近的元素的每个核子的结合能约为8.90MeV。试求$^{56}_{26}Fe$的原子质量（包括核外电子）。

（答　55.9u）

45.22 钴60的半衰期为5.25年。试求放射性活度为1.0Ci的$^{60}_{27}Co$的质量。

（答　$8.8\times10^{-7}kg$）

45.23 某物质每次衰变都释放一个β粒子。在测定其半衰期的实验中发现，2.5mg的样品平均每秒辐射8.4个β粒子。该物质的原子量为230。求它的半衰期。

（答　$1.7\times10^{10}a$）

45.24 碳14的半衰期为$5.7\times10^{3}a$。试求5个半衰期后^{14}C样品中还剩多少尚未衰变。

（答　0.031）

45.25 铯124的半衰期为31s。试求这种样品经过0.1h后还剩多少尚未衰变。

（答　0.00032）

45.26 某种同位素的半衰期为7.0h。试求这种样品的百分之十发生衰变需花多少秒？

（答　$3.8\times10^{3}s$）

45.27 由于天然放射性，^{238}U辐射α粒子，剩余核记作UX_1。剩余核又继续辐射β粒子，生成核记作UX_2。试求(a) UX_1和(b) UX_2的原子序数和质量数。

（答　(a) 90，234；(b) 91，234）

45.28 $^{239}_{93}Np$衰变时放出β粒子。剩余核仍具放射性，它辐射后产生^{235}U。试求在形成铀235的同时，还辐射出什么粒子。

（答　α粒子）

45.29 完成下列方程（参见附录8的周期表）

(a) $^{23}_{11}Na+^{4}_{2}He\longrightarrow^{26}_{12}Mg+?$　(b) $^{64}_{29}Cu\longrightarrow{}_{+1}^{0}e+?$　(c) $^{106}Ag\longrightarrow^{106}Cd+?$

(d) $^{10}_{5}B+^{4}_{2}He\longrightarrow^{13}_{6}N+?$　(e) $^{105}_{48}Cd+{}_{-1}^{0}e\longrightarrow?$　(f) $^{238}_{92}U\longrightarrow^{234}_{90}Th+?$

（答　(a) $^{1}_{1}H$；(b) $^{64}_{28}Ni$；(c) ${}_{-1}^{0}e$；(d) $^{1}_{0}n$；(e) $^{105}_{47}Ag$；(f) $^{4}_{2}He$）

45.30 完全下列简略型的核反应方程：

(a) $^{24}Mg(d,\alpha)$?　(b) $^{26}Mg(d,p)$?　(c) $^{40}Ar(\alpha,p)$?　(d) $^{12}C(d,n)$?

(e) $^{130}Te(d,2n)$?　(f) $^{55}Mn(n,\gamma)$?　(g) $^{59}Co(n,\alpha)$?

（答　(a) ^{22}Na；(b) ^{27}Mg；(c) ^{43}K；(d) ^{13}N；(e) ^{130}I；(f) ^{56}Mn；(g) ^{56}Mn）

45.31 试求在过程(a) $^{1}_{1}H+^{7}_{3}Li\longrightarrow2^{4}_{2}He$和(b) $^{3}_{1}H+^{2}_{1}H\longrightarrow^{4}_{2}He+^{1}_{0}n$?中所释放的能量。

（答　(a) 17.4MeV；(b) 17.6MeV）

45.32 在$^{14}N(n,p)^{14}C$反应中释放出能量为0.600MeV的质子。所用的中子是非常低速的。试求^{14}C的原子质量。

（答　14.003u）

---

* 原中文稿和原英文书均为915eV——中文版责任编辑。

第四十六章　应用核物理

核结合能

它与上章讨论的核结合能略有不同，相差将核外电子与核结合的能量。将所有核子（中子和质子）聚集在一起时所释放的能量除以核子数，即为单个核子的结合能。对于$Z=30(A=60)$附近的原子核，单个核子的结合能最大。因此，元素周期表两端的核以某种方式转变成中等大小的核时会释放出能量。

裂变反应

质量大的原子核，如铀核，分裂成两片或三片中等大小的核时，会释放出能量。用低能或中等能量的中子来轰击大质量核时，会引发裂变反应。裂变反应产生另外的中子，这些中子又进一步引发裂变反应，放出更多的中子。若中子数保持不变或是有所增加，这一过程就成为自维持的链式反应。

聚变反应

在聚变反应中，质量小的核，如氢核或氦核，聚集到一起会释放能量。这些小质量核必须克服彼此间的库仑斥力才能聚集到一起，因此要启动和维系这种反应是很困难的。只有当这些粒子以极高的能量相互接近，靠近到强力起作用时，才能将它们聚合在一起。在恒星这样的温度极高的天体中，由于其高密度和高能量，使得聚变反应得以产生。

辐射剂量

用单位质量的物质所吸收的辐射能来定义辐射剂量。每千克物质吸收1焦耳辐射能定义辐射剂量为1戈[瑞](Gy)：

$$1\text{Gy}=\frac{\text{吸收 1J}}{\text{千克吸收物质}}=1\text{J/kg}$$

尽管在国际单位制(SI)中辐射剂量为格雷，然而广泛应用另外一种单位，拉德(rd) 1rd=0.01Gy。

辐射损伤势

不同形式、不同能量的辐射对生物组织的损害具有不同的特点。不同组织损伤也有不同。某具体形式的辐射，其潜在的损伤效应用这种辐射的品质因数QF来表示。QF由相对于200keV的X射线所造成的生物辐射损伤程度来确定（这种规定有一定的任意性）：

$$\text{QF}=\frac{\text{1Gy 辐射造成的生物效应}}{\text{1Gy 200keV X 射线造成的生物效应}}$$

比如，10Gy的某种辐射所造成的损伤相当于10Gy 200keV X射线所造成的损伤的七倍，其品质因数QF就等于7。有时用RBE（相对生物效应）代替品质因数，二者等价。

有效辐射剂量

有效辐射剂量是修正了的辐射剂量，以表示辐射对生物体的损伤，在国际单位制中其单位为希[沃特](Sv)。它定义为辐射剂量（以格雷为单位）与品质因数之积

$$\text{有效剂量(Sv)}=(\text{QF})(\text{剂量(Gy)})$$

比如，某种生物组织受到5Gy的辐射，品质因数为3，则其有效辐射剂量等于$3\times5=15$(Sv)。

另一种单位,雷姆(rem)也得到广泛使用。它与希[沃特]的关系为1rem=0.01Sv。

高能加速器

带电粒子在圆形轨道上运动可使它们加速到很高的能量。粒子(电荷 q)每转一圈,都经历一次电势差 V,转 n 圈后则能量达到 $q(nV)$。

粒子作圆周运动的向心力由磁场提供,磁场力等于向心力,即

$$mv = qBr$$

式中 m 为粒子质量,v 为粒子运动速率,r 为轨道半径,B 为磁感应强度。

粒子的动量

粒子的动量与其动能KE有关。由第四十一章的知识,粒子的总能量等于其动能与静止能量之和,$E=\mathrm{KE}+mc^2$,又由于 $E^2=m^2c^4+p^2c^2$,所以有

$$\mathrm{KE}=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}-mc^2$$

例　题

46.1 ^{238}U的每个核子的结合能约为7.6MeV。而质量为^{238}U一半的核子的结合能约为8.6MeV。若^{238}U核裂变成两个相等的核,在这个过程中会释放多少能量?

解 本题涉及238个核子。铀238核裂变时,每个核子释放出8.6−7.6=1.0MeV能量。所以总能量为238MeV或 2.4×10^2MeV。

46.2 ^{238}U的原子量为238.05079u,$m_p=1.007276$u,$m_n=1.008665$u。试求$^{238}_{92}$U核中每个核子的结合能。

解 92个质子加(238−92)=146个中子的质量为

$$(92)(1.007276\mathrm{u})+(146)(1.008665\mathrm{u})=239.93448\mathrm{u}$$

^{238}U的核质量为

$$238.05079\mathrm{u}-92m_e=238.05079\mathrm{u}-(92)(0.000549\mathrm{u})$$
$$=238.00028\mathrm{u}$$

聚合为核过程的质量亏损为

$$\Delta m=239.93448-238.00028=1.9342(\mathrm{u})$$

由于1.00u相当于931MeV,所以

$$结合能=(1.9342\mathrm{u})(931\mathrm{MeV/u})=1800\mathrm{MeV}$$

$$每个核子的结合能=\frac{1800\mathrm{MeV}}{238}=7.57\mathrm{MeV}$$

46.3 当一个^{235}U原子核在反应堆中裂变时,会释放出200MeV能量。若某铀235反应堆产生的功率为700MW,但只有20%的效率。试求(a)每天消耗多少铀原子。(b)每天消耗多少铀。

解 (a)一个原子裂变产生能量为

$$200\mathrm{MeV}=(200\times10^6)(1.6\times10^{-19})\mathrm{J}$$

由于只有20%的有效利用率,所以每个原子裂变产生的有用能为

$$(200\times10^6)(1.6\times10^{-19})(0.20)=6.4\times10^{-12}\mathrm{J}$$

又,反应堆输出功率为 700×10^6J/s,需要每秒钟裂变数为

$$\frac{7.00\times10^8\mathrm{J/s}}{6.4\times10^{-12}\mathrm{J}}=1.1\times10^{20}\mathrm{s}^{-1}$$

每日量为(86400s/d)$(1.1\times10^{20}\mathrm{s}^{-1})=9.5\times10^{24}\mathrm{d}^{-1}$(d表示天)。即每日消耗 9.5×10^{24}个原子。

(b) 235kg的铀235中有 6.02×10^{26}个原子。所以每日消耗的铀235为

$$\left(\frac{9.5\times10^{24}}{6.02\times10^{26}}\right)(235\mathrm{kg})=3.7\mathrm{kg}$$

46.4 裂变生成的中子必须先与减速剂核碰撞才能利用它产生进一步的裂变。假设一个800keV 的中子每碰撞一次损失 40%的能量。欲将其能量减至 0.040eV,需多少次碰撞?(这个能量为 35℃时气体分子的平均热能)

解☞ 一次碰撞后,中子能量减至(0.60)(800keV);两次碰撞后,减至(0.6)(0.6)(800keV);三次碰撞后,减至$(0.6)^3(800\text{keV})$,所以 n 次碰撞后,中子的能量为$(0.6)^n(800\text{keV})$。当 n 足够大时,有

$$(0.6)^n(800\text{keV}) = 0.040\text{eV}$$

两边取对数得

$$n\lg 0.6 + \lg(8\times10^5) = \lg 0.040$$

$$n(-0.222) + 5.903 = -1.398$$

解得 $n=32.9$。需 33 次碰撞。

46.5 要研究原子核结构,须用德布罗意波长小于 10^{-16}m 的非常小的粒子。试问,电子须加速电压多大才能产生这种波长?假设电子以相对论速率运动。

解☞ 电子的动能与动量的关系为

$$\text{KE} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

而德布罗意波长 $\lambda=h/p$,得

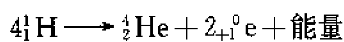
$$\text{KE} = \sqrt{\left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 + m^2c^4} - mc^2$$

代入 $\lambda=10^{-16}\text{m}, h=6.62\times10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}, m=9.1\times10^{-31}\text{kg}$,得

$$\text{KE} = 1.99\times10^{-9}\text{J} = 1.24\times10^{10}\text{eV}$$

即加速电压约为 10^{10}V。

46.6 在太阳内部发生如下反应,并提供大部分能量



$$4{}_1^1\text{H} \longrightarrow {}_2^4\text{He} + 2{}_{+1}^{0}\text{e} + 能量$$

式中${}_{+1}^{0}\text{e}$为正电子。试求消耗 1.00kg 的氢会释放多少能量。${}^1\text{H}$、${}^4\text{He}$ 和${}_{+1}^{0}\text{e}$ 的质量分别为 1.007825u、4.00 2604u 和 0.000 549u,${}^1\text{H}$ 和${}^4\text{He}$ 的质量数中包括了核外电子的质量。

解☞ 反应物,即 4 个质子的质量,为 4 个氢原子的质量减去 4 个电子的质量:

$$(4)(1.007825\text{u}) - 4m_e$$
$$= 4.031\,300\text{u} - 4m_e$$

式中 m_e 为电子(或正电子)的质量。而反应生成物质量为${}_2^4$He 核的质量加两个正电子的质量:

$$(4.00\,2604\text{u} - 2m_e) + (2m_e) = 4.002604\text{u}$$

$$\begin{aligned}质量亏损 &= 反应物质量 - 生成物质量\\ &= (4.0313\text{u} - 4m_e) - 4.0026\text{u}\\ &= [4.0313\text{u} - (4)(0.000549\text{u})] - 4.0026\text{u}\\ &= 0.0265\text{u}\end{aligned}$$

1.00kg 氢包括 6.02×10^{26}个原子。每 4 个原子聚变质量亏损为 0.0265u。所以每千克质量亏损为

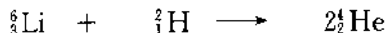
$$\begin{aligned}(0.0265\text{u})(0.02\times10^{26}/4) &= 3.99\times10^{24}\text{u}\\ &= (3.99\times10^{24}\text{u})(1.66\times10^{-27}\text{kg/u}) = 0.00663\text{kg}\end{aligned}$$

由爱因斯坦质能关系得

$$\begin{aligned}\Delta E &= (\Delta m)c^2 = (0.00663\text{kg})(2.998\times10^8\text{m/s})^2\\ &= 5.96\times10^{14}\text{J}\end{aligned}$$

46.7 氢化锂(LiH)被认为是一种可能的核燃料。有关的核及其反应式如下:

$${}_3^6\text{Li} \quad + \quad {}_1^2\text{H} \quad \longrightarrow \quad 2{}_2^4\text{He}$$



$$6.015\,13 \quad 2.014\,10 \quad 4.002\,60$$

式中所列出的质量为中性原子的质量。试求,若每天消耗 1.00g 氢化锂,且效率为 100%,能产生多少兆瓦(MW)的功率。

解☞ 首先计算反应过程中的质量变化

	反应物		生成物
$^6_3$Li	$6.015\ 13u-3m_e$	2^4_2He	$2(4.002\ 60u-2m_e)$
$^2_1$H	$2.014\ 10u-1m_e$		
总计	$8.029\ 23u-4m_e$	总计	$8.005\ 20u-4m_e$

二者相减，电子质量消掉了，得到质量亏损为 0.02403u。

亏损的比例为 $0.0240/8.029=2.99\times10^{-3}$。

所以 1.00g 反应物的质量亏损为

$$(2.99\times10^{-3})(1.00\times10^{-3}\text{kg})=2.99\times10^{-6}\text{kg}$$

相应的能量为

$$\Delta E=(\Delta m)c^2=(2.99\times10^{-6}\text{kg})(2.998\times10^{8}\text{m/s})^2$$
$$=2.687\times10^{11}\text{J}$$
$$\text{功率}=\frac{\text{能量}}{\text{时间}}=\frac{2.687\times10^{11}\text{J}}{8\ 6400\text{s}}=3.11\text{MW}$$

46.8 宇宙射线轰击大气中的CO_2，通过核反应生成碳的放射性同位素$^{14}_6$C，其半衰期为 5730 年。这种同位素均匀地混合到大气中，并被生长中的植物吸收。植物死后，体内的^{14}C 开始衰变。若一块木片中^{14}C 的含量只为生长中树木中^{14}C 含量的 9%，试求这片木头的年代。

解 产生这块木片原来的树死亡后，^{14}C 衰变到原来含量的 0.090。所以(参见 45.6 题)

$$\frac{N}{N_0}=e^{-\lambda t}$$

即　$0.090=e^{-0.693t/5730a}$

取自然对数得

$$\ln 0.090=\frac{-0.693t}{5730a}$$

即　$t=\left(\frac{5730a}{-0.693}\right)(-2.41)=1.99\times10^4a$

这块木片大约有 20 000 年历史了。

46.9 ^{131}I 的半衰期约为 8.0 天。它随食物进入体内并有 7.0%沉降到甲状腺。^{131}I 衰变产生 γ 射线，通过计量 γ 射线来检测^{131}I 的衰变，但只有 20%可以被探测出来。若计数器探测到甲状腺处光子产率为 50 个/秒。试求该被测试者吸收了多少^{131}I。

解 由于检测率只为 20%，所以实际上每秒衰变率为 $50/0.20=250/\text{s}$。由上一章知识，

$$\frac{\Delta N}{\Delta t}=\lambda N=\frac{0.693N}{t_{1/2}},\quad 250\text{s}^{-1}=\frac{0.693N}{(8.0\text{d})(3600\text{s/h})(24\text{h/d})}$$

得　$N=2.49\times10^8$

而这只是所吸收量的 7.0%，所以吸入的原子数为 $N/0.070=3.56\times10^9$。每 1.00kmol 的^{131}I 质量约为 131kg，这些原子的质量为

$$\left(\frac{3.56\times10^9\ \text{原子}}{6.02\times10^{26}\ \text{原子/kmol}}\right)(131\text{kg/kmol})=7.8\times10^{-16}\text{kg}$$

46.10 一束 γ 射线的截面积为 2.0cm^2，每秒钟有 7.0×10^8 个光子通过截面。每个光子能量为 1.25MeV。光子穿过 0.75cm 厚的肌肉($\rho=0.95\text{g/cm}^3$)损失了 5.0%的强度。求每秒钟肌肉受到的平均辐射剂量，分别以戈[瑞](Gy)和拉德(rd)为单位。

解 每千克肌肉所吸收的能量即为本题的剂量。每秒钟吸收光子数为

$$(7.0\times10^8\text{s}^{-1})(0.050)=3.5\times10^7\text{s}^{-1}$$

每秒钟吸收能量为

$$(3.5\times10^7\text{s}^{-1})(1.25\text{MeV})=4.4\times10^7\text{MeV/s}$$

吸收这些能量的肌肉质量为

$$M=\rho V=(0.95\text{g/cm}^3)(2.0\text{cm}^2)(0.75\text{cm})=1.43\text{g}$$

所以每秒钟辐射剂量为

$$\frac{能量/秒}{质量}=\frac{(4.4\times10^7\text{MeV/s})(1.6\times10^{-13}\text{J/MeV})}{1.43\times10^{-3}\text{kg}}$$
$$=4.9\text{mGy/s}=0.49\text{rd/s}$$

46.11 一束 α 粒子穿过每千克肌肉便有 0.20J 能量被吸收。这些粒子的 QF 为 12Sv/Gy。试求 α 粒子的辐射剂量，以 Gy 和 rd 为单位，并求其有效剂量，以 Sv 和 rem 为单位。

解 ☞

$$剂量=\frac{吸收能}{质量}=0.20\text{J/kg}=0.20\text{Gy}=20\text{rd}$$
$$有效剂量=(\text{QF})(剂量)=(12\text{Sv/Gy})(0.20\text{Gy})$$
$$=2.4\text{Sv}=24\times10^2\text{rem}$$

46.12 某人腿上长了一个 3.0g 的肿瘤。若用放射源在 14min 内辐照该肿瘤的剂量为 10Gy，源的每次衰变平均产生 0.70MeV 对肿瘤的辐射能。试求放射源活度的极小值。

解 ☞ 10Gy 的辐射剂量相当于每千克物质吸收了 10J 能量。肿瘤质量为 0.0030kg，对于 10Gy 的辐射所需能量为(0.0030kg)(10J/kg)=0.030J。

每一衰变产生 0.70MeV，即

$$(0.70\times10^6\text{eV})(1.60\times10^{-19}\text{J/eV})=1.12\times10^{-13}\text{J}$$

若提供 0.030J 能量，需

$$\frac{0.030\text{J}}{1.12\times10^{-13}\text{J/}衰变}=2.68\times10^{11}\ 次衰变$$

这是在 14min(840s)内完成的，所以有

$$\frac{2.68\times10^{11}\ 衰变}{840\text{s}}=3.2\times10^8\ 衰变/\text{s}$$

所以源的活度至少为 3.2×10^8Bq。

又 1Ci=3.70×10^{10}Bq。活度相当于 8.6mCi。

46.13 一束 5.0MeV 的 α 粒子($q=2e$)的截面积为 1.50cm²，束流为 2.50×10^{-9}A，入射并穿透 0.70mm 的肌肉(ρ=950kg/m³)。(a) 求该粒子流对肌肉在 3.0s 内的辐射剂量，以 Gy 为单位。(b) 有效剂量为多少。设 QF=14。

解 ☞ (a) 求先 3.0s 内落到肌肉上的 α 粒子数

$$\frac{It}{\alpha}=\frac{(2.50\times10^{-9}\text{C/s})(3.0\text{s})}{3.2\times10^{-19}\text{C}}=2.34\times10^{10}$$

每个粒子携带能量为

$$(5.0\times10^6\text{eV})(1.60\times10^{-19}\text{J/eV})=8.0\times10^{-13}\text{J}$$

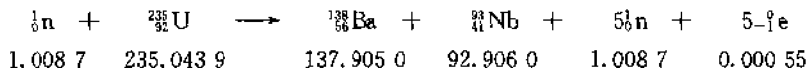
所以　　剂量 = 能量 / 质量

$$=\frac{(2.34\times10^{10})(8.0\times10^{-13}\text{J})}{(950\text{kg/m}^3)(0.070\times1.5\times10^{-6}\text{m}^3)}=188\text{Gy}$$
$$=1.9\times10^2\text{Gy}$$

(b) 有效剂量=(QF)(188)=(14)(188)
$$=2.6\times10^3\text{Sv}$$

习　题

46.14 研究下列裂变反应：



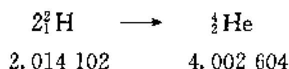
$$^1_0\text{n}+{}^{235}_{92}\text{U}\longrightarrow{}^{138}_{56}\text{Ba}+{}^{93}_{41}\text{Nb}+5\,^1_0\text{n}+5\,^{\ 0}_{-1}\text{e}$$

1.008 7　　235.043 9　　137.905 0　　92.906 0　　1.008 7　　0.000 55

式中的质量为中性原子的质量。试求(a) 1 个原子发生这一反应和(b) 1.0kg 原子发生这一反应所释放出的能量。

(答　(a) 182MeV；(b) 7.5×10^{13}J)

46.15 有人建议用下面的核聚变反应发电：



$$2\,{}^{2}_{1}H \longrightarrow {}^{4}_{2}He$$

2.014 102　　4.002 604

式中给出的是中性原子的质量。若能量利用效率为30%，要产生150MW的电力，每天需消耗多少克的氘？

（答　75g/d）

46.16　一种最有前途的氘、氚聚变发电的核反应式为



$${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$$

2.014 10　　3.016 05　　4.002 60　　1.008 67

式中元素质量包括核外电子。试求2.0kg的${}^{2}H$和3.0kg的${}^{3}H$聚变形成${}^{4}He$将产生多少能量。

（答　1.7×10^{15}J）

46.17　太阳核心处的温度约为10^{7}K。求那里的中子的平均动能。要求答案有两位有效数字。

（答　1.3keV）

46.18　试求两个氘原子（${}^{2}_{1}H$，原子量为2.01410u）聚合为${}^{3}_{2}He$（原子量为3.01603u）同时释放一个中子能产生多少能量。要求三位有效数字。

（答　3.27MeV）

46.19　古代的木焦油核内${}^{14}C$的活度为当前同样密度的木材的4.00%。试求古代焦油的年代。

（答　26.6×10^{3}a）

46.20　铷87的半衰期为4.9×10^{10}a，它衰变为稳定的锶87。在一块古代岩石中，${}^{87}Sr$与${}^{87}Rb$的比例为0.0050。假设所有的锶都来自铷的衰变，求这块岩石的年龄。若比例为0.210，情况又如何？

（答　3.5×10^{8}a，　1.35×10^{10}a）

46.21　一块老式手表的荧光表盘每分钟发出130个快电子。假设每个电子的能量为0.50MeV，且落到面积为2.0cm^2、深度为0.20cm的皮肤内。求皮肤1.0天内接收的辐射剂量（以Gy和rd为单位）。取皮肤的密度为900kg/m^3。

（答　42μGy，4.2mrd）

46.22　一束α粒子流进入电荷收集器，测得每秒电荷流量为2.0×10^{-14}C。已知束流截面为150mm^2，粒子束深入到0.14mm深的皮肤中。若每个粒子的能量为4.0MeV，束流的QF为15。试求皮肤在20s内受到的有效辐射剂量，以Sv和rem为单位。取皮肤密度$\rho=900$kg/m^3。

（答　0.63Sv，63rem）

附录A 有效数字

引言

一切测量值都是近似的。我们来看，某物体的长度测量值记录为 15.7cm。按惯例，它表示这段长度测量值的近似是在十分之一厘米这一位上，即长度的准确值在 15.65cm 和 15.75cm 之间。假若测量值的近似是在百分之一厘米这一位上，则应记录为 15.70cm。15.7cm 表示三位有效数字(1、5 和 7)，而 15.70cm 表示四位有效数字(1、5、7 和 0)。有效数字就是有理由信赖的数字。

同样，某物体的质量为 3.4062kg 表示其测量值的近似是在十分之一克这一位，它有五位有效数字(3、4、0、6 和 2)。它的前四位有效数字保证是确定无误的，也有理由认为其最后一位的数字 2 是可信的。

在初等物理和化学测量中，最后一位数是估计的，仍然算是有效数字。

零

零可能是有效数字，也可能仅仅用来确定小数点的位置。我们将把（在诸如100、2500、40 等数中）位于小数点常规位置左侧的零当作有效数字。比如，说一块石头的重量为 9800N，应理解为其测量值的近似是在牛顿这一位，测量值有四位有效数字。如果重量的近似在一百牛顿这一位，其测量值就只有两位有效数字，而用指数形式记为 9.8×10^3N。如果近似是在十牛顿这一位，则应记为 9.80×10^3N，有三位有效数字。如果近似是在牛顿这一位，也可记为 9.800×10^3N，仍然是四位有效数字。两个有效数字之间的零，当然也是有效数字。在一个数的小数部分中，任意一个有效数字右边的零都是有效数字。0.001、0.0010、0.00100 和 1.001 四个数的有效数字分别为一位、两位、三位和四位。

四舍五入

为了满足有效数字位数的要求，有时需将某一数字右边的一位或几位四舍五入。若第一位略去的数小于 5，它左边的数字保留不动；若大于 5，它左边的数字要加 1。

加法和减法规则

对加减法运算结果的四舍五入，应使结果的有效数字保留到各个数中估读位数最高的那一位。(记住，一个数的最后一位有效数字是估读的。)换句话说，运算结果有效数字的末位要与参加运算的各数末位中精确性最差的那一位对齐。

例 将下列各量相加(单位都是米)：

(a)	(b)	(c)	(d)
25.340	58.0	4.20	415.5
5.465	0.003 8	1.652 3	3.64
0.322	0.000 01	0.015	0.238
31.127	58.003 81	5.867 3	419.378
答案 =31.127m	答案 =58.0m	答案 =5.87m	答案 =419.4m

乘法和除法规则

对乘除运算结果的四舍五入，应使结果的有效数字位数与参加运算的各个数中有效数字位数最少的相同。

但有一些例外。考虑 9.84÷9.3=1.06，有三位有效数字。按刚才所说的规则，其结果应有两位有效数字，为 1.1。然而，9.3 的末位差 1 所产生的误差约为 1%，而 1.1 的末位差 1 所产生的误差却接近 10%。即 1.1 的相对精度比 9.3 的相对精度要低得多。所以，这个运算结果应为 1.06，其末位差 1 所产生的相对误差与 9.3 末位差 1 产生的相对误差基本相同。类似地，0.92×1.13=1.04。

三角函数规则

一个角度的正弦、余弦、正切等值的有效数字应与这个角度的有效数字位数相同。比如，$\sin 35^\circ = 0.57$，而 $\sin 35.0^\circ = 0.574$。

练　　习

1 下列各量有几位有效数字？

(a) 454g　(b) 2.2N　(c) 2.205N　(d) 0.393 7s

(e) 0.035 3m　(f) 1.008 0hr　(g) 14.0A　(h) 9.3×10^{7}km

(i) 1.118×10^{-3}V　(j) 1030kg/m^3　(k) 125 000N

答 (a) 3　(b) 2　(c) 4　(d) 4

(e) 3　(f) 5　(g) 3　(h) 2

(i) 4　(j) 4　(k) 6

2 加法：

(a)	(b)	(c)	(d)
703 h	18.425 cm	0.003 5 s	4.0 N
7 h	7.21 cm	0.097 s	0.632 N
0.66 h	5.0 cm	0.225 s	0.148 N

答 (a) 711 h，(b) 30.6 cm，(c) 0.326 s，(d) 4.8 N

3 减法：

(a)	(b)	(c)
7.26 J	562.4 m	34 kg
0.2 J	16.8 m	0.2 kg

答 (a) 7.1 J，(b) 545.6 m，(c) 34 kg

4 乘法：(a) 2.21×0.3　(b) 72.4×0.084　(c) 2.02×4.113

(d) 107.88×0.610　(e) 12.4×84.0　(f) 72.4×8.6

答 (a) 0.7　(b) 6.1　(c) 8.31

(d) 65.8　(e) 1.04×10^{3}　(f) 6.2×10^{2}

5 除法：(a) $\frac{97.52}{2.54}$，(b) $\frac{14.28}{0.714}$，(c) $\frac{0.032}{0.004}$，(d) $\frac{9.80}{9.30}$

答 (a) 38.4，(b) 20.0，(c) 8，(d) 1.05

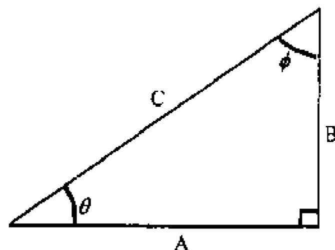
附录B 平面三角

锐角的三角函数

最常用的三角函数为正弦、余弦和正切。用直角三角形的各边长来定义一个锐角的三角函数是非常方便的。

在任意一个直角三角形中，任何一个锐角的正弦都等于其对边长度比斜边长度。而余弦则等于这个角的邻边长度比斜边长度。角度的正切等于这个角的对边长度比相邻直角边的长度。

在如图所示的直角三角形中，θ 和 ϕ 为两个锐角，而 A、B 和 C 为三角形各边，则有



$$\sin\theta=\frac{对边}{斜边}=\frac{B}{C},\quad \sin\phi=\frac{对边}{斜边}=\frac{A}{C}$$
$$\cos\theta=\frac{邻边}{斜边}=\frac{A}{C},\quad \cos\phi=\frac{邻边}{斜边}=\frac{B}{C}$$
$$\tan\theta=\frac{对边}{邻边}=\frac{B}{A},\quad \tan\phi=\frac{对边}{邻边}=\frac{A}{B}$$

注意，$\sin\theta=\cos\phi$，即任何角的正弦等于其余角的余弦。例如

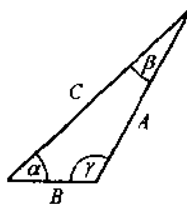
$$\sin30°=\cos(90°-30°)=\cos60° \quad \cos50°=\sin(90°-50°)=\sin40°$$

当角度从 0°增加到 90°，其正弦值从 0 增加到 1，正切值从 0 增加到无穷大，而余弦值从 1 减小到 0。

正弦定理和余弦定理

这两个定理给出了任何一个平面三角形的边和角的关系。若一个三角形的三个角为 α、β 和 γ，其相应的对边为 A、B 和 C，则有

(1)正弦定理



$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{B}{\sin\beta}=\frac{C}{\sin\gamma}$$
$$\frac{A}{B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\quad \frac{B}{C}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\quad \frac{C}{A}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

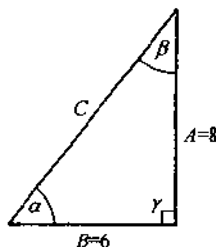
(2)余弦定理

$$A^2=B^2+C^2-2BC\cos\alpha$$
$$B^2=A^2+C^2-2AC\cos\beta$$
$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos\gamma$$

如果 θ 在 90°和 180°之间，如上图中 C 的对角，则有

$$\sin\theta=\sin(180°-\theta) \qquad \cos\theta=-\cos(180°-\theta)$$

例　题



1　在直角三角形 ABC 中，已知 $A=8$，$B=6$，$\gamma=90°$。求角 α 和 β 的正弦、余弦和正切值。

解 $C=\sqrt{8.0^2+6.0^2}=\sqrt{100}=10$

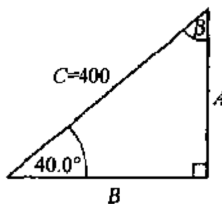
$\sin\alpha=A/C=8.0/10=0.80 \quad \sin\beta=B/C=6.0/10=0.60$

$\cos\alpha=B/C=6.0/10=0.60 \quad \cos\beta=A/C=8.0/10=0.80$

$\tan\alpha=A/B=8.0/6.0=1.3 \quad \tan\beta=B/A=6.0/8.0=0.75$

2 已知一直角三角形的一个锐角为 40.0°,斜边等于 400。求其他各边和角度。

解 由 $\sin 40.0°=\dfrac{A}{400}$, $\cos 40.0°=\dfrac{B}{400}$



用计算器求得 sin40.0°=0.6428 和 cos40.0°=0.7660。所以

$$A=400\sin 40.0°=400(0.6428)=257$$

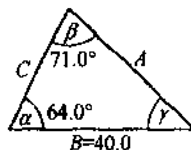
$$B=400\cos 40.0°=400(0.7660)=306$$

$$\beta=90.0°-40.0°=50.0°$$

3 已知三角形 ABC 中 $\alpha=64.0°$, $\beta=71.0°$, $B=40.0$,求 A 和 C。

解 $\gamma=180.0°-(\alpha+\beta)=180.0°-(64.0°+71.0°)=45.0°$

按正弦定理



$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{B}{\sin\beta},\quad \frac{C}{\sin\gamma}=\frac{B}{\sin\beta}$$

$$A=\frac{B\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{40.0\sin 64.0°}{\sin 71.0°}=\frac{40.0(0.8988)}{0.9455}=38.0$$

$$C=\frac{B\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{40.0\sin 45.0°}{\sin 71.0°}=\frac{40.0(0.7071)}{0.9455}=29.9$$

4 (a) 若 $\cos\alpha=0.438$,求 α 值,要求近似在度这一位。

(b) 若 $\sin\beta=0.8000$,求 β 值,要求近似在十分之一度这一位。

(c) 若 $\cos\gamma=0.7120$,求 γ 值,要求近似在十分之一度这一位。

解 (a) 用计算器上的"inverse"键和"cosine"键,得到 $\alpha=64°$。或用"$\cos^{-1}$"进行计算。

(b) 将 0.8000 输入计算器,用"inverse"键和"sine"键求得 $\beta=53.1°$。

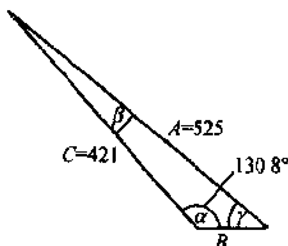
(c) 操作如(a),得 $\gamma=44.6°$。

5 已知三角形 ABC 中 $\alpha=130.8°$, $A=525$, $C=421$。求 B、β 和 γ。

解 $\sin 130.8°=\sin(180°-130.8°)=\sin 49.2°=0.757$

多数计算器可以直接计算 sin130.8°。

对于 γ 有



$$\sin\gamma=\frac{C\sin\alpha}{A}=\frac{421\sin 30.8°}{525}=\frac{421(0.757)}{525}=0.607$$

得 $\gamma=37.4°$。

对于 β 有

$$\beta=180°-(\gamma+\alpha)=180°-(37.4°+130.8°)=11.8°$$

对于 B,有

$$B=\frac{A\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{525\sin 11.8°}{\sin 130.8°}=\frac{525(0.204)}{0.757}=142$$

6 已知三角形 ABC 中 $A=14$, $B=8.0$, $\gamma=130°$。求 C、α 和 β。

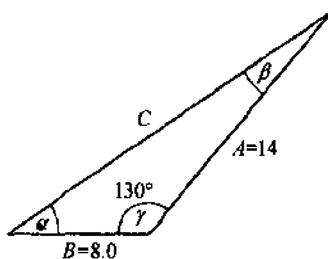
解 $\cos 130°=-\cos(180°-130°)=-\cos 50°=-0.64$

对于 C,应用余弦定理

$$C^2=A^2+B^2-2AB\cos 130°$$

$$=14^2+8.0^2-2(14)(8.0)(-0.643)=404$$

得 $C=\sqrt{404}=20$



对于 α,应用正弦定理

$$\sin\alpha=\frac{A\sin\gamma}{C}=\frac{14(0.766)}{20.1}=0.533$$

得 $\alpha=32°$。

对于 β:

$$\beta=180^\circ-(\alpha+\gamma)=180^\circ-(32^\circ+130^\circ)=18^\circ$$

练　习

7 解下列直角三角形，其中 $\gamma=90^\circ$。

(a) $\alpha=23.3^\circ, C=346$　(b) $\beta=49.2^\circ, B=222$　(c) $\alpha=66.6^\circ, A=113$

(d) $A=25.4, B=38.2$　(e) $B=673, C=888$

答 (a) $\beta=66.7^\circ, A=137, B=318$　(b) $\alpha=40.8^\circ, A=192, C=293$

(c) $\beta=23.4^\circ, B=48.9, C=123$　(d) $\alpha=33.6^\circ, \beta=56.4^\circ, C=45.9$

(e) $\alpha=40.7^\circ, \beta=49.3^\circ, A=579$

8 解下列斜三角形：

(a) $A=125, \alpha=54.6^\circ, \beta=65.2^\circ$　(b) $B=321, \alpha=75.3^\circ, \gamma=38.5^\circ$

(c) $B=215, C=150, \beta=42.7^\circ$　(d) $A=512, B=426, \alpha=48.8^\circ$

(e) $B=50.4, C=33.3, \beta=118.5^\circ$　(f) $B=120, C=270, \alpha=118.7^\circ$

(g) $A=24.5, B=18.6, C=26.4$　(h) $A=6.34, B=7.30, C=9.98$

答 (a) $B=139, C=133, \gamma=60.2^\circ$　(b) $A=339, C=218, \beta=66.2^\circ$

(c) $A=300, \alpha=109.1^\circ, \gamma=28.2^\circ$　(d) $C=680, \beta=38.8^\circ, \gamma=92.4^\circ$

(e) $A=25.1, \alpha=26.0^\circ, \gamma=35.5^\circ$　(f) $A=344, \beta=17.8^\circ, \gamma=43.5^\circ$

(g) $\alpha=63.2^\circ, \beta=42.7^\circ, \gamma=74.1^\circ$　(h) $\alpha=39.3^\circ, \beta=46.9^\circ, \gamma=93.8^\circ$

附录C 指 数

10 的幂

下面列出若干 10 的幂值(参见附录 E)。

$10^0=1$，

$10^1=10$，

$10^2=10\times10=100$，

$10^3=10\times10\times10=1000$，

$10^4=10\times10\times10\times10=10\,000$，

$10^5=10\times10\times10\times10\times10=100\,000$，

$10^6=10\times10\times10\times10\times10\times10=1\,000\,000$，

$10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1$

$10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0.01$

$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}=0.001$

$10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\frac{1}{10\,000}=0.0001$

在表达式 10^5 中，底数为 10，指数为 5。

幂的乘法和除法

同底数幂相乘指数相加。

$a^3\times a^5=a^{3+5}=a^8$，　　$10^7\times10^{-3}=10^{7-3}=10^4$

$10^2\times10^3=10^{2+3}=10^5$，　　$(4\times10^4)(2\times10^{-6})=8\times10^{4-6}=8\times10^{-2}$

$10\times10=10^{1+1}=10^2$，　　$(2\times10^5)(3\times10^{-2})=6\times10^{5-2}=6\times10^3$

同底数幂相除指数相减。

$\frac{a^5}{a^3}=a^{5-3}=a^2$，　　$\frac{8\times10^2}{2\times10^{-6}}=\frac{8}{2}\times10^{2+6}=4\times10^8$

$\frac{10^2}{10^5}=10^{2-5}=10^{-3}$，　　$\frac{5.6\times10^{-2}}{1.6\times10^4}=\frac{5.6}{1.6}\times10^{-2-4}=3.5\times10^{-6}$

科学计数法

任何一个数均可表示成 10 的整数次幂或者是一个数与 10 的整数次幂的乘积。比如

$2806=2.806\times10^3$，　　$0.045\,4=4.54\times10^{-2}$

$22\,406=2.240\,6\times10^4$，　　$0.000\,06=6\times10^{-5}$

$454=4.54\times10^2$，　　$0.003\,06=3.06\times10^{-3}$

$0.454=4.54\times10^{-1}$，　　$0.000\,000\,5=5\times10^{-7}$

其他运算

一个非零数或非零的表达式的零次方等于 1。即

$$a^0=1,\ 10^0=1,\ (3\times10)^0=1,\ 8.2\times10^0=8.2$$

将幂的指数改变符号，可以使分子上的幂变成分母上的幂，反过来也是一样。如

$$10^{-4}=\frac{1}{10^4},\ 5\times10^{-3}=\frac{5}{10^3},\ \frac{7}{10^{-2}}=7\times10^2,\ -5a^{-2}=-\frac{5}{a^2}$$

分数指数的意义如下：

$$10^{2/3}=\sqrt[3]{10^2},\ 10^{3/2}=\sqrt{10^3},\ 10^{1/2}=\sqrt{10},\ 4^{3/2}=\sqrt{4^3}=\sqrt{64}=8$$

对一个幂进行乘方运算，将指数相乘，如

$$(10^3)^2=10^{3\times2}=10^6,\ (10^{-2})^3=10^{-2\times3}=10^{-6},\ (a^3)^{-2}=a^{-6}$$

对一个幂开平方，需将其指数除以 2。若指数为奇数，则先将它加 1 或减 1 再行运算，同

时相应地调整其系数。求立方根，则对指数除以 3。而它们的系数则要单独处理。如

$\sqrt{9\times10^4}=3\times10^2$，　　$\sqrt{4.9\times10^{-5}}=\sqrt{49\times10^{-6}}=7.0\times10^{-3}$

$\sqrt{3.6\times10^7}=\sqrt{36\times10^6}=6.0\times10^3$，　　$\sqrt[3]{1.25\times10^8}=\sqrt[3]{125\times10^6}=5.00\times10^2$

多数计算器都可以直接求平方根。而求立方根或其他方根，可用 y^x 键计算。

练　习

1 用 10 的幂来表示下列各数：

(a) 326　(b) 32 608　(c) 1006　(d) 36 000 008　(e) 0.831

(f) 0.03　(g) 0.000 002　(h) 0.000 706　(i) $\sqrt{0.000\,081}$　(j) $\sqrt[3]{0.000\,027}$

答 (a) 3.26×10^2　(b) $3.260\,8\times10^4$　(c) 1.006×10^3　(d) $3.600\,000\,8\times10^7$

(e) 8.31×10^{-1}　(f) 3×10^{-2}　(g) 2×10^{-6}　(h) 7.06×10^{-4}

(i) 9.0×10^{-3}　(j) 3.0×10^{-2}

2 计算下列各式并将结果写成 10 的幂：

(a) 1500×260　(b) $220\times35\,000$　(c) $40\div20\,000$

(d) $82\,800\div0.12$　(e) $\dfrac{1.728\times17.28}{0.000\,172\,8}$　(f) $\dfrac{(16\,000)(0.000\,2)(1.2)}{(2000)(0.006)(0.000\,32)}$

(g) $\dfrac{0.004\times32\,000\times0.6}{6400\times3000\times0.08}$　(h) $(\sqrt{14\,400})(\sqrt{0.000\,025})$　(i) $(\sqrt[3]{2.7\times10^7})(\sqrt[3]{1.25\times10^{-4}})$

(j) $(1\times10^{-3})(2\times10^5)^2$　(k) $\dfrac{(3\times10^2)^3(2\times10^{-5})^2}{3.6\times10^{-8}}$　(l) $8(2\times10^{-2})^{-3}$

答 (a) 3.90×10^5　(b) 7.70×10^6　(c) 2.0×10^{-3}　(d) 6.9×10^5

(e) 1.728×10^5　(f) 1×10^3　(g) 5×10^{-5}　(h) 6.0×10^{-1}

(i) 1.5×10^1　(j) 4×10^7　(k) 3×10^5　(l) 1×10^6

附录D 对 数

以10为底的对数

一个数，它的以10为底的对数是10自乘的次数，或者说是10的幂次；以10为底，以这个次数为指数(或幂次数)，就得到这个数。1000是10^3，所以，以10为底，1000的对数就等于3，记作 $\lg 1000=3$。同样，$\lg 1000=4$，$\lg 0.1=-1$，$\lg 0.001=-3$。(译注：以10为底的对数叫常用对数，在多数书中记作lg。而以任意数a为底，N的对数记作$\log_a N$。)

多数计算器都有"log"键。先向计算器输入一个数，再按"log"键即可求出以10为底的这个数的对数。用这种方法，我们求得 $\lg 50=1.69897$，$\lg 0.035=-1.45593$。也可求得 $\lg 1=0$，这反映了 $10^0=1$ 这个事实。

自然对数

自然对数以 $e=2.718$ 为底，而不是以10为底。多数计算器有"ln"键，按此键可求一个数的自然对数。由于 $e^0=1$，所以同样有 $\ln 1=0$。

例 $\lg 971=2.987\,2$，　　$\ln 971=6.878\,3$

$\lg 9.71=0.987\,2$，　　$\ln 9.71=2.273\,2$

$\lg 0.097\,1=-1.012\,8$，　　$\ln 0.097\,1=-2.332\,0$

练习 求出下列各数以10为底的对数：

(a) 454　(b) 5280　(c) 96 500　(d) 30.48　(e) 1.057

(f) 0.621　(g) 0.946 3　(h) 0.035 3　(i) 0.002 2　(j) 0.000 264 5

答 (a) 2.657 1　(b) 3.722 6　(c) 4.984 5　(d) 1.484 0　(e) 0.024 1

(f) −0.206 9　(g) −0.023 97　(h) −1.452 2　(i) −2.657 6　(j) −3.577 6

反对数

假设我们有这样一个等式：$3.5=10^{0.544}$。我们知道，0.544是以10为底、3.5的对数。或者反过来说，3.5是0.544的反对数。用计算器求反对数是很方便的：输入一个数，先揿"inverse"键，再揿"log"键即可。如果是以e为底而不是以10为底，则揿"inverse"和"ln"键即可。

练习 求出下列各数的以10为底的反对数：

(a) 3.156 8　(b) 1.693 4　(c) 5.693 4　(d) 2.500 0　(e) 2.043 6

(f) 0.914 2　(g) 0.000 8　(h) −0.249 3　(i) −1.996 5　(j) −2.799 4

答 (a) 1435　(b) 49.37　(c) 4.937×10^5　(d) 316.2　(e) 110.6

(f) 8.208　(g) 1.002　(h) 0.563 2　(i) 0.010 08　(j) 0.001 587

对数的基本性质

由于对数是在指数位置上的，所以指数的全部性质也即对数的全部性质。

(1) 两个数乘积的对数等于各自对数之和：

$$\log ab=\log a+\log b \qquad \log(5280\times48)=\log 5280+\log 48$$

(2) 两个数商的对数等于分子的对数减去分母的对数：

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b \qquad \log\frac{536}{24.5}=\log 536-\log 24.5$$

(3) 一个数n次幂的对数等于这个数的对数的n倍：

$$\log a^n=n\log a \qquad \log(4.28)^3=3\log 4.28$$

(4) 一个数的开 n 次方的对数等于这个数的对数的 $1/n$：

$$\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a \qquad \log\sqrt{32}=\frac{1}{2}\log 32 \qquad \log\sqrt[3]{792}=\frac{1}{3}\log 792$$

例　题

1 用计算器求出(a) $(5.2)^{0.4}$，(b) $(6.138)^3$，(c) $\sqrt[3]{5}$，(d) $(7.25\times10^{-11})^{0.25}$

解 ☞ (a) 输入 5.2，按“y^x”键；输入 0.4，按“=”键，得 1.934。

(b) 输入 6.138，按“y^x”键，输入 3，按“=”键，得 231.2。

(c) 输入 5，按“y^x”键，输入 0.333 3，按“=”键，得 1.710。

(d) 输入 7.25×10^{-11}，按“y^x”键，输入 0.25，按“=”键，得 2.918×10^{-3}。

习　题

1 求下列各式：

(1) $28.32\times0.082\,54$

(2) $573\times6.96\times0.004\,81$

(3) $\dfrac{79.28}{63.57}$

(4) $\dfrac{65.38}{225.2}$

(5) $\dfrac{1}{239}$

(6) $\dfrac{0.572\times31.8}{96.2}$

(7) $47.5\times\dfrac{779}{760}\times\dfrac{273}{300}$

(8) $(8.642)^2$

(9) $(0.086\,42)^2$

(10) $(11.72)^3$

(11) $(0.052\,3)^3$

(12) $\sqrt{9463}$

(13) $\sqrt{946.3}$

(14) $\sqrt{0.006\,61}$

(15) $\sqrt[3]{1.79}$

(16) $\sqrt[4]{0.182}$

(17) $\sqrt{643}\times(1.91)^3$

(18) $(8.73\times10^{-2})(7.49\times10^{6})$

(19) $(3.8\times10^{-5})^2(1.9\times10^{-5})$

(20) $\dfrac{8.5\times10^{-45}}{1.6\times10^{-22}}$

(21) $\sqrt{2.54\times10^{6}}$

(22) $\sqrt{9.44\times10^{5}}$

(23) $\sqrt{7.2\times10^{-13}}$

(24) $\sqrt[3]{7.3\times10^{-14}}$

(25) $\sqrt{\dfrac{(1.1\times10^{-23})(6.8\times10^{-2})}{1.4\times10^{-24}}}$

(26) $2.04\log 97.2$

(27) $37\log 0.029\,8$

(28) $6.30\log(2.95\times10^{3})$

(29) $8.09\log(5.68\times10^{-16})$

(30) $(2.00)^{0.714}$

答 (1) 2.337　(2) 19.2　(3) 1.247　(4) 0.290 2

(5) 0.004 18　(6) 0.189　(7) 44.3　(8) 74.67

(9) 0.007 467　(10) 1611　(11) 0.000 143　(12) 97.27

(13) 30.76　(14) 0.081 3　(15) 1.21　(16) 0.653

(17) 177　(18) 6.54×10^{5}　(19) 2.7×10^{-14}　(20) 5.3×10^{-23}

(21) 1.59×10^{3}　(22) 9.72×10^{2}　(23) 8.5×10^{-7}　(24) 4.2×10^{-5}

(25) 0.73　(26) 4.05　(27) -56　(28) 21.9

(29) -123　(30) 1.64

附录 E

国际单位制中倍率的表达

倍率因子	前缀	符号
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

希腊字母表

Α	α	alpha	Η	η	eta	Ν	ν	nu	Τ	τ	tau
Β	β	beta	Θ	θ	theta	Ξ	ξ	xi	Υ	υ	upsilon
Γ	γ	gamma	Ι	ι	iota	Ο	ο	omicron	Φ	φ	phi
Δ	δ	delta	Κ	κ	kappa	Π	π	pi	Χ	χ	chi
Ε	ε	epsilon	Λ	λ	lambda	Ρ	ρ	rho	Ψ	ψ	psi
Ζ	ζ	zeta	Μ	μ	mu	Σ	σ	sigma	Ω	ω	omega

附录 F

国际单位制中的换算因子

加速度　1 ft/s^2=0.304 8m/s^2

g=9.807 m/s^2

面积　1 acre=4047 m^2

1 ft^2=9.290×10^{-2} m^2

1 in^2=6.45×10^{-4} m^2

1 mi^2=2.59×10^6 m^2

密度　1 g/cm^3=10^3 kg/m^3

能量　1 Btu=1054 J

1 cal=4.184 J

1 eV=1.602×10^{-19} J

1 ft · lb=1.356 J

1 kW · h=3.60×10^6 J

力　1 dyne=10^{-5} N

1 lbf=4.44 8N

长度　1 Å=10^{-10}m

1 ft=0.304 8m

1 in. =2.54×10^{-2} m

1 l. y. =9.461×10^{15}m

1 mile=1069 m

质量　1 u=1.660 6×10^{-27}kg

1 gram=10^{-3} kg

功率　1 Btu/s=1054 W

1 cal/s=4.184 W

1 ft · lb/s=1.356 W

1 hp=746 W

压强　1 atm=1.013×10^5 Pa

1 bar=10^5Pa

1 cmHg=1333 Pa

1 lbf/ft^2=47.88 Pa

1 lbf/in.^{2}(psi)=6895 Pa

1 N/m^2=1 Pa

1 torr=133.3 Pa

速率　1 ft/s (fps)=0.304 8 m/s

1 km/h=0.277 8 m/s

1 mi/h (mph)=0.447 04 m/s

温度　$T_K=T_C+273.15$

$T_K=\frac{5}{9}(T_F+459.67)$

$T_C=\frac{5}{9}(T_F-32)$

$T_K=\frac{5}{9}T_R$

时间　1 d=86 400 s

1 a=3.16×10^7 s

体积　1 ft^3=2.832×$10^{-2}$$m^3$

1 加仑=3.785×10^{-3} m^3

1 in.^{3}=1.639×10^{-5} m^3

1 L=10^{-3} m^3

附录 G

物理常数表

Speed of light in free space	真空中光速	c	$=2.99792458\times10^{8}$ m/s
Acceleration due to gravity(normal)	重力加速度	g	$=9.807$ m/s^2
Gravitational constant	万有引力常数	G	$=6.67259\times10^{-11}$ N·m^2/kg^2
Coulomb constant	库仑常数	k_0	$=8.988\times10^{9}$ N·m^2/C^2
Density of water(maximum)	水的密度极大值		$=0.999972\times10^{3}$ kg/m^3
Density of mercury(S. T. P.)	水银密度		$=13.595\times10^{3}$ kg/m^3
Standard atmosphere	标准大气压		$=1.0132\times10^{5}$ N/m^2
Volume of ideal gas at S. T. P.	理想气体体积(S. T. P)		$=22.4$ m^3/kmol
Avogadro's number	阿伏伽德罗常数	N_A	$=6.022\times10^{26}$ kmol^{-1}
Universal gas constant	普适气体常数	R	$=8314$ J/kmol·K
Ice point	冰点		-273.15 K
Mechanical equivalent of heat	热功当量		$=4.184$ J/cal
Stefan-Boltzmann constant	斯特藩-玻尔兹曼常数	σ	$=5.67\times10^{-8}$ W/m^2·K^4
Planck's constant	普朗克常数	h	$=6.626\times10^{-34}$ J·s
Faraday	法拉第	F	$=9.6485\times10^{4}$ C/mol
Electronic charge	电子电荷	e	$=1.6022\times10^{-19}$C
Boltzmann's constant	玻尔兹曼常数	k_B	$=1.38\times10^{-23}$ J/K
Ratio of electron charge to mass	电子荷质比	e/m_e	$=1.7588\times10^{11}$ C/kg
Electron rest mass	电子静止质量	m_e	$=9.109\times10^{-31}$ kg
Proton rest mass	质子静止质量	m_p	$=1.6726\times10^{-27}$ kg
Neutron rest mass	中子静止质量	m_n	$=1.6749\times10^{-27}$ kg
Alpha particle rest mass	α粒子静止质量		$=6.645\times10^{-27}$ kg
Atomic mass unit(1/12 mass of ^{12}C)	原子量单位的质量	u	$=1.6606\times10^{-27}$ kg
Rest energy of 1 u	1u的静止能量		$=931.5$MeV

附录 H

元素表

表中的质量都是以$^{12}_{6}C=12u$为基础的。括号中的质量为该元素已知的最稳定(即寿命最长)的同位素的质量数。元素顺序是按字母表的顺序。

元素	符号	原子序数	平均原子量/u	元素	符号	原子序数	平均原子量/u
Actinium 锕	Ac	89	(227)	Dysprosium 镝	Dy	66	162.50
Aluminum 铝	Al	13	26.981 5	Einsteinium 锿	Es	99	(254)
Americium 镅	Am	95	(243)	Erbium 铒	Er	68	167.26
Antimony 锑	Sb	51	121.75	Europium 铕	Eu	63	151.96
Argon 氩	Ar	18	39.948	Fermium 镄	Fm	100	(257)
Arsenic 砷	As	33	74.921 6	Fluorine 氟	F	9	18.998 4
Astatine 砹	At	85	(210)	Francium 钫	Fr	87	(223)
Barium 钡	Ba	56	137.34	Gadolinium 钆	Gd	64	157.25
Berkelium 锫	Bk	97	(247)	Gallium 镓	Ga	31	69.72
Beryllium 铍	Be	4	9.012 2	Germanium 锗	Ge	32	72.59
Bismuth 铋	Bi	83	208.980	Gold 金	Au	79	196.967
Boron 硼	B	5	10.811	Hafnium 铪	Hf	72	178.49
Bromine 溴	Br	35	79.904	Helium 氦	He	2	4.002 6
Cadmium 镉	Cd	48	112.40	Holmium 钬	Ho	67	164.930
Calcium 钙	Ca	20	40.08	Hydrogen 氢	H	1	1.008 0
Californium 锎	Cf	98	(251)	Indium 铟	In	49	114.82
Carbon 碳	C	6	12.011 2	Iodine 碘	I	53	126.904 4
Cerium 铈	Ce	58	140.12	Iridium 铱	Ir	77	192.2
Cesium 铯	Cs	55	132.905	Iron 铁	Fe	26	55.847
Chlorine 氯	Cl	17	35.453	Krypton 氪	Kr	36	83.80
Chromium 铬	Cr	24	51.996	Lanthanum 镧	La	57	138.91
Cobalt 钴	Co	27	58.933 2	Lawrencium 铹	Lr	103	(257)
Copper 铜	Cu	29	63.546	Lead 铅	Pb	82	207.19
Curium 锔	Cm	96	(247)	Lithium 锂	Li	3	6.939

（续）

元素	符号	原子序数	平均原子量/u	元素	符号	原子序数	平均原子量/u
Lutetium 镥	Lu	71	174.97	Rubidium 铷	Rb	37	85.47
Magnesium 镁	Mg	12	24.312	Ruthenium 钌	Ru	44	101.07
Manganese 锰	Mn	25	54.938 0	Samarium 钐	Sm	62	150.35
Mendelevium 钔	Md	101	(256)	Scandium 钪	Sc	21	44.956
Mercury 汞	Hg	80	200.59	Selenium 硒	Se	34	78.96
Molybdenum 钼	Mo	42	95.94	Silicon 硅	Si	14	28.086
Neodymium 钕	Nd	60	144.24	Silver 银	Ag	47	107.868
Neon 氖	Ne	10	20.183	Sodium 钠	Na	11	22.989 8
Neptunium 镎	Np	93	(237)	Strontium 锶	Sr	38	87.62
Nickel 镍	Ni	28	58.71	Sulfur 硫	S	16	32.064
Niobium 铌	Nb	41	92.906	Tantalum 钽	Ta	73	180.948
Nitrogen 氮	N	7	14.006 7	Technetium 锝	Tc	43	(97)
Nobelium 锘	No	102	(254)	Tellurium 碲	Te	52	127.60
Osmium 锇	Os	76	190.2	Terbium 铽	Tb	65	158.924
Oxygen 氧	O	8	15.999 4	Thallium 铊	Tl	81	204.37
Palladium 钯	Pd	46	106.4	Thorium 钍	Th	90	232.038 1
Phosphorus 磷	P	15	30.973 8	Thulium 铥	Tm	69	168.934
Platinum 铂	Pt	78	195.09	Tin 锡	Sn	50	118.69
Plutonium 钚	Pu	94	(244)	Titanium 钛	Ti	22	47.90
Polonium 钋	Po	84	(209)	Tungsten 钨	W	74	183.85
Potassium 钾	K	19	39.102	Uranium 铀	U	92	238.03
Praseodyvmium 镨	Pr	59	140.907	Vanadium 钒	V	23	50.942
Promethium 钷	Pm	61	(145)	Xenon 氙	Xe	54	131.30
Protactinium 镤	Pa	91	(231)	Ytterbium 镱	Yb	70	173.04
Radium 镭	Ra	88	(226)	Yttrium 钇	Y	39	88.905
Radon 氡	Rn	86	222	Zinc 锌	Zn	30	65.37
Rhenium 铼	Re	75	186.2	Zirconium 锆	Zr	40	91.22
Rhodium 铑	Rh	45	102.905				